ΠΟΛΥΤΕΧΝΟΣ

Ángel Cardama Aznar
Lluís Jofre Roca
Juan Manuel Rius Casals
Jordi Romeu Robert
Sebastián Blanch Boris
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Miguel Ferrando Bataller
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Antenas

EDICIONS UPC

La presente obra fue galardonada en el octavo concurso
"Ajut a l'elaboració de material docent" convocado por la UPC.

Primera edición: septiembre de 1998
Segunda edición: septiembre de 2002

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu
Diseño y montaje interiores Edicions UPC, Ana Latorre y David Pablo

© Los autores, 1998

© Edicions UPC, 1998
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.es

Producción: El Tinter, SAL (empresa certificada ISO 14001 i EMAS)
La Plana 8, 08032 Barcelona

Depósito legal: B-39109-2002
ISBN: 84-8301-625-7

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Prólogo a la segunda edición

En esta nueva edición hemos pretendido actualizar el contenido del libro de forma que pueda servir de base para el estudio de las antenas y de la propagación de las ondas radioeléctricas en la carrera de Ingeniería de Telecomunicación. Existe una amplísima bibliografía sobre este tema, prácticamente toda en lengua inglesa, que se incluye ordenada alfabéticamente tras los apéndices; el texto ha sido elaborado teniéndola en consideración e intentando, al mismo tiempo, hacerlo autocontenido. Si bien la ordenación y el tratamiento que se ha dado a los temas son clásicos, hemos querido incorporar muchos de los aspectos que tratamos habitualmente en clase y que, en nuestra experiencia, ayudan a comprender mejor la materia; con este fin se han incorporado en cada capítulo ejemplos representativos y una amplia colección de problemas y de cuestiones, de tipo multirespuesta, que pueden servir de diagnóstico para valorar individualmente el progreso realizado en el estudio.

Los dos primeros capítulos son básicos y, aunque independientes en su contenido, sirven conjuntamente de base para comprender en profundidad, y valorar en detalle, el empleo de las antenas en los sistemas de comunicaciones. En el primero de ellos se definen y se presentan de manera sistematizada los parámetros que sirven para caracterizar el comportamiento de las antenas y en el segundo se introducen, sobre la base de principios físicos conocidos, los efectos de la tierra y de la atmósfera en la propagación de las ondas electromagnéticas. Ambos sirven de introducción, tanto de un curso específico de antenas, como de uno dedicado a los medios de transmisión, en los aspectos relativos a la propagación no guiada. A partir de los conocimientos adquiridos en un curso de campos electromagnéticos se plasma, en el tercer capítulo, la formulación general aplicable al cálculo de los campos radiados por antenas y se establece una analogía con el análisis de sistemas lineales mediante transformadas de Fourier. Los tres capítulos siguientes contienen la materia específica de un curso de antenas, analizándose en detalle en el cuarto las antenas cilíndricas, dipolos y espiras, en el quinto las agrupaciones, estando el sexto dedicado al estudio de las antenas de apertura, en particular ranuras, bocinas y reflectores. En el capítulo séptimo se presentan las antenas de banda ancha, con especial énfasis en las independientes de la frecuencia y en las logoperiódicas. Los dos últimos capítulos contienen dos temas complementarios en un curso normal de antenas, y han sido incluidos para dar una mayor perspectiva de los potentes métodos de cálculo y medida disponibles en la actualidad; el primero de ellos describe los métodos numéricos utilizados en el cálculo de antenas, así como en la propagación de ondas, en el estudio de la difracción por objetos y en el cálculo de la sección recta de blancos de radar, mientras que en el último se presentan la instrumentación y los procedimientos que se aplican habitualmente en la medida de antenas.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La materia incluida cubre con amplitud los contenidos de un curso anual y la selección a realizar para un curso cuatrimestral depende del enfoque que se le pretenda dar. Para un curso básico, los dos primeros capítulos y una selección temática simplificada de los cuatro restantes permitirían instruir a los alumnos en los aspectos fundamentales y hacerles comprender el funcionamiento de las antenas de uso más frecuente. Un curso avanzado debería basarse, en gran medida, en el contenido de los capítulos tercero al séptimo.

El texto es un reflejo, no sólo de nuestro conocimiento y experiencia, sino también de las aportaciones realizadas por otros profesores que han compartido con nosotros, en diversos momentos, la enseñanza de esta materia en la Escuela: Pedro Mier, Albert Martí, Lluís Pradell, Mercè Vall-llosera, Josep Parrón y José María González. En el largo proceso que va de la conversión de un manuscrito en un libro, hemos contado con la inestimable ayuda de Miquel Tintoré, quien no sólo ha realizado el trabajo de elaboración del texto y de las figuras, sino que ha aportado también una visión crítica de su contenido; nuestra gratitud y reconocimiento por su infatigable actividad y su dedicación a este proceso. Finalmente, de no haber contado con el apoyo de la Universidad Politécnica de Cataluña y de su editorial no nos habríamos animado a emprender esta tarea.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Índice

1 Consideraciones generales sobre antenas

1.1 Introducción 15
1.2 Parámetros de antenas en transmisión 17
1.2.1 Impedancia 17
1.2.2 Intensidad de radiación 18
1.2.3 Diagrama de radiación 20
1.2.4 Directividad 22
1.2.5 Polarización 24
1.2.6 Ancho de banda 25
1.3 Parámetros de antenas en recepción 27
1.3.1 Adaptación 27
1.3.2 Área y longitud efectiva 27
1.4 Ecuación de transmisión 28
1.4.1 Ecuación del radar 31
1.5 Temperatura de ruido de antena 32
1.6 Cuestiones 36
1.7 Problemas 38

2 Propagación

2.1 Propagación en el espacio libre y en el entorno terrestre 41
2.2 Efecto de la tierra 43
2.2.1 Introducción 43
2.2.2 Reflexión en tierra plana 44
2.2.3 Difracción 48
2.2.4 Onda de superficie 51
2.3 Efecto de la troposfera 54
2.3.1 Atenuación 54
2.3.2 Refracción 58

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

2.3.3 Difusión troposférica 61
2.4 Efecto de la ionosfera 61
2.4.1 Introducción 61
2.4.2 Propagación en un medio ionizado 63
2.4.3 Influencia del campo magnético terrestre 65
2.4.4 Comunicaciones ionosféricas 66
2.5 Modelización de la propagación en entornos complejos 70
2.5.1 Introducción 70
2.5.2 Modelos empíricos para el valor medio de las pérdidas de propagación. El Modelo Okumuna-Hata 71
2.5.3 Caracterización estadística de las pérdidas de propagación 72
2.5.4 Desvanecimientos rápidos multicamino y diversidad 73
2.6 Fuentes de ruido externo 75
2.7 Resumen 78
2.8 Cuestiones 80
2.9 Problemas 83

3 Fundamentos de radiación

3.1 Ecuaciones de Maxwell 87
3.1.1 Fuentes eléctricas y magnéticas. Dualidad 89
3.2 Potenciales retardados 91
3.3 Expresiones generales de los campos 93
3.3.1 Aproximaciones a grandes distancias para los campos radiados 94
3.3.2 Radiación de corrientes magnéticas 98
3.3.3 Significado de los vectores de radiación 100
3.3.4 Regiones de Fresnel y de Fraunhofer 104
3.4 Teoremas de unicidad y equivalencia 106
3.5 Teorema de reciprocidad 110
3.6 Aplicación del teorema de reciprocidad 111
3.6.1 Consecuencias del teorema de reciprocidad 113
3.6.2 Relación entre parámetros de transmisión y de recepción. Longitud efectiva 116
3.6.3 Coeficiente de desacoplo de polarización 118
3.6.4 Impedancia de entrada e impedancias mutuas 120
3.7 Cuestiones 122
3.8 Problemas 125

4 Análisis de antenas básicas

4.1 Antenas elementales 127
4.1.1 Dipolo elemental 127
4.1.2 Espira circular elemental 134
4.1.3 Solenoide cargado con ferrita 136
4.1.4 Expresiones generales de $\vec{N}$ para dipolos y espiras 137
4.2 Dipolos 139

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.3 Efecto de la tierra. Monopolos 145
4.3.1 Teoría de imágenes 145
4.3.2 Monopolos 147
4.3.3 Efecto de una tierra imperfecta 148
4.3.4 Efecto de un plano de tierra finito 149
4.4 Antenas cargadas 149
4.5 Cálculo de la matriz de impedancias entre dos dipolos 152
4.5.1 Impedancia de entrada de un dipolo 152
4.5.2 Impedancia mutua entre dipolos 154
4.6. Sistemas de alimentación 155
4.6.1 Redes de adaptación 156
4.6.2 Antenas no alimentadas en su centro 156
4.6.3 Alimentación en paralelo 156
4.6.4 Dipolo doblado 157
4.6.5 Simetrizadores y transformadores 158
4.7 Cuestiones 164
4.8 Problemas 166

5 Agrupaciones de antenas

5.1 Introducción 171
5.2 Campos radiados por agrupaciones 172
5.3 Diagrama de radiación de agrupaciones 175
5.3.1 Factor de la agrupación 175
5.3.2 Representación gráfica del factor de la agrupación 166
5.3.3 Diagrama de una agrupación de dos elementos 179
5.3.4 Polinomio de la agrupación 179
5.4 Distribuciones de corrientes típicas 181
5.4.1 Uniforme 181
5.4.2 Triangular 183
5.4.3 Binómica 184
5.4.4 Comparación de las características 185
5.4.5 Descomposición en suma o convolución 186
5.5 Agrupación lineal uniforme 189
5.5.1 Agrupaciones transversales y longitudinales 190
5.6 Directividad de agrupaciones lineales 191
5.6.1 Expresión general de la directividad para agrupaciones ordinarias 191
5.6.2 Expresión general aproximada del ancho de haz y la directividad 199
5.6.3 Relación entre alimentación, directividad y diagrama 201
5.7 Agrupaciones bidimensionales 202
5.8 Síntesis de agrupaciones 207
5.8.1 Método de Schelkunoff 207
5.8.2 Síntesis de Fourier 209
5.8.3 Síntesis de Woodward-Lawson 215
5.8.4 Síntesis de Chebychev 217
5.8.5 Síntesis de Taylor 225

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.8.6 Agrupaciones superdirectivas....226
5.8.7 Agrupaciones adaptables....228
5.9 Alimentación de agrupaciones....230
5.10 Agrupaciones con elementos parásitos....232
5.10.1 Antenas de Yagi-Uda....233
5.11 Cuestiones....236
5.12 Problemas....239

6 Aperturas

6.1 Campos radiados por aperturas....244
6.1.1. Equivalente electromagnético de una apertura....244
6.1.2 Expresiones generales de los campos radiados....245
6.1.3 Apertura elemental....248
6.1.4 Apertura rectangular....249
6.1.5 Apertura circular....253
6.2 Bocinas....255
6.2.1 Bocinas sectoriales y piramidal....255
6.2.2 Bocina cónica....263
6.3 Ranuras....265
6.3.1 Ranura elemental....266
6.3.2 Ranura resonante....268
6.3.3 Antenas impresas....270
6.4 Reflectores....273
6.4.1 Reflectores diédricos....273
6.4.2 Reflectores parabólicos....276
6.4.2.1 Análisis geométrico....277
6.4.2.2 Análisis electromagnético....279
6.4.2.3 Parámetros....281
6.4.2.4 Consideraciones de tipo práctico....292
6.4.2.5 Tipos de alimentador....294
6.4.2.6 Geometrías de reflector....296
6.5 Lentes....299
6.5.1 Análisis electromagnético....299
6.5.2 Lentes escalonadas (*zoned lenses*)....301
6.5.3 Lentes TEM....302
6.5.4 Lentes de Luneburg....303
6.5.5 Compararación entre reflectores y lentes....304
6.6 Cuestiones....305
6.7 Problemas....308

7 Antenas de banda ancha

7.1 Introducción....315
7.2 Antenas de hilo....315

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

7.3 Otras antenas de banda ancha 319
7.4 Hélices 320
7.5 Antenas independientes de la frecuencia 324
7.5.1 Espirales 326
7.6 Antenas logoperiódicas 328
7.7 Antenas fractales 334
7.8 Cuestiones 336
7.9 Problemas 338

8 Métodos numéricos

8.1 Introducción 341
8.1.1 Planteamiento de la solución 341
8.1.2 Clasificación de los métodos numéricos 343
8.2 Métodos integrales 344
8.2.1 Aplicación del teorema de equivalencia 345
8.2.2 Formulación de las ecuaciones integrales 350
8.2.3 Alimentación 356
8.3 Discretización de las ecuaciones integrales 357
8.3.1 Método de los momentos 357
8.3.2 Método del gradiente conjugado 363
8.3.3 Funciones base y peso 367
8.4 Métodos de alta frecuencia 375
8.4.1 Óptica física 376
8.4.2 Método de las corrientes equivalentes (MEC) 378
8.4.3 Métodos asintóticos o de trazado de rayos 381
8.4.4 Ondas de superficie 384
8.4.5 Análisis en alta frecuencia de superficies arbitrarias 385
8.5 Cuestiones 387
8.6 Problemas 389

9 Medida de antenas

9.1 Introducción 391
9.2 Medida de diagramas de radiación. Campos de medida 391
9.2.1 Criterios de diseño de los campos de medida 392
9.2.2 Campos de medida 395
9.2.3 Instrumentación de medida 400
9.3 Medida de ganancia 402
9.4 Medida de directividad 403
9.5 Medida de impedancia 404
9.6 Medida de la distribución de corriente 405
9.7 Medida de polarización 406
9.8 Medida de la temperatura de antena 408
9.9 Modelos a escala 409

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

9.10 Medidas en campo próximo 409
9.10.1 Formulación del caso plano 411
9.10.2 Campo próximo cilíndrico y esférico 413
9.10.3 Ventajas e inconvenientes de la medida en campo próximo 414
9.11 Cuestiones 415
9.12 Problemas 416

Anexo A Solución de la ecuación de onda. Función de Green 419

Anexo B Directividad de agrupaciones

B.1 Método gráfico 423
B.2 Relación entre alimentación, directividad y diagrama 427

Anexo C Símbolos y constantes físicas 433

Anexo D Operadores vectoriales y transformación de coordenadas 437

Anexo E Funciones 441

Anexo F Respuestas a las cuestiones y a los problemas 443

Bibliografía 456

Índice alfabético de materias 461

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

1
Consideraciones generales sobre antenas

1.1 Introducción

Las primeras manifestaciones de los fenómenos eléctricos y magnéticos se observaron por medio de las fuerzas que actuaban sobre cargas y corrientes, pero esta representación, aunque muy útil, no permite estudiar fácilmente los fenómenos de propagación y radiación de ondas, por lo que es necesario introducir el concepto de campo. Un campo se pone de manifiesto en un punto, o se mide, colocando cargas y corrientes de prueba y observando las fuerzas ejercidas sobre ellas.

Las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctricos y magnéticos con las cargas y corrientes que los crean. La solución general de las ecuaciones, en el caso variable en el tiempo, es en forma de ondas, que pueden estar ligadas a una estructura, como es el caso de una línea de transmisión o guía de ondas, o bien libres en el espacio, como ocurre con las producidas por las antenas.

El *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE) define una *antena* como aquella parte de un sistema transmisor o receptor diseñada específicamente para radiar o recibir ondas electromagnéticas (IEEE Std. 145-1983). Si bien sus formas son muy variadas, todas las antenas tienen en común el ser una región de transición entre una zona donde existe una onda electromagnética guiada y una onda en el espacio libre, a la que puede además asignar un carácter direccional. La representación de la onda guiada se realiza por voltajes y corrientes (hilos conductores y líneas de transmisión) o por campos (guías de ondas); en el espacio libre, mediante campos.

La misión de la antena es radiar la potencia que se le suministra con las características de direccionalidad adecuadas a la aplicación. Por ejemplo, en radiodifusión o comunicaciones móviles se querrá radiar sobre la zona de cobertura de forma omnidireccional, mientras que en radiocomunicaciones fijas interesará que las antenas sean direccionales. En general, cada aplicación impondrá unos requisitos sobre la zona del espacio en la que se desee concentrar la energía. Asimismo, para poder extraer información se ha de ser capaz de captar en algún punto del espacio la onda radiada, absorber energía de esa onda y entregarla al receptor. Existen, pues, dos misiones básicas de una antena: transmitir y recibir, imponiendo cada aplicación condiciones particulares sobre la direccionalidad de la antena, niveles de potencia que debe soportar, frecuencia de trabajo y otros parámetros que definiremos posteriormente. Esta diversidad de situaciones da origen a un gran número de tipos de antenas.

Toda onda se caracteriza por su frecuencia (f) y su longitud de onda (λ), ambas relacionadas por la velocidad de propagación en el medio, que habitualmente en antenas tiene las propiedades del vacío ($c=3\cdot10^8$ m/s), con $c=\lambda f$. El conjunto de todas las frecuencias, o espectro de frecuencias, se divide por

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

décadas en bandas, con la denominación presentada en la tabla 1.1. Cada aplicación tiene asignada por los organismos de normalización unas determinadas porciones de ese espectro.

BANDA	FRECUENCIA	LONG. DE ONDA	DENOMINACIÓN
ELF	<3 kHz	>100 km	Extremely Low Frequency
VLF	3-30 kHz	100-10 km	Very Low Frequency
LF	30-300 kHz	10-1 km	Low Frequency
MF	0,3 -3 MHz	1.000-100 m	Medium Frequency
HF	3-30 MHz	100-10 m	High Frequency
VHF	30-300 MHz	10-1 m	Very High Frequency
UHF	0,3 -3 GHz	100-10 cm	Ultra High Frequency
SHF	3-30 GHz	10-1 cm	Super High Frequency
EHF	30-300 GHz	10-1 mm	Extremely High Frequency

Tabla 1.1 Denominación de las bandas de frecuencias por décadas

A frecuencias de microondas existe una subdivisión acuñada desde los primeros tiempos del radar, recogida en la tabla 1.2, que es ampliamente utilizada en la actualidad.

BANDA	FRECUENCIA	LONG. DE ONDA
L	1-2 GHz	30-15 cm
S	2-4 GHz	15-7,5 cm
C	4-8 GHz	7,5-3,75 cm
X	8-12,4 GHz	3,75-2,42 cm
Ku	12,4-18 GHz	2,42-1,66 cm
K	18-26,5 GHz	1,66-1,11 cm
Ka	26,5-40 GHz	11,1-7,5 mm
mm	40-300 GHz	7,5-1 mm

Tabla 1.2 Denominación habitual de las bandas de frecuencias en microondas

A frecuencias superiores nos encontramos con las ondas electromagnéticas correspondientes al infrarrojo, visible, ultravioleta y rayos X (tabla 1.3).

BANDA	FRECUENCIA	LONG. DE ONDA	DENOMINACIÓN
	300-800 GHz	1-0,4 mm	Región submilimétrica
IR	800 GHz-400 THz	0,4 mm-0,8 micras	Infrarrojo
V	400-750 THz	0,8-0,4 micras	Visible
UV	750-10.000 THz	400-12 nanómetros	Ultravioleta
		120-0,6 amstrong	Rayos X

Tabla 1.3 Denominación de las bandas a frecuencias superiores

Las antenas tienen unas características de impedancia y de radiación que dependen de la frecuencia. El análisis de dichas características se realiza a partir de las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia, utilizando las expresiones de los campos en forma compleja o fasorial. Cada

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

aplicación y cada banda de frecuencias presentan características peculiares que dan origen a unas tipologías de antenas muy diversas. En una forma amplia y no exhaustiva, los tipos más comunes se pueden agrupar en los grandes bloques siguientes:

- *Antenas alámbricas.* Se distinguen por estar construidas con hilos conductores que soportan las corrientes que dan origen a los campos radiados. Pueden estar formadas por hilos rectos (dipolo, V, rómbica), espiras (circular, cuadrada o de cualquier forma arbitraria) y hélices. Este tipo de antenas se caracterizan por corrientes y cargas que varían de forma armónica con el tiempo y con amplitudes que también varían a lo largo de los hilos.

- *Antenas de apertura y reflectores.* En ellas la generación de la onda radiada se consigue a partir de una distribución de campos soportada por la antena y se suelen excitar con guías de ondas. Son antenas de apertura las bocinas (piramidales y cónicas), las aperturas y las ranuras sobre planos conductores, y las bocas de guía. Este tipo de antenas se caracterizan por los campos eléctricos y magnéticos de la apertura, variables armónicamente con el tiempo.
  El empleo de reflectores, asociados a un alimentador primario, permite disponer de antenas con las prestaciones necesarias para servicios de comunicaciones a grandes distancias, tanto terrestres como espaciales. El reflector más común es el parabólico.

- *Agrupaciones de antenas.* En ciertas aplicaciones se requieren características de radiación que no pueden lograrse con un solo elemento; sin embargo, con la combinación de varios de ellos se consigue una gran flexibilidad que permite obtenerlas. Estas agrupaciones pueden realizarse combinando, en principio, cualquier tipo de antena.

1.2 Parámetros de antenas en transmisión

Una antena formará parte de un sistema más amplio, de radiocomunicaciones o radar, por ejemplo. Interesará, por lo tanto, caracterizarla con una serie de parámetros que la describan y permitan evaluar el efecto sobre el sistema de una determinada antena, o bien especificar el comportamiento deseado de una antena para incluirla en ese sistema.

A efectos de definición de los parámetros, conviene diferenciarlos inicialmente según se relacionen con transmisión o recepción; posteriormente, como consecuencia del teorema de reciprocidad, estableceremos la equivalencia entre ambas situaciones.

1.2.1 Impedancia

La antena ha de conectarse a un transmisor y radiar el máximo de potencia posible con un mínimo de pérdidas en ella. La antena y el transmisor han de adaptarse para una máxima transferencia de potencia en el sentido clásico de circuitos. Habitualmente el transmisor se encuentra alejado de la antena y la conexión se hace mediante una línea de transmisión o guía de ondas, que participa también en esa adaptación, debiéndose considerar su impedancia característica, su atenuación y su longitud.

El transmisor produce corrientes y campos que pueden ser medibles en puntos característicos de la antena. En todo el texto los valores de corrientes, tensiones y campos serán eficaces.

A la entrada de la antena puede definirse la *impedancia de entrada* Z_e mediante relaciones tensión-corriente en ese punto. En notación fasorial de régimen permanente sinusoidal poseerá una

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

parte real $R_e(\omega)$ y una imaginaria $X_e(\omega)$, ambas dependientes en general de la frecuencia. Si Z_e no presenta una parte reactiva a una frecuencia, se dice que es una antena resonante. Dado que la antena radia energía, hay una pérdida neta de potencia hacia el espacio debida a radiación, que puede ser asignada a una *resistencia de radiación* R_r, definida como el valor de la resistencia que disiparía óhmicamente la misma potencia que la radiada por la antena.

$$P_{radiada} = I^2 R_r \tag{1.1}$$

Superpuestas a la radiación tendremos las pérdidas que puedan producirse en la antena, habitualmente óhmicas en los conductores, si bien en las antenas de ferrita también se producen pérdidas en el núcleo. La potencia entregada a la antena es la suma de las potencias radiada y de pérdidas en la antena. Todas las pérdidas pueden globalizarse en una *resistencia de pérdidas* R_Ω. La Resistencia de entrada es la suma de la radiación y pérdidas.

$$P_{entregada} = P_{radiada} + P_{perdidas} = I^2 R_r + I^2 R_\Omega \tag{1.2}$$

La impedancia de entrada es un parámetro de gran trascendencia, ya que condiciona las tensiones de los generadores que se deben aplicar para obtener determinados valores de corriente en la antena y, en consecuencia, una determinada potencia radiada. Si la parte reactiva es grande, hay que aplicar tensiones elevadas para obtener corrientes apreciables; si la resistencia de radiación es baja, se requieren elevadas corrientes para tener una potencia radiada importante.

Un ejemplo real puede ser un sistema radiante de radiodifusión de onda media. Para radiar una potencia de 200 kW con una antena de impedancia de entrada 20-j100 Ω, se requiere una corriente de 100 A y un generador de |V|=10.200 V. Si se compensara la parte reactiva mediante una inductancia, la tensión de generador sería de sólo 2.000 V, si bien en ambas reactancias (antena e inductancia) seguirían estando presentes 10.000 V reactivos. Altos valores de corriente producen pérdidas óhmicas importantes y elevados valores de tensión pueden producir fugas y descargas entre diversas partes de la antena o con tierra, planteando problemas de forma y aislamiento.

La existencia de pérdidas en la antena hace que no toda la potencia entregada por el transmisor sea radiada, por lo que se puede definir un rendimiento o *eficiencia de la antena* η_l, mediante la relación entre la potencia radiada y la entregada, o equivalentemente entre la resistencia de entrada de esa antena, si hubiera sido ideal (sin pérdidas), y la que presenta realmente

$$\eta_l = \frac{P_{radiada}}{P_{entregada}} = \frac{R_r}{R_r + R_\Omega} \tag{1.3}$$

1.2.2 Intensidad de radiación

Una de las características fundamentales de una antena es su capacidad para radiar con una cierta direccionalidad, es decir, para concentrar la energía radiada en ciertas direcciones del espacio. Será, por tanto, conveniente cuantificar este comportamiento con algún parámetro que nos permita establecer una comparación entre distintas antenas. Previamente debemos definir el marco de referencia donde está situada la antena que queremos caracterizar; para ello emplearemos un sistema de coordenadas que nos permita definir cómodamente una dirección del espacio.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El sistema de coordenadas utilizado habitualmente en antenas es el esférico. Para especificar una dirección del espacio se utilizan los dos ángulos θ, ϕ. En este sistema de coordenadas (Fig. 1.1) se definen los vectores unitarios $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$, que forman una base ortogonal. La orientación de los vectores se determina mediante la intersección de una esfera de radio r, un cono de ángulo θ y un semiplano que pasa por el eje z.

La onda electromagnética radiada se compone de un campo eléctrico $\vec{E}(\mathrm{V/m})$ y uno magnético $\vec{H}\ (\mathrm{A/m})$; ambos son magnitudes vectoriales y están ligados por las ecuaciones de Maxwell.

A partir de los valores eficaces de los campos se obtiene la densidad de flujo por unidad de superficie mediante

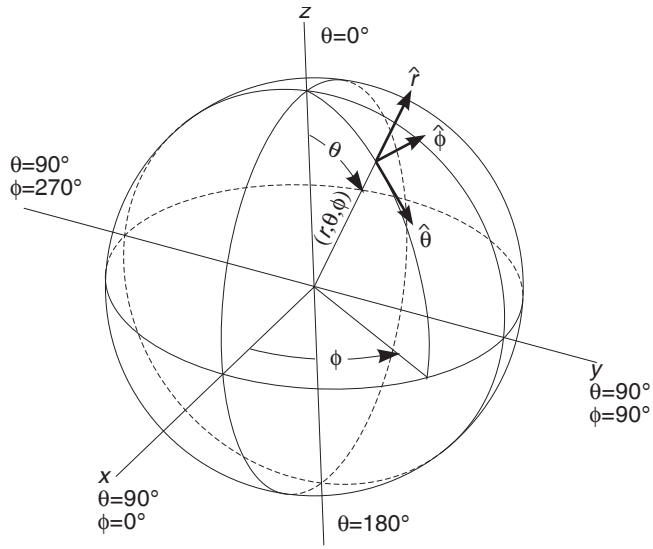


Fig. 1.1 Sistema de coordenadas esférico

$$\vec{\wp}(\theta,\phi) = \mathrm{Re}\,(\vec{E}\times\vec{H}^{*}) \quad \mathrm{W/m^2} \tag{1.4}$$

donde se ha supuesto para los campos una variación temporal armónica y los símbolos *, Re y × denotan el complejo conjugado, la parte real y el producto vectorial.

Para los campos radiados, los módulos del campo eléctrico y del campo magnético están relacionados por la impedancia característica del medio η, que en el vacío vale 120π Ω.

Por lo tanto, la *densidad de potencia radiada* también se puede calcular a partir de las componentes transversales del campo eléctrico

$$\wp(\theta,\phi) = \frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{\eta} \tag{1.5}$$

La potencia total radiada se puede obtener como la integral de la densidad de potencia en una superficie esférica que encierre a la antena

$$P_r = \iint_S \vec{\wp}(\theta,\phi)\cdot d\vec{s} \tag{1.6}$$

La *intensidad de radiación* es la potencia radiada por unidad de ángulo sólido en una determinada dirección; sus unidades son vatios por estereorradián y a grandes distancias tiene la propiedad de ser independiente de la distancia a la que se encuentre la antena.

La relación entre la intensidad de radiación y la densidad de potencia radiada es

$$K(\theta,\phi) = \wp(\theta,\phi)r^2 \tag{1.7}$$

y la potencia total radiada también se puede calcular integrando la intensidad de radiación en todas las direcciones del espacio

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$P_r = \iint_{4\pi} K(\theta,\phi)\, d\Omega \tag{1.8}$$

al ser el diferencial de ángulo sólido en coordenadas esféricas

$$d\Omega = ds / r^2 = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \tag{1.9}$$

1.2.3 Diagrama de Radiación

Un diagrama de radiación es una representación gráfica de las propiedades de radiación de la antena, en función de las distintas direcciones del espacio, a una distancia fija. Normalmente se empleará un sistema de coordenadas esféricas. Con la antena situada en el origen y manteniendo constante la distancia se expresará el campo eléctrico en función de las variables angulares (θ,ϕ). Como el campo es una magnitud vectorial, habrá que determinar en cada punto de la esfera de radio constante el valor de dos componentes ortogonales, habitualmente según $\hat{\theta}$ *y* $\hat{\phi}$.

Como el campo magnético se deriva directamente del eléctrico, la representación podría realizarse a partir de cualquiera de los dos, siendo norma habitual que los diagramas se refieran al campo eléctrico.

La densidad de potencia es proporcional al cuadrado del módulo del campo eléctrico, por lo que la representación gráfica de un diagrama de potencia contiene la misma información que un diagrama de radiación de campo.

En determinadas circunstancias puede ser necesaria la representación gráfica de la fase de E(θ,ϕ), además de la amplitud de las dos componentes. Dicha representación se denomina el diagrama de fase de la antena.

Al observar a gran distancia una antena, se vería su radiación como si proviniera de un punto, es decir, los frentes de onda serían esféricos. A este punto, centro de curvatura de las superficies de fase constante, se le denomina el *centro de fase* de la antena.

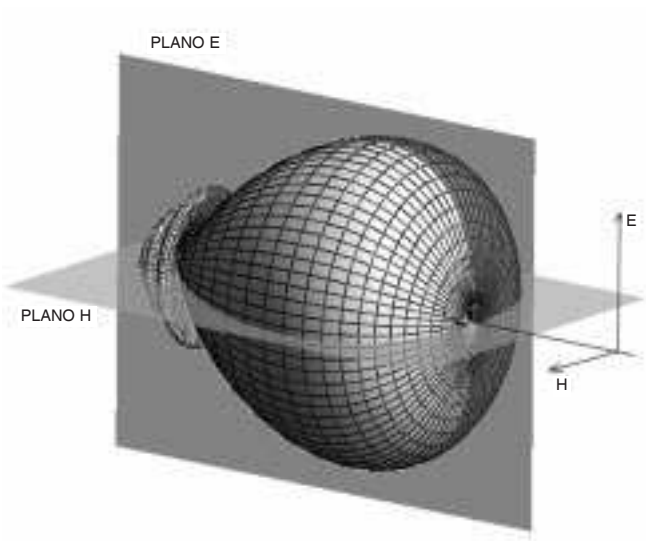


Fig. 1.2 Diagrama de radiación tridimensional

El diagrama de radiación se puede representar en forma tridimensional utilizando técnicas gráficas diversas, como las curvas de nivel o el dibujo en perspectiva. La figura 1.2 muestra el diagrama tridimensional de una antena y los planos E y H. Los niveles se expresan en decibelios respecto al máximo de radiación.

Para antenas linealmente polarizadas se define el *plano E* como el que forman la dirección de máxima radiación y el campo eléctrico en dicha dirección. Análogamente, el *plano H* es el formado por la dirección de máxima radiación y el campo magnético en dicha dirección. Ambos planos son perpendiculares y su intersección determina una línea que define la dirección de máxima radiación de la antena.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si bien la información de la radiación es tridimensional, puede ser de interés, y en muchos casos suficiente, representar un corte del diagrama. Los cortes pueden hacerse de infinitas formas. Los más habituales son los que siguen los meridianos en una hipotética esfera (cortes para ϕ constante) o los paralelos (cortes con θ constante). La información de todos los cortes del diagrama es excesiva, por lo que se recurre a representar dicha información sólo en los planos principales.

Los cortes bidimensionales del diagrama de radiación se pueden representar en coordenadas polares o cartesianas. En el primer caso el ángulo en el diagrama polar representa la dirección del espacio, mientras que el radio representa la intensidad del campo eléctrico o la densidad de potencia radiada. En coordenadas cartesianas se representa el ángulo en abscisas y el campo o la densidad de potencia en ordenadas.

La representación en coordenadas cartesianas permite observar los detalles en antenas muy directivas, mientras que el diagrama polar suministra una información más clara de la distribución de la potencia en las diferentes direcciones del espacio. Las figuras 1.3 y 1.4 muestran ejemplos de ambas representaciones.

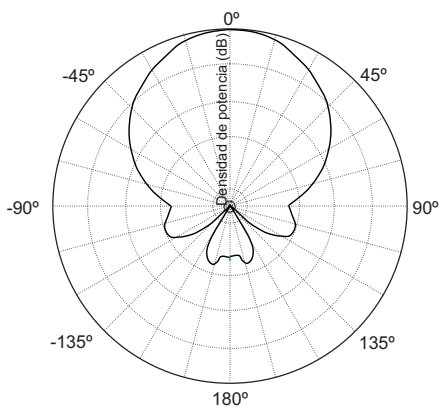


Fig. 1.3 Diagrama de radiación en coordenadas polares

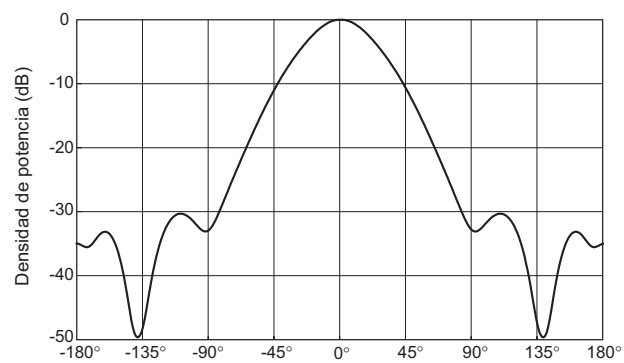


Fig. 1.4 Diagrama de radiación en coordenadas cartesianas

El campo se puede representar de forma absoluta o relativa, normalizando el valor máximo a la unidad. También es bastante habitual la representación del diagrama con la escala en decibelios. El máximo del diagrama de radiación es cero decibelios y en las restantes direcciones del espacio los valores en dB son negativos. Es importante tener en cuenta que los diagramas de campo y de potencia son idénticos cuando la escala está en decibelios.

En un diagrama de radiación típico, como los mostrados en las figuras anteriores, se aprecia una zona en la que la radiación es máxima, a la que se denomina haz *principal* o *lóbulo principal*. Las zonas que rodean a los máximos de menor amplitud se denominan *lóbulos laterales* y al lóbulo lateral de mayor amplitud se denomina *lóbulo secundario*. A continuación se definen una serie de parámetros importantes del diagrama.

El *ancho de haz a -3 dB* ($\Delta\theta_{-3db}$) es la separación angular de las direcciones en las que el diagrama de radiación de potencia toma el valor mitad del máximo. En el diagrama de campo es la excursión angular entre las direcciones en las que el valor del campo ha caído a 0,707 el valor del máximo.

El ancho de haz entre ceros ($\Delta\theta_c$) es la separación angular de las direcciones del espacio en las que el lóbulo principal toma un valor mínimo.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La *relación de lóbulo principal a secundario (NLPS)* es el cociente, expresado en dB, entre el valor del diagrama en la dirección de máxima radiación y en la dirección del máximo del lóbulo secundario. Normalmente, dicha relación se refiere al lóbulo secundario de mayor amplitud, que suele ser adyacente al lóbulo principal.

La relación delante-atrás *(D/A)* es el cociente, también en dB, entre el valor del diagrama en la dirección del máximo y el valor en la dirección diametralmente opuesta.

Si un diagrama de radiación presenta simetría de revolución en torno a un eje se dice que la antena es *omnidireccional*. Toda la información contenida en el diagrama tridimensional puede representarse en un único corte que contenga al eje.

Se denomina antena isótropa a una antena ideal que radie la misma intensidad de radiación en todas las direcciones del espacio. Aunque no existe ninguna antena de estas características, es de gran utilidad para definir los parámetros de la siguiente sección.

Fig. 1.5 Diagramas de radiación isótropo, omnidireccional y directivo.

1.2.4 Directividad

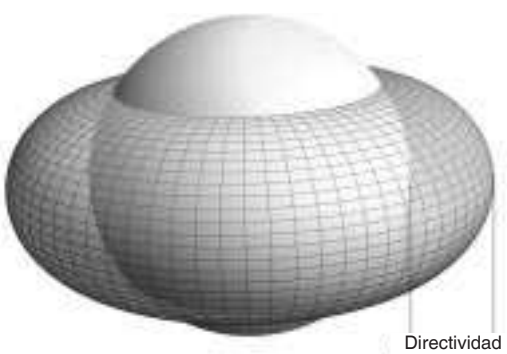


Fig. 1.6 Directividad

La directividad D de una antena se define como la relación entre la densidad de potencia radiada en una dirección, a una distancia dada, y la densidad de potencia que radiaría a esa misma distancia una antena isótropa que radiase la misma potencia que la antena

$$D(\theta,\phi) = \frac{\wp(\theta,\phi)}{P_r / (4\pi r^2)} \qquad (1.10)$$

Si no se especifica la dirección angular, se sobreentiende que la directividad se refiere a la dirección de máxima radiación

$$D = \frac{\wp_{máx}}{P_r / (4\pi r^2)} \qquad (1.11)$$

Ejemplo 1.1 Directividad de un dipolo elemental

Un dipolo eléctricamente pequeño tiene un diagrama de radiación

$$\wp(\theta,\phi) = \wp_{máx} \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (1.12)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

la potencia total radiada se calculará integrando la densidad de potencia en todas las direcciones del espacio

$$P_r = \iint_{4\pi} \wp_{máx} \operatorname{sen}^2\theta \, r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = \wp_{máx} \, r^2 \, 2\pi \frac{4}{3} \tag{1.13}$$

Sustituyendo este valor en la definición de la directividad se obtiene D = 3/2.

La directividad se puede obtener, en general, a partir del conocimiento del diagrama de radiación de la antena. Si se define el diagrama normalizado mediante

$$t(\theta,\phi) = \frac{\wp(\theta,\phi)}{\wp_{máx}} = \frac{K(\theta,\phi)}{K_{máx}} \tag{1.14}$$

la expresión de la directividad puede escribirse en la forma

$$D = \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} t(\theta,\phi)\, d\Omega} = \frac{4\pi}{\Omega_e} \tag{1.15}$$

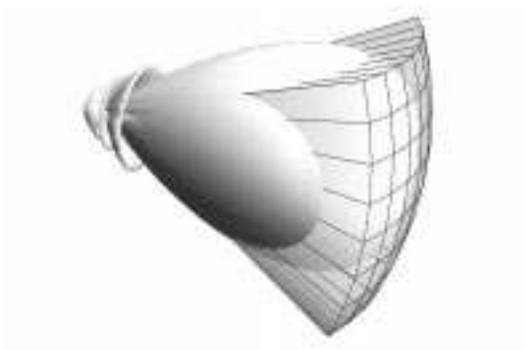


Fig. 1.7 Estimación de la directividad a partir del ángulo sólido equivalente

donde Ω_e se define como el ángulo sólido equivalente.

Para una antena que tuviera un diagrama de radiación uniforme en un cierto ángulo sólido y cero fuera de él, Ω_e en este caso sería igual al ángulo sólido en el que la antena está radiando. Una antena isótropa tiene directividad uno; si radiara uniformemente en un hemisferio, su directividad valdría 2, y si lo hiciera en un octante sería 8.

En antenas directivas, con un sólo lóbulo principal y lóbulos secundarios de valores reducidos, se puede tener una estimación de la directividad considerando que se produce radiación uniforme en un ángulo sólido definido por los anchos de haz a -3 dB en los dos planos principales del diagrama de radiación ($\Delta\theta_1 \cdot \Delta\theta_2$)

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_e} = \frac{4\pi}{\Delta\theta_1 \cdot \Delta\theta_2} \tag{1.16}$$

Si el haz tuviera una extensión angular de 2ºx2º, la directividad valdría aproximadamente 10.000. Como la directividad es una relación de potencias, es habitual expresarla en decibelios, y en este caso tendríamos un valor de 40 dB.

Conocida la directividad máxima D y el diagrama de radiación normalizado t(θ,ϕ), la directividad en cualquier dirección se obtiene directamente del producto de ambos

$$D(\theta,\phi) = D\, t(\theta,\phi) \tag{1.17}$$

Un segundo parámetro directamente relacionado con la directividad es la *ganancia* de la antena G. Su definición es semejante, pero la comparación no se establece con la potencia radiada, sino con la entregada a la antena. Ello permite tener en cuenta las posibles pérdidas en la antena, ya que entonces no toda la potencia entregada es radiada al espacio. La ganancia y la directividad están relacionadas, en consecuencia, por la eficiencia de la antena.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$G(\theta,\phi)=\frac{\wp(\theta,\phi)}{\frac{P_{entregada}}{4\pi r^2}}=\frac{P_{radiada}}{P_{entregada}}\frac{\wp(\theta,\phi)}{\frac{P_{radiada}}{4\pi r^2}}=\eta_l D(\theta,\phi) \tag{1.18}$$

Si la antena no posee pérdidas, cosa habitual a altas frecuencias, ambos parámetros son equivalentes.

1.2.5 Polarización

Hasta ahora hemos analizado la radiación de la antena partiendo de la densidad de potencia o de la intensidad de campo radiado, pero en cada punto del espacio existirá un vector de campo $\vec{E}(\vec{r},t)$, función de la posición y del tiempo. La polarización es una indicación de la orientación del vector de campo en un punto fijo del espacio al transcurrir el tiempo.

La polarización de una antena en una dirección es la de la onda radiada por ella en esa dirección. La polarización de una onda es la figura geométrica descrita, al transcurrir el tiempo, por el extremo del vector campo eléctrico en un punto fijo del espacio en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Para ondas con variación temporal sinusoidal esa figura es en general una elipse, pero hay dos casos particulares de interés: si la figura trazada es un segmento, la onda se denomina linealmente polarizada y si es un círculo, circularmente polarizada.

El sentido de giro del campo eléctrico, tanto en las ondas circularmente polarizadas como en las elípticas, se dice que es a derechas si sigue el convenio de avance en la dirección de propagación, o bien si al alejarse la onda de un observador, éste ve rotar el campo en el sentido de las agujas de un reloj, y a izquierdas si es el sentido contrario.

Se define la relación axial de una onda elípticamente polarizada como la relación entre los ejes mayor y menor de la elipse. Toma valores comprendidos entre uno e infinito.

Los campos, representados en notación compleja o fasorial, permiten determinar la variación temporal a partir de cada una de las componentes ortogonales a la dirección de propagación.

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right] \tag{1.19}$$

Por sencillez, los ejemplos que se citan a continuación se refieren a ondas que se propagan en la dirección del eje z y tienen componentes cartesianas x e y.

Los tres campos siguientes poseen polarizaciones lineales

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \hat{x}\,e^{j(\omega t-kz)}\\ \vec{E} &= 2\hat{y}\,e^{j(\omega t-kz)}\\ \vec{E} &= (\hat{x}+0{,}5\hat{y})\,e^{j(\omega t-kz)}\end{aligned} \tag{1.20}$$

donde k es el número de onda, que vale $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi/\lambda$.

Representan campos con polarización circular, el primero a izquierdas y el segundo a derechas

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (\hat{x}+j\,\hat{y})\,e^{j(\omega t-kz)}\\ \vec{E} &= (\hat{x}-j\,\hat{y})\,e^{j(\omega t-kz)}\end{aligned} \tag{1.21}$$

y finalmente corresponden a polarizaciones elípticas

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{E} = (\hat{x} + j0{,}5\hat{y})\, e^{j(\omega t - kz)}$$
$$\vec{E} = (\hat{x} + (1+j)\,\hat{y})\, e^{j(\omega t - kz)} \qquad (1.22)$$

Obsérvese que se produce una polarización lineal cuando las fases de las dos componentes ortogonales del campo eléctrico son iguales o difieren en un número entero de π radianes. Se produce polarización circular cuando las amplitudes de ambas componentes son iguales y sus fases se diferencian en π/2 o 3π/2 radianes. En los demás casos la polarización es elíptica.

Cualquier onda se puede descomponer en dos polarizaciones lineales ortogonales, sin más que proyectar el campo eléctrico sobre vectores unitarios orientados según esas direcciones. Aplicando el mismo principio, cualquier onda puede descomponerse en dos ondas polarizadas circularmente a izquierdas y derechas. Por ejemplo, una onda polarizada elípticamente de 6 dB de relación axial tendría la forma

$$\vec{E} = (\hat{x} + j0{,}5\,\hat{y})\, e^{j(\omega t - kz)} \qquad (1.23)$$

y puede considerarse como la superposición de dos ondas linealmente polarizadas de amplitudes 1 y 0,5. Los ejes de la elipse de polarización coinciden con los ejes coordenados y la relación axial es 2 (20 log2 = 6 dB). La expresión del campo puede reescribirse como superposición de dos ondas circularmente polarizadas

$$\vec{E} = \left(A\frac{\hat{x} + j\,\hat{y}}{\sqrt{2}} + B\frac{\hat{x} - j\,\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{j(\omega t - kz)} \qquad (1.24)$$

Identificando los coeficientes se obtienen las amplitudes de las ondas y resulta

$$A = 0{,}75\sqrt{2} \qquad B = 0{,}25\sqrt{2} \qquad (1.25)$$

donde predomina la polarización circular a izquierdas.

La radiación de una antena en una polarización especificada se denomina polarización de referencia o copolar, mientras que a la radiación en la polarización ortogonal se la conoce como polarización cruzada o contrapolar ("crosspolar" en inglés). En el ejemplo anterior, si se define el sentido copolar como el circular a izquierdas, la onda elíptica dada contiene también polarización cruzada, campo polarizado circularmente a derechas. El cociente de las potencias contenidas en ambas polarizaciones es una medida de la pureza de polarización y se conoce como la discriminación de polarización cruzada. En este ejemplo vale 20 logA/B = 9,5 dB.

1.2.6 Ancho de banda

Todas las antenas, debido a su geometría finita, están limitadas a operar satisfactoriamente en una banda o margen de frecuencias. Este intervalo de frecuencias, en el que un parámetro de antena determinada no sobrepasa unos límites prefijados, se conoce como el ancho de banda de la antena.

El ancho de banda (BW) se puede especificar como la relación entre el margen de frecuencias en que se cumplen las especificaciones y la frecuencia central. Dicha relación se suele expresar en forma de porcentaje.

$$BW = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_o} \qquad (1.26)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En antenas de banda ancha se suele especificar en la forma

$$BW = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} : 1 \tag{1.27}$$

El ancho de banda de la antena lo impondrá el sistema del que forme parte y afectará al parámetro más sensible o crítico de la aplicación. Para su especificación los parámetros pueden dividirse en dos grupos, según se relacionen con el diagrama o con la impedancia. En el primero de ellos tendremos la directividad, la pureza de polarización, el ancho de haz, el nivel de lóbulo principal a secundario y la dirección de máxima radiación. En el segundo, la impedancia de la antena, el coeficiente de reflexión y la relación de onda estacionaria.

El coeficiente de reflexión de la antena respecto a la línea de transmisión o generador es

$$\rho = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} \tag{1.28}$$

La relación de onda estacionaria se puede calcular a partir del coeficiente de reflexión

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \tag{1.29}$$

Las antenas de banda estrecha se pueden modelar con un circuito resonante serie, con una expresión de la impedancia de entrada de la forma

$$Z_a = R_a + jX_a = R_a\left(1 + jQv\right) \tag{1.30}$$

Q es el factor de calidad del circuito y

$$v = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \tag{1.31}$$

Si se especifica como ancho de banda el margen de frecuencias donde la relación de onda estacionaria es menor que un determinado valor S, a partir de las ecuaciones anteriores se puede deducir que

$$BW = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{\left(\frac{Z_0}{R_a}S - 1\right)\left(S - \frac{Z_0}{R_a}\right)}{S}} \tag{1.32}$$

Cuando la resistencia de la antena coincide con la impedancia característica de la línea de transmisión, el ancho de banda se puede expresar como

$$BW = \frac{1}{Q}\frac{S-1}{\sqrt{S}} \tag{1.33}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

1.3 Parámetros de antenas en recepción

Una antena capta de una onda incidente sobre ella parte de la potencia que transporta y la transfiere al receptor. La antena actúa como un sensor e interacciona con la onda y con el receptor, dando origen a una familia de parámetros asociados con la conexión circuital a éste y a otra vinculada a la interacción electromagnética con la onda incidente.

1.3.1 Adaptación

La impedancia de una antena receptora es la misma que la impedancia de dicha antena actuando como transmisora.

En recepción, la antena se conecta a una línea de transmisión o bien directamente a un receptor. Para que haya máxima transferencia de potencia, la impedancia de la antena $Z_a = R_a + jX_a$ y la impedancia de carga $Z_L = R_L + jX_L$ deben ser complejas conjugadas $Z_L = Z_a^*$. En este caso

$$P_{L\max} = \frac{|V_{ca}|^2}{4R_a} \tag{1.34}$$

En general si no hay adaptación tendremos

$$P_L = P_{L\max} C_a = P_{L\max} (1 - |\rho|^2) \tag{1.35}$$

Donde C_a es el coeficiente de desadaptación, que se puede calcular a partir (1.35) y (1.28)

$$C_a = \frac{4R_a R_L}{(R_a + R_L)^2 + (X_a + X_L)^2} \tag{1.36}$$

1.3.2 Área y longitud efectiva

La antena extrae potencia del frente de onda incidente, por lo que presenta una cierta área de captación o área efectiva A_{ef}, definida como la relación entre la potencia que entrega la antena a su carga (supuesta para esta definición sin pérdidas y adaptada a la carga) y la densidad de potencia de la onda incidente

$$A_{ef} = \frac{P_L}{\wp} \tag{1.37}$$

que representa físicamente la porción del frente de onda que la antena ha de interceptar y drenar de él toda la potencia contenida hacia la carga.

La definición anterior lleva implícita la dependencia del área efectiva con la impedancia de carga, la adaptación y la polarización de la onda. Si sustituimos (1.34) en (1.37) y tenemos en cuenta que $\wp = |E|^2 / \eta$, resulta

$$A_{ef} = \frac{|V_{ca}|^2}{4R_a \wp} = \frac{|V_{ca}|^2 \eta}{|E|^2 4R_a} = \frac{\ell_{ef}^2 \eta}{4R_a} \tag{1.38}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde se ha introducido un nuevo parámetro, la *longitud efectiva* ℓ_{ef}, mediante la relación entre la tensión inducida en circuito abierto en bornes de la antena y la intensidad del campo incidente en la onda

$$\ell_{ef} = \frac{|V_{ca}|}{|E|} \tag{1.39}$$

De nuevo esta definición lleva implícita una dependencia con la polarización de la onda. La longitud y el área efectiva están definidas a partir de magnitudes eléctricas y no coinciden necesariamente con las dimensiones reales de las antenas, si bien en algunos tipos de ellas guardan una relación directa. El área y la longitud efectiva se han definido para la dirección en la que la antena receptora capta máxima señal. El área efectiva dependerá de la dirección angular en la que incidan las ondas, de una forma similar a la directividad

$$A_{ef}(\theta,\phi) = A_{ef}t(\theta,\phi) \tag{1.40}$$

La longitud efectiva también variará proporcionalmente al diagrama de radiación del campo.

$$l_{ef}(\theta,\phi) = l_{ef}\sqrt{t(\theta,\phi)} \tag{1.41}$$

1.4 Ecuación de transmisión

En un sistema de comunicaciones ha de establecerse el balance de potencia entre el transmisor y el receptor, ya que el mínimo nivel de señal detectable en este último fija la potencia mínima que ha de suministrar el primero.

Si la antena transmisora radiara isótropamente una potencia P_r, estaríamos enviando señal por igual en todas las direcciones del espacio. Si consideramos inicialmente que el medio donde se propaga la onda no posee pérdidas, no se producirá absorción de energía en él y la potencia que atraviesa cualquier superficie esférica centrada en la antena será constante. La densidad de potencia será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r a la antena y vendrá dada por

$$\wp = \frac{P_r}{4\pi r^2} \tag{1.42}$$

Una implicación importante de esta ley es que al doblar la distancia la densidad de potencia se reduce a la cuarta parte o en 6 dB. Si estamos muy alejados de la antena, la pérdida por kilómetro puede resultar muy reducida, a diferencia de las líneas de transmisión donde es una magnitud constante por kilómetro. Este es un fenómeno bien conocido; tanto en antenas como en fuentes sonoras, el decaimiento de la señal por unidad de longitud es rápido en la vecindad del foco y lento en la lejanía.

Como la densidad de potencia es proporcional al cuadrado de la intensidad de campo, tenemos también que los campos radiados por antenas decrecerán inversamente con la distancia.

Las antenas no son en la realidad isótropas, concentran energía en ciertas direcciones. La densidad de potencia en este caso se obtendrá multiplicando la que habría producido una antena isótropa por la directividad, con lo que resultará

$$\wp(\theta,\phi) = \frac{P_r}{4\pi r^2} D(\theta,\phi) = \frac{P_e}{4\pi r^2} G(\theta,\phi) \tag{1.43}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Al producto de la potencia radiada por una antena por la directividad, o de la potencia entregada por la ganancia, se le denomina potencia isótropa radiada equivalente, PIRE, y suele expresarse en dBW (decibelios sobre una potencia de referencia de 1 W)

$$PIRE = P_r D = P_e G \tag{1.44}$$

Para dos antenas separadas una distancia r, conectadas a sus correspondientes transmisor y receptor, como se indica en la figura 1.8, la ecuación de transmisión de Friis establece la relación entre la potencia recibida y la radiada.

La potencia que la antena receptora entregará a su carga adaptada vale

$$P_L = \frac{P_r}{4\pi r^2} D_T A_{efR} \tag{1.45}$$

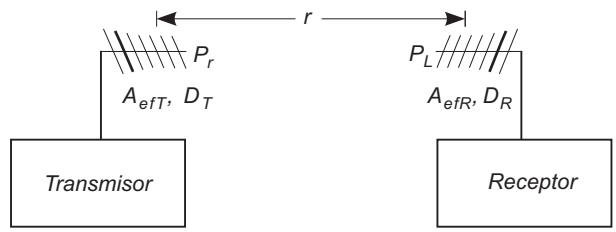


Fig. 1.8 Balance de potencia entre dos antenas

La relación entre la potencia recibida y la radiada se denomina pérdida de transmisión entre las antenas, y se acostumbra a indicar en decibelios.

Por ejemplo, si se radia una potencia de 1 kW con una antena de directividad 3 dB y se recibe a una distancia de 10 km con una antena de 1 m^2 de área efectiva, si no se consideran las pérdidas ni las desadaptaciones, de la expresión (1.45) resulta una potencia recibida de valor $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ vatios y una pérdida de transmisión de 88 dB.

Si las antenas no estuvieran adaptadas habría que introducir en esta expresión los coeficientes de desadaptación C_a del transmisor y del receptor. Si el medio de propagación introduce pérdidas, habrá que contabilizarlas mediante un factor multiplicativo C_m de pérdidas en el medio. Asimismo, habrá que tener en cuenta que la potencia captada dependerá no sólo de la densidad de potencia incidente, sino también de la polarización de la onda, por lo que aparecerá un coeficiente de polarización C_p.

Este coeficiente de desacoplo de polarización se define como la relación entre la potencia recibida por la antena cuando incide sobre ella una onda plana de polarización conocida y la que recibiría la misma antena al incidir sobre ella una onda plana con la misma dirección de propagación y densidad de potencia, pero cuyo estado de polarización sea tal que se maximice la potencia recibida (adaptación de polarización). Tal y como se demuestra en la sección 3.6.3, vale el cuadrado del módulo del producto escalar del vector de polarización $\hat{e}_t$ que define la polarización de la antena y el vector $\hat{e}_r$ de la onda recibida

$$C_p = \left|\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r\right|^2 \tag{1.46}$$

Así, por ejemplo, una antena polarizada circularmente a derechas, situada en el plano *xy*, con máximo de radiación en la dirección del eje *z* positivo, está caracterizada por un vector unitario de polarización en esa dirección

$$\hat{e}_t = \frac{\hat{x} - j\,\hat{y}}{\sqrt{2}} \tag{1.47}$$

Si sobre esta antena incide una onda plana polarizada circularmente a derechas (sentido de propagación según *z* decrecientes), es decir, con un vector unitario de polarización

$$\hat{e}_r = \frac{\hat{x} + j\,\hat{y}}{\sqrt{2}} \tag{1.48}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

se obtiene un coeficiente de desacoplo C_p=1, y se dice en este caso que existe adaptación de polarización.

Por el contrario, si la onda recibida está polarizada circularmente a izquierdas

$$\hat{e}_r = \frac{\hat{x} - j\,\hat{y}}{\sqrt{2}} \tag{1.49}$$

se tiene una desadaptación total, C_p= 0, resultante de la ortogonalidad de ambas polarizaciones.

Finalmente, si incide una onda linealmente polarizada

$$\hat{e}_r = \hat{x} \tag{1.50}$$

se obtiene un valor C_p= 1/2 o una "pérdida" por desadaptación de polarización de 3 dB. En este caso la antena sólo interacciona con una de las dos componentes ortogonales de polarización en que puede descomponerse la onda incidente y puede decirse que sólo ve la mitad de la densidad de potencia transportada por la onda.

Para caracterizar la polarización de una antena se utiliza su respuesta a una onda incidente linealmente polarizada, cuya dirección de polarización rota alrededor de la dirección de propagación. La representación de la respuesta de la antena en función de ese ángulo de rotación recibe el nombre de diagrama de polarización. Un esquema de medida de este diagrama y su forma para el caso de una antena linealmente polarizada se representa en la figura 1.9.

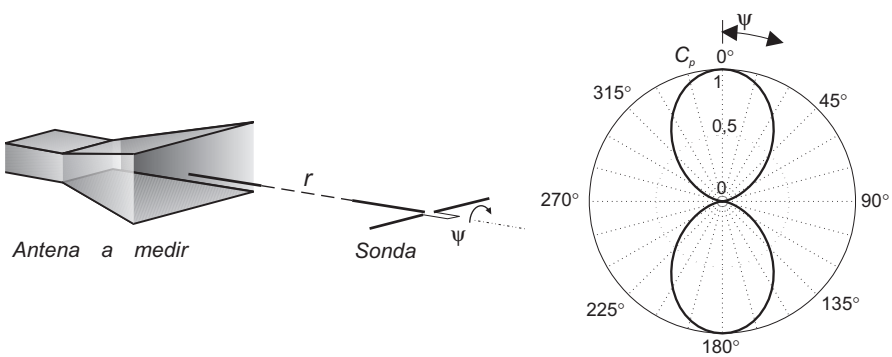


Fig. 1.9 Esquema de medida del diagrama de polarización (izquierda) y su representación (derecha)

Existe una relación entre la directividad y el área efectiva de cualquier antena, que se demostrará posteriormente en la sección 3.6.2, y que permite reescribir la ecuación (1.45) en términos de la directividad que tendría la antena receptora si actuara como transmisora

$$\frac{A_{ef}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\,\pi} \tag{1.51}$$

resultando entonces

$$\frac{P_L}{P_r} = \left(\frac{\lambda}{4\,\pi r}\right)^2 D_T\; D_R \tag{1.52}$$

El término $(\lambda/4\pi r)^2$ se denomina pérdida de transmisión en el espacio libre L_0 y se corresponde con la pérdida de transmisión entre antenas isótropas. Toma, en decibelios, un valor

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$L_o = 20\log\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right) = 22 + 20\log\left(\frac{r}{\lambda}\right) = 32{,}5 + 20\log f_{(\mathrm{MHz})} + 20\log r_{(\mathrm{km})} \qquad (1.53)$$

En general se tiene

$$\frac{P_L}{P_r} = -L_o + D_T + D_R - L \quad (\mathrm{dB}) \qquad (1.54)$$

donde todos los términos han de calcularse en decibelios y L engloba todos los factores de desadaptación en las antenas y las pérdidas.

Desde el punto de vista del cómputo del balance de potencia en sistemas de comunicaciones, es conveniente referir la potencia recibida, P_R, a la potencia transmitida, P_T, entendida en este caso como la entregada a la antena. La ecuación de transmisión resultante se escribe en términos de las ganancias de las antenas y en el factor de pérdidas L' no se han de contabilizar las pérdidas en las antenas, por estar ya incluidas en las ganancias

$$\frac{P_R}{P_T} = -L_o + G_T + G_R - L' \quad (\mathrm{dB}) \qquad (1.55)$$

1.4.1 Ecuación del radar

Un caso particular de ecuación de transmisión es el cálculo de la potencia reflejada por un blanco que capta una antena de radar. En el caso de un radar biestático, aquel en que el receptor está situado en una posición distinta a la del transmisor, se tiene la situación esquematizada en la figura 1.10.

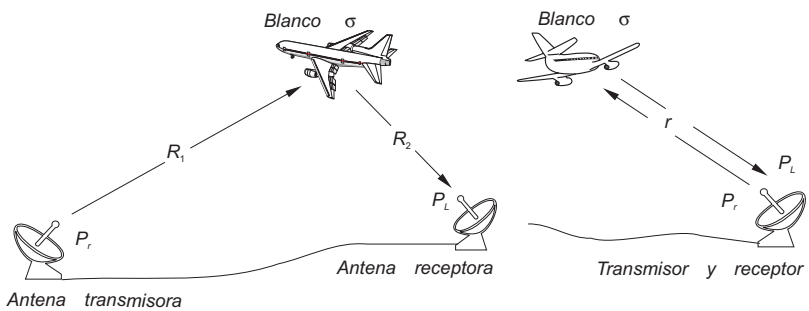


Fig. 1.10 Esquema de un radar biestático (izquierda) y monoestático (derecha)

Sobre el blanco, situado a una distancia R_1 del transmisor, incide una onda. La potencia captada por el blanco es

$$P_{blanco} = \frac{P_r}{4\pi R_1^2} D_T A_{blanco} \qquad (1.56)$$

Dicha potencia se rerradia hacia el receptor, que está separado una distancia R_2 del blanco. La potencia captada será

$$P_L = P_{blanco} D_{blanco} \frac{1}{4\pi R_2^2} A_{efR} \qquad (1.57)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Se define la sección recta radar σ como el producto de los parámetros en recepción y transmisión del blanco. Es un parámetro que depende de los ángulos de incidencia y transmisión y que tiene dimensiones de área

$$\sigma = A_{blanco} D_{blanco} \tag{1.58}$$

Con lo que la ecuación del radar resultará

$$\frac{P_L}{P_r} = \frac{\sigma D_T D_R}{4\pi} \left[\frac{\lambda}{4\pi R_1 R_2} \right]^2 \tag{1.59}$$

En el caso monoestático la antena receptora es la misma que la transmisora y $R_1 = R_2 = r$, y resulta

$$\frac{P_L}{P_r} = \frac{\sigma D^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \tag{1.60}$$

Donde se aprecia para el alcance de un radar una dependencia con la cuarta potencia de la distancia al blanco. En un radar es necesario emitir altas potencias, y tener una gran sensibilidad en el receptor. Dicho receptor puede ser cegado por una señal de alta potencia, distinta de la transmitida.

La sección recta de un blanco depende de su forma y de sus dimensiones. Una esfera tiene una sección recta radar que coincide con el área de un corte diametral, dado que radia por igual en todas las direcciones.

$$\sigma_{esfera} = A_{esfera} D_{esfera} = \pi a^2 \tag{1.61}$$

Una placa plana tiene una sección recta que es máxima en la dirección de la reflexión especular, la potencia captada es proporcional al área, y la rerradiación es directiva

$$\sigma_{placa} = A_{placa} D_{placa} = A_{placa} \left(A_{placa} \frac{4\pi}{\lambda^2} \right) \tag{1.62}$$

La sección recta de un blanco complejo, como puede ser un avión, un barco, un automóvil o un edificio, presenta una complicada dependencia con la frecuencia, la forma, la orientación o el material de que está construido. A título orientativo, a frecuencias de microondas (banda X) una avioneta puede poseer una sección recta del orden de 1 m^2, un automóvil de unos 100 m^2, un jumbo 10.000 m^2 y un mercante de gran tonelaje 1.000.000 m^2. En el otro extremo, un hombre presenta una sección recta de 1 m^2, un pájaro 0,01 m^2 y un insecto 0,00001 m^2.

1.5 Temperatura de ruido de antena

Una antena recibe, además de señal, ruido. A la potencia de ruido disponible en los terminales de una antena receptora se le asocia una temperatura de ruido de la antena T_a, entendida como la temperatura a la que tendría que estar una resistencia para producir una potencia de ruido igual, es decir

$$P_N = \frac{V_N^2}{4R} = k T_a B \tag{1.63}$$

donde P_N es la potencia de ruido disponible en bornes de la antena, B el ancho de banda, $k=1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann, R la resistencia y V_N la tensión (rms) en circuito abierto.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si la antena no tiene pérdidas óhmicas, toda la potencia de ruido proviene de fuentes externas en forma de radiación incidente de todas las direcciones del espacio, que es captada por la antena y transferida al receptor. Si nos encontrásemos en un ambiente externo que se comportase como un cuerpo negro uniforme de temperatura T, la potencia de ruido entregada por la antena a su carga adaptada vendría dada por la ley de Rayleigh-Jeans o, equivalentemente, por la relación de Nyquist $P_N = kTB$.

En general la antena no se encuentra en un ambiente uniforme, por lo que la potencia de ruido incidente por unidad de ángulo sólido en cada dirección del espacio, $K_N(\theta,\phi)$, no es constante y se puede asociar una *temperatura de brillo* $T(\theta,\phi)$ a la fuente o al ruido incidente en una dirección.

La potencia total de ruido recibida será la suma de las intensidades de ruido incidentes ponderadas por la respuesta de la antena a cada dirección, es decir, por el área efectiva $A_{ef}(\theta,\phi)$. La temperatura de antena valdrá en general

$$T_a = \frac{\iint_{4\pi} T(\theta,\phi)\, A_{ef}(\theta,\phi)\, d\Omega}{\iint_{4\pi} A_{ef}(\theta,\phi)\, d\Omega} \tag{1.64}$$

Utilizando la relación (1.51) entre directividad y área efectiva, esta expresión también puede escribirse en función de la directividad $D(\theta,\phi)$ de la antena si actuase como transmisora. A partir de la definición de directividad se obtiene inmediatamente que para cualquier antena

$$\iint_{4\pi} D(\theta,\phi)\, d\Omega = 4\pi \qquad \iint_{4\pi} A_{ef}(\theta,\phi)\, d\Omega = \lambda^2 \tag{1.65}$$

por lo que la temperatura de antena puede obtenerse mediante cualquiera de las integrales siguientes sobre las fuentes

$$T_a = \frac{1}{4\pi}\iint_{4\pi} T(\Omega) D(\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{\lambda^2}\iint_{4\pi} T(\Omega) A_{ef}(\Omega)\, d\Omega \tag{1.66}$$

Se comprueba que si la antena está en un ambiente uniforme $T(\theta,\phi) = T$ la temperatura de antena toma este valor independientemente de la forma del diagrama de radiación. En el capítulo 2 se comentan las fuentes de ruido y los valores de temperatura de brillo más característicos, un compendio de los cuales se ha recogido en la figura 1.11.

La relación señal-ruido (S/N) de una antena receptora es el cociente entre las potencias de señal y de ruido recibidas, expresado habitualmente en decibelios. En el caso ideal de antenas y medios sin pérdidas y sin desadaptaciones resulta

$$S/N = \frac{P_L}{P_N} = \frac{P_r\, D_T\, A_{efR}}{4\pi r^2\, k\, T_a\, B} \tag{1.67}$$

La sensibilidad de un receptor es la relación señal-ruido mínima para que el sistema funcione correctamente y condiciona el máximo alcance de la comunicación

$$r_{máx} = \left(\frac{P_r\, D_T\, A_{efR}}{4\pi\, k\, T_a\, B (S/N)_{mín}} \right)^{1/2} \tag{1.68}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

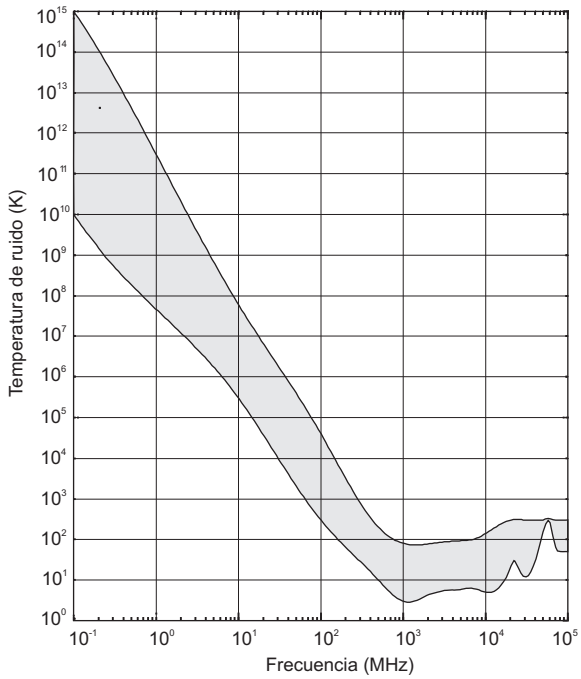


Fig. 1.11 Valores típicos de temperatura de antena

En el caso de un radar las ecuaciones son similares con la señal decreciendo con la cuarta potencia de la distancia y el alcance según la raíz cuarta.

Si la antena posee pérdidas, no entrega a su carga toda la potencia de ruido disponible, la potencia que entregaría a su carga adaptada la misma antena fabricada con materiales sin pérdidas. En este caso la potencia de ruido valdrá $kT_aB\eta_l$. Ahora bien, si la antena se encuentra a una temperatura ambiente T_{amb}, la resistencia de pérdidas de la antena añadirá una potencia de ruido térmico $kT_{amb}B(1-\eta_l)$, y resultará una potencia total de ruido

$$P_N = k\,T_a\,B\,\eta_l + k\,T_{amb}\,B(1-\eta_l) \quad (1.69)$$

Comparando la relación señal-ruido para esta antena con el caso sin pérdidas $(S/N)_o = S_a/kT_aB$, resulta

$$S/N = (S/N)_o \frac{1}{1+\frac{T_{amb}}{T_a}\frac{1-\eta_l}{\eta_l}} \quad (1.70)$$

o un empeoramiento de $10 \log \left(1+\frac{T_{amb}}{T_a}\frac{R_\Omega}{R_r}\right)$ dB.

Si T_a es menor o aproximadamente igual a T_{amb} la eficiencia de antena ha de ser muy próxima a uno para no tener un empeoramiento apreciable de S/N. Por el contrario, si T_a es mucho mayor que T_{amb} la antena puede ser poco eficiente y no empeorar la S/N; esto es lo que sucede en radiodifusión en ondas medias, donde valores de T_a superiores al millón de grados kelvin son habituales y las antenas de ferrita poseen baja eficiencia.

El efecto de las pérdidas en la línea de transmisión que une la antena al receptor es exactamente el mismo que las pérdidas de la antena, y las expresiones serán semejantes sustituyendo la eficiencia de la antena por la de la línea. El receptor se caracteriza por un factor de ruido F y su temperatura equivalente T_e, relacionados mediante

$$F = 1+\frac{T_e}{T_0} \quad (1.71)$$

donde $T_0 = 290$ K es la temperatura de referencia. El factor de ruido es el empeoramiento en la relación señal-ruido si la temperatura de ruido a la entrada es T_0, situación habitual en circuitos pero que no ocurre en antenas, donde T_a es prácticamente siempre diferente a la temperatura de referencia.

Las desadaptaciones de impedancia se analizan calculando a partir de las potencias de señal y ruido disponibles las potencias realmente transferidas.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Ejemplo 1.2 Una onda de E_i = 19μV/m y frecuencia 2 GHz, incide sobre una antena de directividad D = 20 dB y eficiencia η_l = 0,9. La temperatura de ruido de antena es T_a = 200 K, la temperatura ambiente T_{amb} = 300 K y el ancho de banda B=10 MHz. La antena lleva incorporado un preamplificador de ganancia G_p = 20 dB y factor de ruido F_p = 6 dB, al que sigue una línea de transmisión con pérdidas de L = 3 dB y un amplificador de ganancia G_a = 23 dB y factor de ruido F_a = 10 dB. Se obtiene a continuación la potencia de la señal y del ruido, y la relación señal-ruido a la salida del amplificador.
La señal vendrá dada por la ecuación de transmisión y la ganancia total en la cadena de cuadripolos de recepción, con lo que resultará

$$S = \wp A_{ef}\, \eta_l\, G_p \frac{1}{L} G_a = 1{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{W} = -58\ \text{dBm}$$

El ruido en bornes de la antena valdrá

$$N_a = k T_a B \eta_l + k T_{amb} B (1-\eta_l) = 2{,}9 \cdot 10^{-14}\ \text{W}$$

y le corresponderá una temperatura equivalente

$$T_a \eta_l + T_{amb} (1-\eta_l) = 210\ \text{K}$$

A la salida del preamplificador el ruido valdrá

$$N_p = \left[N_a + kT_0 \left(F_p - 1\right) B \right] G_p = 1{,}5 \cdot 10^{-11}\ \text{W}$$

y a la salida de la línea

$$N_L = N_p \frac{1}{L} + k T_{amb} \left(1 - \frac{1}{L}\right) B = 7{,}4 \cdot 10^{-12}\ \text{W}$$

Finalmente, el ruido a la salida del amplificador valdrá

$$N = \left[N_L + k T_0 \left(F_a - 1\right) B\right] G_a = 1{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{W} = -58\ \text{dBm}$$

que corresponde a una temperatura equivalente de ruido a la entrada (antena) de 1.250 K. La potencia de señal y de ruido a la salida son iguales, lo que significa una relación señal-ruido S/N=0 dB.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

1.1 Un dipolo, eléctricamente pequeño, radia a grandes distancias un campo de la forma $\vec{E}(\theta,\phi) = \hat{\theta}\, E_0 \operatorname{sen}\theta$. ¿Cuánto vale el ancho de haz a -3 dB en el plano E del diagrama de radiación?

a) 30º b) 45º c) 60º d) 90º

1.2 El diagrama de radiación de una antena es uniforme en el sector angular $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ y fuera, cero. La directividad valdrá:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16

1.3 Una antena tiene un ancho de haz a -3 dB de 2º en el plano H y de 1º en el plano E. Su directividad será, aproximadamente:

a) 43 dB b) 23 dB c) 86 dB d) 15 dB

1.4 ¿Qué directividad debe tener la antena de un satélite, en órbita geoestacionaria a 36.000 km, para que el haz principal (a -3 dB) cubra toda la tierra?

a) 21 dB b) 28 dB c) 35 dB d) 42 dB

1.5 En una antena, cuya impedancia de entrada se sabe que es resistiva, se mide una relación de onda estacionaria S=2 al conectarla a un cable de 50 Ω, ¿cuánto valdrá la resistencia de la antena?

a) 50 o 200 Ω b) 25 o 100 Ω c) 35 o 125 Ω d) 48 o 52 Ω

1.6 Una antena de 75 Ω se conecta a un receptor de 50 Ω. ¿Cuánto valdrá el coeficiente de desadaptación?

a) 1 b) 0,96 c) 0,66 d) 0,33

1.7 Un dipolo resonante, que tiene una resistencia de radiación de 73 Ω y una eficiencia óhmica de 0,8, se conecta a un amplificador de impedancia de entrada 50 Ω. El coeficiente de desadaptación valdrá:

a) 0,97 b) 0,93 c) 0,91 d) 0,5

1.8 Un paraboloide de 41,5 dB de directividad presenta, a λ = 3 cm, un área efectiva:

a) 0,5 m^2 b) 0,75 m^2 c) 1 m^2 d) 1,25 m^2

1.9 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es válida para cualquier antena?

a) La directividad es independiente de la frecuencia.
b) El área efectiva es independiente de la frecuencia.
c) La relación directividad-área efectiva es independiente de la frecuencia.
d) No es cierta ninguna de las afirmaciones anteriores.

1.10 Un satélite con PIRE=10 dBW, situado en órbita geoestacionaria, produce sobre tierra un campo incidente cuya amplitud en μV/m es:

a) 0,48 b) 1,52 c) 0,02 d) 0,15

1.11 Sobre un reflector parabólico de 40 dB de ganancia incide una onda con una densidad de potencia de -100 dBW/m^2 a 10 GHz. ¿Cuánto vale la potencia máxima transferida al receptor?

a) -101,5 dBW b) -100 dBW c) -98 dBW d) -97 dBW

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

1.12 La relación axial de una onda elípticamente polarizada es 2 dB. ¿Cuál será la diferencia de señal recibida por dos antenas de igual ganancia, polarizadas circularmente a izquierdas y derechas?

a) 3 dB b) 6,4 dB c) 18,8 dB d) 24,8 dB

1.13 El campo incidente en una antena Yagi de 15 dB de directividad es de 1 mV/m a 500 MHz. La tensión en bornes de una carga adaptada de 75 Ω es:

a) 0,85 mV b) 0,42 mV c) 1,7 mV d) 1,4 V

1.14 ¿Cuál es la pérdida de transmisión en un vano de un radioenlace de 50 km, que funciona a 2 GHz, si la ganancia de la antena transmisora es 25 dB y la de la receptora 20 dB?

a) 21 dB b) 47 dB c) 61 dB d) 87 dB

1.15 Un radioenlace en banda X, f = 10 GHz, utiliza dos antenas de 30 dB de ganancia. La potencia transmitida es 1 W y la sensibilidad del receptor -50 dBm. El alcance máximo es:

a) 6 km b) 12 km c) 23,9 km d) 47,8 km

1.16 La señal reflejada por un blanco pasivo de radar al doblar la distancia disminuye en:

a) 3 dB b) 6 dB c) 12 dB d) 18 dB

1.17 En un enlace entre dos puntos en el espacio libre la relación S/N es 20 dB. Si el umbral de detección precisa de $S/N_{mín}$ = 17 dB, la distancia podrá aumentarse en un factor:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4

1.18 La temperatura de ruido del cielo es 10 K y la de la tierra 290 K. El máximo del diagrama de radiación de una antena, que posee una directividad de 35 dB, se orienta a 20º de elevación. La temperatura de antena será:

a) T_a<10 K b) 10 K<T_a<150 K
c) 150 K<T_a<290 K d) 290 K<T_a

1.19 La temperatura de ruido de una antena es 150 K. Si se conecta a un receptor mediante una sección de guía de ondas rectangular de 10 m de longitud, que presenta una atenuación de 0,13 dB/m y se encuentra a una temperatura ambiente de 300 K, la temperatura de ruido a la entrada del receptor será:

a) 150 K b) 189 K c) 300 K d) 450 K

1.20 Una antena sin pérdidas, cuya temperatura de ruido es 100 K, se conecta a un amplificador de 3 dB de factor de ruido. ¿Cuál es el empeoramiento de la relación señal-ruido debido al amplificador?

a) 1 dB b) 2 dB c) 3 dB d) 5,9 dB

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

1.1 Una antena radia un campo de la forma sen (6π cos θ) / (6π cos θ). Representar el diagrama de radiación en el intervalo angular $0 \leq \theta \leq \pi$, tanto en escala lineal como en decibelios. ¿Cuánto vale el ancho de haz a -3 dB y la relación de lóbulo principal a secundario?

1.2 El diagrama de radiación normalizado de una antena es de la forma $t(\theta,\phi) = \cos^n \theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $t(\theta,\phi) = 0$ para $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

a) Obtener la directividad de la antena.

b) Representar el diagrama de radiación para $n = 1$ y para $n = 2$, en coordenadas polares. A partir del ancho de haz obtener un valor aproximado de la directividad y compararlo con el valor exacto obtenido en el apartado anterior.

1.3 Una emisora de Frecuencia Modulada (FM) emite a 95,5 MHz y radia una potencia de 1 kW con un sistema radiante que posee un diagrama de radiación omnidireccional en el plano horizontal y una directividad de 10 dB. A una distancia de 10 km y con visibilidad directa de la antena emisora se sitúa un receptor conectado a una antena de tipo dipolo que presenta una impedancia de 75 Ω y una longitud efectiva de 1m. Obtener la intensidad de campo eléctrico en la antena receptora, la tensión inducida en ella y la potencia que se transferiría a un receptor adaptado.

1.4 Calcular la potencia recibida y la relación señal-ruido en un radioenlace que funciona a 11,2 GHz con un ancho de banda de 60 MHz. La longitud del vano es de 45 km, las antenas poseen una directividad de 45 dB y las pérdidas asociadas a cada una de las antenas y a las guías de ondas que las unen con el transmisor y el receptor son de 6 dB en cada extremo. La potencia del transmisor es 10 W y el factor de ruido total del receptor es de 8 dB, la temperatura de antena es de 100 K y la temperatura ambiente es de 300 K.

1.5 Un radar de tráfico funciona a la frecuencia de 10,55 GHz y radia una potencia de 50 mW con una antena de 20 dB de directividad. El transmisor genera una onda continua que al incidir sobre un coche en movimiento produce un eco con la frecuencia desplazada por efecto *doppler*; el eco es batido con la frecuencia original, detectado y amplificado, de lo que resulta una medida directa de la velocidad del vehículo.

a) ¿Cuál es la máxima frecuencia *doppler* del eco de un coche que se mueve a 200 km/h (supuesto el radar estático)?

b) Si la temperatura total de ruido del sistema es de 1.000 K, el ancho de banda 5 kHz, la relación señal-ruido mínima para una detección fiable es de 10 dB y la sección recta de un coche pequeño 1 m^2 ¿cuál es el máximo alcance del radar?

1.6 Un equipo de gran utilidad en el control del tráfico aéreo es un radar secundario; es un sistema de radiolocalización que mide el tiempo empleado por un tren de pulsos para ir y venir a un blanco, pero, en lugar de depender del eco reflejado pasivamente por la estructura del avión, se emplea un transpondedor activo a bordo de la aeronave que responde a la interrogación del radar, codificando el tren de pulsos para incluir su identificación e información adicional como la altitud o señales de emergencia.

La frecuencia de interrogación del radar es de 1.030 MHz y la de respuesta del avión es de 1.090 MHz, con un ancho de banda de señal de 5 MHz. La potencia de pico del transmisor del radar es de 1 kW

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y la ganancia de su antena es de 27 dB con unos anchos de haz típicos de 2,5º en acimut (horizontal) y de 12,5º en elevación; la antena tiene un modo adicional de funcionamiento, denominado monopulso, que le permite conocer la posición del avión con una precisión en acimut de 0,05º y distinguir dos aviones que se encuentren a la misma distancia con una separación angular de 0,6º. Para el transpondedor del avión la ganancia de la antena es de 0 dB y la potencia de pico del transmisor embarcado es de 250 W. Las pérdidas de los cables, tanto en el radar como en el avión son de 3dB en cada uno de los casos. La sensibilidad del interrogador es de -82 dBm y la del transpondedor -75 dBm.
Comprobar que el sistema funciona correctamente hasta distancias de 200 millas náuticas (370 km) y obtener el margen de reserva disponible (valor en dB que la señal excede el umbral de sensibilidad).

1.7 Una emisora de Onda Media (OM) de 1 MHz va a recibirse con un receptor equipado con una antena solenoidal de directividad 1,5, compuesta de N=100 espiras circulares de área S=2 cm^2 cada una, bobinadas sobre un núcleo de ferrita de permeabilidad magnética efectiva μ_e=100. La antena sirve también de bobina en el circuito sintonizado del receptor y presenta, a 1 MHz, L_a=200 μH y Q = 100 ($Q = \omega L_a/R_a$). La temperatura ambiente es T_0=290 K y la de ruido de antena $T_a=10^8$ K. La resistencia de radiación de la antena solenoidal vale $R_r=20\ k^4S^2N^2\mu_e^2$, donde k es el número de onda. El receptor posee un factor de ruido F=4, una ganancia G=15 dB y un ancho de banda B = 10 kHz. Si la intensidad de campo incidente vale 1 mV/m, obtener:

a) La eficiencia de la antena receptora.
b) Los niveles de señal y de ruido a la entrada del receptor.
c) La relación señal-ruido a la salida del receptor.

1.8 Una familia desea recibir con una instalación individual los canales de televisión que emite Hispasat. Los dos satélites (Hipasat 1 A/B) están situados en la posición orbital 31 W asignada a España en 1977 (CAMR-77) y se encuentran sobre el ecuador a una distancia de 36.000 km. Emiten en polarización circular a izquierdas en los canales 23 (12.149,44 MHz), 27 (12.225,16 MHz), 31 (12.302,88 MHz), 35 (12.379,60 MHz) y 39 (12.456,32 MHz) con una PIRE de 56 dBW en cada uno de ellos sobre toda la península ibérica; el ancho de banda de cada canal es de 27 MHz. La unidad externa, situada en el foco de la antena, tiene un factor de ruido de 1,3 dB y una ganancia de 50 dB; su salida (FI) se conecta con la unidad interna mediante un cable de 10m que tiene una atenuación de 18,5 dB/100m. La temperatura de antena es de 100 K y la temperatura ambiente es de 300 K. Hallar la directividad de la antena receptora para tener en el canal 39 una relación señal-ruido superior a 11 dB a la entrada de la unidad interna, suponiendo que la atmósfera introduce una atenuación de 2 dB.

1.9 Una comunidad de vecinos dispone de una antena colectiva que les permite recibir todos los canales de televisión terrena que se emiten en su ciudad. Para ello disponen en el tejado de una antena de 15 dB de ganancia en las bandas IV/V, conectada mediante un cable a una caja de amplificadores sintonizados a cada uno de los canales y una red de distribución que lleva la señal a las tomas de cada una de las viviendas. Uno de los canales, el 44 (655,25 MHz) se recibe con un campo incidente de 10 mV/m.

a) ¿Cuánto vale la potencia recibida por la antena?
b) Entre la antena y el amplificador monocanal del canal 44 hay un cable de 20 m de longitud que presenta en la banda una atenuación de 16,5 dB/100 m a 470 MHz y de 23,5 dB/100 m a 860 MHz. El amplificador tiene un factor de ruido de 7 dB, la temperatura de antena es de 1.000 K, la

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

temperatura ambiente 300 K y el ancho de banda del canal 5 MHz. ¿Cuánto vale la relación señal-ruido a la salida del amplificador?

c) La red de distribución del edificio introduce entre la salida del amplificador y la toma de un vecino una atenuación de 23 dB. La normativa de antenas colectivas fija que en la caja de toma la tensión debe estar comprendida entre 1 y 10 mV eficaces. ¿Entre qué valores debe estar comprendida la ganancia del amplificador para que se cumpla la normativa?

1.10 Las sondas Voyager 1 y 2 realizaron desde finales de los años 70 exploraciones de los planetas del sistema solar, permitiendo obtener imágenes de Júpiter en el año 1979, de Saturno en 1981, de Urano en 1986 y de Neptuno en 1989. Las características de los sistemas de telecomunicación de ambas sondas eran similares y, en particular, para el envío de las imágenes a la tierra radiaban a la frecuencia de 8,466 GHz una potencia de 21,3 W (suministrada por una pila nuclear) con una antena de 3,4 m de diámetro y una ganancia de 48,13 dB.

El segmento terrestre del sistema de telecomunicaciones que se empleó para recibir las imágenes de las sondas Voyager se conoce con las siglas DSN (Deep Space Network) y está formado por reflectores parabólicos de grandes dimensiones situados en California, España y Australia, de forma que están separados aproximadamente 120º de longitud entre sí; de esta manera se garantiza en cualquier momento la comunicación con las sondas espaciales. En el año 1979, fecha de la recepción de las imágenes de Júpiter, estas antenas tenían un diámetro de 64 m y una ganancia de 72,2 dB a la frecuencia de transmisión de las sondas.

a) Sabiendo que la distancia entre la Tierra y Júpiter es de $6{,}8 \cdot 10^8$ km, ¿cuál era la relación señal-ruido de la señal recibida desde Júpiter si el ancho de banda de la transmisión de las imágenes era de 115 kHz y la temperatura total de ruido 28,5 K?

b) ¿Con que precisión angular debía apuntar el Voyager a la Tierra para que el empeoramiento de la relación señal-ruido no superase los 3 dB?

Entre la fecha de recepción de las imágenes de Júpiter (1979) y la de las de Neptuno (1989), las instalaciones de la DSN fueron mejoradas para compensar la reducción de señal que se iba a producir como consecuencia del incremento de distancia: las antenas pasaron a tener un diámetro de 70 m y una ganancia de 74,3 dB; la temperatura total de ruido se redujo a 25,5 K y se disminuyó la velocidad de transmisión, pasando a un ancho de banda de 21,6 kHz.

c) Como la distancia entre la Tierra y Neptuno es de $4{,}32 \cdot 10^9$ km, ¿cuál habría sido la relación señal-ruido si se hubieran mantenido las condiciones de la transmisión desde Júpiter del año 1979?

d) ¿Cuál es la mejora en la relación señal-ruido de las imágenes recibidas desde Neptuno debida a cada uno de los siguientes factores: mejora de la antena receptora, disminución de la temperatura de ruido y disminución de la velocidad de transmisión?. ¿Cuál fue la relación señal-ruido resultante?

Debido a la codificación empleada en la transmisión de las imágenes sólo era necesaria una relación señal-ruido de 3 dB para obtener probabilidades de error en el bit inferiores a $5\ 10^{-3}$. Para asegurar una buena recepción de las imágenes de Neptuno fue necesario combinar la señal recibida por una antena de 70 m, dos de 34 m y las 27 antenas de 25 m de diámetro del radiotelescopio VLA (Very Large Array) de Nuevo México, que proporcionaron 5 dB adicionales de mejora en la relación señal-ruido, permitiendo compensar factores adicionales de pérdidas (por hidrometeoros o absorciones atmosféricas).

e) ¿Con qué precisión angular debía apuntar la antena de la DSN en el año 1989 a la sonda Voyager para que la variación en la señal recibida fuera inferior a 1 dB?

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

2
Propagación

2.1 Propagación en el espacio libre y en el entorno terrestre

Todo sistema de telecomunicación debe diseñarse para que en el receptor se obtenga una relación señal-ruido mínima que garantice su funcionamiento. Los servicios de radiocomunicaciones, radiodifusión, radiolocalización (radar), teledetección y radioayudas a la navegación tienen en común el empleo de ondas electromagnéticas radiadas como soporte de la transmisión de información entre el transmisor y el receptor.

Para la correcta planificación de cualquiera de estos sistemas resulta esencial conocer los factores que pueden alterar la propagación electromagnética, su magnitud y su influencia en las distintas bandas de frecuencias.

En condiciones de propagación en el espacio libre la relación entre la potencia recibida y la transmitida (pérdida de transmisión) por dos antenas separadas una distancia r es

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi r^2} D_T \, A_{efR} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 D_T \, D_R = \left(\frac{1}{\lambda r}\right)^2 A_{efT} \, A_{efR} \qquad (2.1)$$

La ecuación anterior no muestra una relación clara entre potencia transmitida y recibida en función de la frecuencia, ya que según sean los parámetros de antena empleados la dependencia explícita con la frecuencia varía. A frecuencias bajas, bandas MF, LF y VLF, las antenas empleadas son necesariamente pequeñas en términos de λ, ya que ésta es superior a los 100 m. En este caso las antenas presentan típicamente una directividad constante con la frecuencia. A partir de la ecuación 2.1 se observa que, para directividades constantes con la frecuencia, la pérdida de transmisión aumenta con la frecuencia. Por el contrario, a frecuencias elevadas, bandas de UHF y SHF, las antenas pueden tener dimensiones grandes relativas a λ. En este caso, por ejemplo en el de reflectores parabólicos, el área efectiva de la antena es proporcional al área física de la misma y, por tanto, independiente de la frecuencia, por lo que de la expresión 2.1 resulta que la pérdida de transmisión disminuye al aumentar la frecuencia.

Como regla general puede afirmarse que para antenas de dimensiones fijas y considerando la propagación en el espacio libre, disminuir la frecuencia en bandas de frecuencias bajas y aumentarla en bandas de frecuencias elevadas reduce la pérdida de transmisión.

La propagación en el espacio libre responde a un modelo ideal análogo a las condiciones de propagación en el vacío. En el entorno terrestre muy pocas situaciones se ajustan a este modelo. La

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

presencia de la tierra, la atmósfera y la ionosfera alteran en la mayoría de los casos reales las condiciones de propagación.

Ejemplo 2.1 Considérese un enlace de 1.000 km a frecuencias bajas, con antenas de directividad 1,5, y otro de 40 km a frecuencias altas, con antenas de 1 m^2 de área efectiva. La relación entre la potencia transmitida y recibida es en cada caso

f	λ	10 log (P_R/P_T)
30 kHz	10 km	-58,5 dB
300 kHz	1 km	-78,5 dB
3.000 kHz	0,1 km	-98,5 dB
0,3 GHz	100 cm	-92 dB
3 GHz	10 cm	-72 dB
30 GHz	1 cm	-52 dB

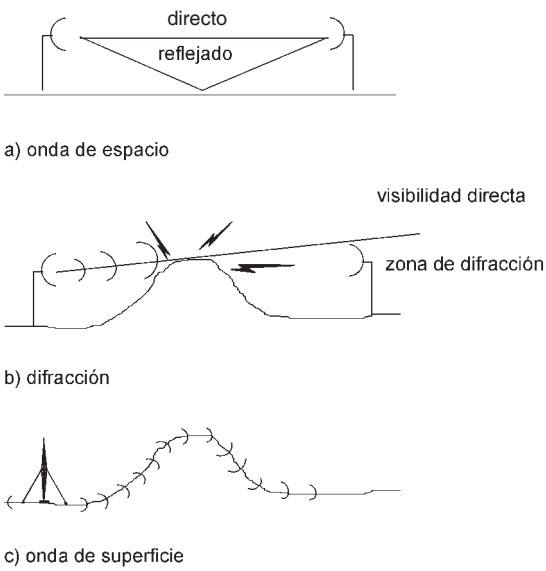


Fig. 2.1 Efecto de la tierra en la propagación

Las características eléctricas de la tierra y su orografía influyen en la propagación de las ondas electromagnéticas. Al incidir una onda electromagnética sobre la tierra se produce una reflexión. La superposición de la onda directa y la reflejada da lugar a la llamada onda de espacio. La formación de la onda de espacio puede ser constructiva o destructiva en función de las fases de la onda directa y la reflejada, lo que puede resultar en variaciones apreciables de la potencia recibida respecto al valor esperado en espacio libre. La presencia de obstáculos y la propia esfericidad de la tierra limitan la visibilidad entre antena transmisora y receptora. Al incidir una onda electromagnética sobre un obstáculo se produce un fenómeno de difracción por el cual el obstáculo rerradia parte de la energía interceptada. La difracción posibilita la recepción aun en el caso de que no exista visibilidad, si bien con una atenuación adicional respecto al espacio libre. A frecuencias bajas la tierra se comporta como un buen conductor, por lo que es posible inducir corrientes superficiales sobre la superficie de la tierra. A estas corrientes superficiales está asociada la onda de superficie que podrá recibirse aunque no exista visibilidad entre las antenas. En la figura 2.1 se representan de forma esquemática estos tres fenómenos asociados a la presencia de la tierra: reflexión, difracción y onda de superficie.

La concentración de gases en la atmósfera introduce diferencias entre la propagación en el vacío y la atmósfera. La mayor concentración de gases se da en la capa más baja de la atmósfera, llamada troposfera, que se extiende desde el nivel del mar hasta unos 10 km de altitud aproximadamente. En condiciones atmosféricas normales la concentración de gases disminuye con la altura, lo que provoca una variación del índice de refracción de la atmósfera en función de la altura. Por tanto, la atmósfera constituye un medio de propagación no homogéneo, lo que provoca una curvatura de las trayectorias de propagación o refracción. Además, la presencia de gases introduce atenuación, especialmente importante en las frecuencias de resonancia de las moléculas de oxígeno y del vapor de agua, que son los gases con mayor presencia en la atmósfera. Finalmente,

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

incidencias meteorológicas como la lluvia pueden introducir atenuaciones adicionales en función de la frecuencia y la intensidad de la precipitación.

Un tercer elemento que se debe considerar en la propagación en el entorno terrestre es la presencia de la ionosfera. La ionosfera es una capa de la atmósfera comprendida entre los 50 y los 2.000 km de altitud por encima de la superficie terrestre y que se caracteriza por contener densidades importantes de moléculas ionizadas. La propagación por medios ionizados está sujeta a fenómenos de reflexión, absorción y refracción en función de parámetros tales como la frecuencia y la densidad de ionización.

La tierra, la troposfera y la ionosfera son los responsables de una serie de fenómenos que deben considerarse al planificar un sistema de radiocomunicaciones. Una forma de abordar el problema es solucionar mediante las ecuaciones de Maxwell el problema de una antena situada en un medio heterogéneo (atmósfera), parcialmente ionizado (ionosfera) con las adecuadas condiciones de contorno (tierra y obstáculos). Evidentemente este problema es inabordable por su complejidad y de poco interés, ya que sólo respondería a unas condiciones determinadas.

En la práctica los problemas de propagación se tratan estudiando por separado cada uno de los fenómenos y cuantificando su efecto respecto a la propagación en el espacio libre. Así, al proyectar un servicio deben identificarse en primer lugar los fenómenos que son relevantes en función de la frecuencia a emplear y la ubicación de las antenas. A continuación se cuantifican estos efectos, lo que en general se corresponde a añadir términos correctores a los valores esperados en condiciones de propagación en el espacio libre.

Subsiste una dificultad adicional derivada del desconocimiento del entorno. Factores tales como la conductividad del suelo, la intensidad y frecuencia de las lluvias, el índice de refracción de la atmósfera, o la densidad de ionización de la ionosfera son variables en el tiempo y en el espacio, en la mayoría de los casos desconocidos de forma exacta y, sin embargo, con una influencia importante en la cuantificación de los distintos procesos que intervienen en la propagación de ondas en el entorno terrestre. Generalmente debe recurrirse a valores medios o valores de referencia de estas magnitudes para una región o época del año que proporcionarán estimaciones aproximadas en los cálculos de propagación.

2.2 Efecto de la tierra

2.2.1 Introducción

La tierra perturba la propagación de las ondas electromagnéticas, de forma que al establecer cualquier tipo de radiocomunicación en el entorno terrestre aparecerán una serie de fenómenos que modificarán las condiciones ideales de propagación en el vacío. Tal como se ha descrito en la introducción, estos fenómenos son básicamente tres: onda de superficie, difracción y formación de la onda de espacio. La importancia de cada uno de ellos depende de la banda de frecuencias, del tipo de terreno y de la ubicación de las antenas. De forma general puede establecerse que la onda de superficie es un fenómeno que sólo afecta a bajas frecuencias (banda de MF e inferiores). La difracción permite comunicar dos puntos sin que exista visibilidad directa entre ellos; sin embargo, al aumentar la frecuencia este efecto tiene menos relevancia y para frecuencias de la banda de UHF y superiores la presencia de un obstáculo (montañas, edificios, etc.) que obstruya la trayectoria entre las antenas puede limitar gravemente las posibilidades de comunicación. Por tanto, en función de la banda de frecuencias ciertos efectos serán predominantes mientras que otros serán despreciables.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

2.2.2 Reflexión en tierra plana

La presencia de la tierra produce reflexiones al incidir sobre ella una onda electromagnética. Una hipótesis simplificadora es considerar que la reflexión se produce sobre una superficie plana y lisa. En este caso la reflexión puede tratarse como un problema de reflexión especular.

La tierra es un medio dieléctrico con pérdidas cuyas constantes dieléctricas varían en función del tipo de suelo, el grado de humedad del mismo y la frecuencia. En la tabla 2.1 se muestra el valor de la permitividad relativa y de la conductividad para diferentes tipos de suelo a dos frecuencias distintas, en bandas típicas de radiocomunicaciones (MF y UHF).

Es de destacar la influencia de la humedad del suelo en el valor de las constantes dieléctricas, así como una mayor dependencia de la conductividad en función de la frecuencia. Por otra parte, según se indica en (3.9), un determinado tipo de terreno se comportará como un buen conductor cuando $\varepsilon'' = \sigma / \omega\varepsilon_o >> \varepsilon'$ condición doblemente dependiente de la frecuencia ya que la conductividad también depende de ella.

	1 MHz			1 GHz		
TERRENO	ε'	σ (S/m)	ε''	ε'	σ (S/m)	ε''
Agua salada, 20º C	70	5	$9\cdot10^{4}$	70	5	90
Suelo húmedo	30	10^{-2}	180	30	$5\cdot10^{-2}$	0,9
Agua dulce, 20º C	80	$2\cdot10^{-3}$	36	80	$5\cdot10^{-2}$	0,9
Suelo moderadamente seco	15	10^{-3}	18	15	$3\cdot10^{-2}$	0,5
Suelo muy seco	3	10^{-4}	1,8	3	$5\cdot10^{-5}$	$9\cdot10^{-4}$
Agua pura, 20º C	80	$<10^{-5}$	<0,2	80	10^{-1}	3,6
Hielo, -1º C	3	$3\cdot10^{-5}$	0,5	3	$7\cdot10^{-4}$	$1{,}3\cdot10^{-2}$

Tabla 2.1 Permitividad relativa y conductividad típica para distintos tipos de suelo

Al incidir una onda plana sobre un dieléctrico se genera una onda transmitida al medio dieléctrico y una onda reflejada. Atendiendo a la figura 2.2 se pueden distinguir dos situaciones en función de la polarización de la onda incidente: horizontal o campo eléctrico paralelo a la superficie de separación entre dieléctricos, y polarización vertical con el vector de campo eléctrico contenido en el plano formado por la dirección de incidencia y la normal a la superficie de separación. Nótese que en este último caso la polarización de la onda incidente no es realmente vertical, salvo si la incidencia de la onda es rasante.

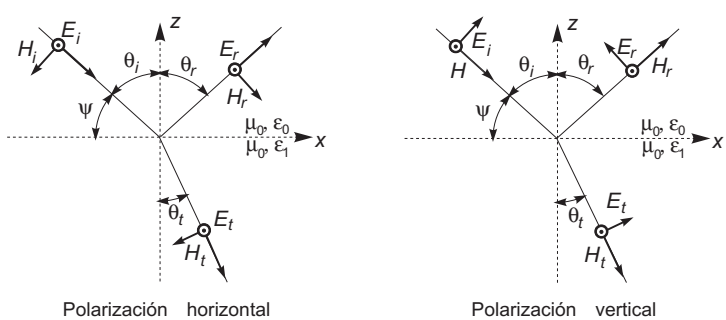


Fig. 2.2 Incidencia de una onda plana en un medio dieléctrico

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Las relaciones de continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico y del magnético permiten obtener el coeficiente de reflexión para ambas situaciones. Para el caso de polarización horizontal, en la superficie de separación de los medios dieléctricos se cumple que

$$\begin{aligned} E_i\, e^{-jk_1 \operatorname{sen}\theta_i x} + E_r\, e^{-jk_1 \operatorname{sen}\theta_r x} &= E_t\, e^{-jk_2 \operatorname{sen}\theta_t x} \\ -H_i \cos\theta_i\, e^{-jk_1 \operatorname{sen}\theta_i x} + H_r \cos\theta_r\, e^{-jk_1 \operatorname{sen}\theta_r x} &= -H_t \cos\theta_t\, e^{-jk_2 \operatorname{sen}\theta_t x} \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde k_1 y k_2 son las constantes de propagación en el medio 1 y 2 respectivamente. Para la polarización vertical se obtiene una expresión análoga. Dado que estas igualdades deben cumplirse para todo *x,* se tiene que

$$k_1 \operatorname{sen}\theta_i = k_1 \operatorname{sen}\theta_r = k_2 \operatorname{sen}\theta_t \tag{2.3}$$

de donde resulta la igualdad entre el ángulo de incidencia y el de reflexión

$$\theta_i = \theta_r \tag{2.4}$$

y la ley de Snell

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t \tag{2.5}$$

Se define el coeficiente de reflexión de la onda polarizada horizontalmente como la relación entre el campo eléctrico reflejado E_r y el incidente E_i, que en este caso está dado por

$$\rho_H = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} \tag{2.6}$$

Esta expresión puede escribirse en función del ángulo de elevación ψ. Además, si se considera que n_1=1 y se aplica la ley de Snell, la expresión toma una forma más compacta dada por

$$\rho_H = \frac{\operatorname{sen}\psi - \sqrt{n_2^2 - \cos^2\psi}}{\operatorname{sen}\psi + \sqrt{n_2^2 - \cos^2\psi}} \tag{2.7}$$

Para la polarización vertical se obtiene tras un análisis similar

$$\rho_V = \frac{n_2^2 \operatorname{sen}\psi - \sqrt{n_2^2 - \cos^2\psi}}{n_2^2 \operatorname{sen}\psi + \sqrt{n_2^2 - \cos^2\psi}} \tag{2.8}$$

donde n_2 es el índice de refracción del terreno, es decir,

$$n_2 = \sqrt{\varepsilon' - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \tag{2.9}$$

Nótese que los coeficientes de reflexión son función del tipo de suelo, de la polarización, de la frecuencia y del ángulo de incidencia. En la figura 2.3 se representa el módulo y la fase del coeficiente de reflexión para un suelo moderadamente seco para distintas frecuencias. Para la obtención de estas curvas se ha supuesto que la permitividad y la conductividad son constantes dentro del margen de frecuencias. Estas gráficas muestran el distinto comportamiento de un terreno en función de la frecuencia, el ángulo de incidencia y la polarización. El terreno indicado en la figura 2.3 puede considerarse conductor a frecuencias inferiores a 1 MHz. Nótese que, para todas las polarizaciones, cuando el ángulo de incidencia es pequeño el coeficiente de reflexión puede aproximarse por -1. Esta aproximación es más exacta cuanto mayor es la frecuencia. Para la polarización horizontal es una buena aproximación independientemente del ángulo de incidencia, mientras que para la polarización

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

vertical sólo es cierto para incidencias rasantes y al aumentar el ángulo de incidencia se produce un cambio de fase de 180º en el coeficiente de reflexión.

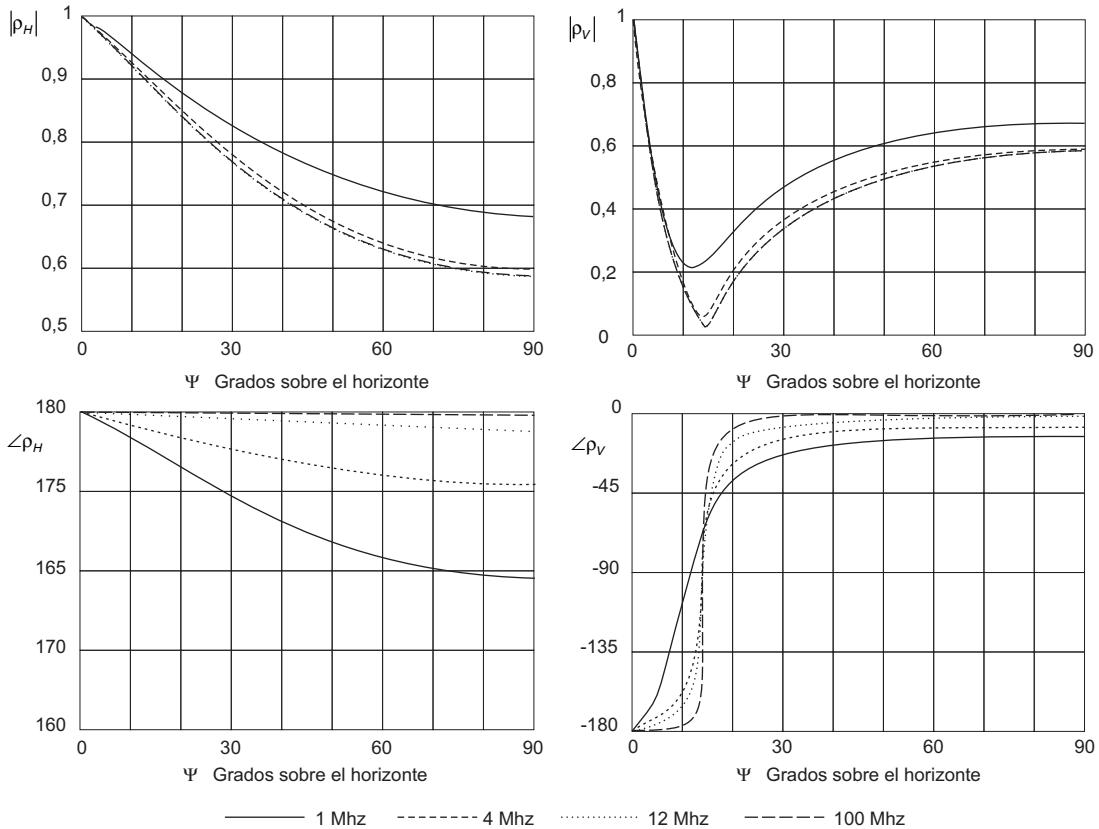


Fig. 2.3 Coeficiente de reflexión para un suelo moderadamente seco (ε' = 15, σ = 10^{-3} S/m)

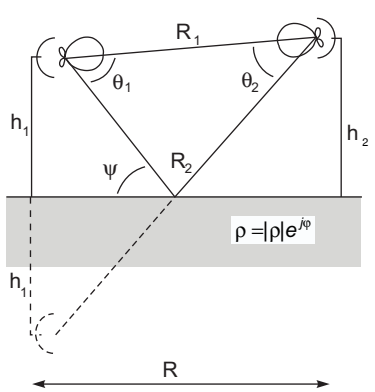


Fig. 2.4 Reflexión en tierra plana

Una situación de reflexión en tierra plana es la representada en la figura 2.4, en que dos antenas con directividades $D_1(\theta)$ y $D_2(\theta)$ que se suponen orientadas en la dirección de su máximo de radiación, están separadas una distancia R y a unas alturas h_1 y h_2 del suelo, que posee un coeficiente de reflexión ρ.

Las distancias recorridas por la onda directa y la reflejada entre la antena transmisora y la receptora son R_1 y R_2 respectivamente. La superposición de la onda directa y la reflejada forma la onda de espacio. La tensión en circuito abierto inducida por la onda de espacio en la antena receptora puede hallarse como la suma de las tensiones en circuito abierto inducidas por la onda directa y la onda reflejada. La tensión en circuito abierto inducida por la onda directa es proporcional a

$$V_{ca}^{d} \propto \sqrt{D_1(0)\, D_2(0)}\, \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \qquad (2.10)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

mientras que la tensión en circuito abierto inducida por la onda reflejada lo es a

$$V_{ca}^{r} \propto \sqrt{D_1(\theta_1) D_2(\theta_2)} \; |\rho| e^{j\varphi} \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \tag{2.11}$$

por lo que la tensión inducida por la onda de espacio resulta

$$V_{ca} \propto \sqrt{D_1(0) D_2(0)} \; \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \left[1 + \sqrt{\frac{D_1(\theta_1) D_2(\theta_2)}{D_1(0) D_2(0)}} |\rho| e^{j\varphi} e^{-jk(R_2 - R_1)} \right] \tag{2.12}$$

donde se ha igualado en el denominador R_1 y R_2. De la expresión anterior se observa que la tensión en circuito abierto se corresponde a la tensión inducida por la onda directa multiplicada por el término

$$\frac{V_{ca}}{V_{ca}^{d}} = \left[1 + \sqrt{\frac{D_1(\theta_1) D_2(\theta_2)}{D_1(0) D_2(0)}} |\rho| e^{j\varphi} e^{-jk(R_2 - R_1)} \right] \tag{2.13}$$

En general la distancia R es mucho mayor que la altura de las antenas. Esto implica que, excepto para antenas de una directividad muy elevada, los ángulos θ_1 y θ_2 son mucho menores que el ancho de haz y, por tanto, puede aproximarse $D_1(\theta_1)$ por $D_1(0)$ y $D_2(\theta_2)$ por $D_2(0)$. Asimismo se tiene

$$R_1 \approx R + \frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{R} \qquad R_2 \approx R + \frac{1}{2} \frac{(h_2 + h_1)^2}{R} \tag{2.14}$$

En este caso el ángulo ψ es próximo a cero, por lo que el coeficiente de reflexión es prácticamente -1 para las dos polarizaciones (véase la figura 2.3). Con estas hipótesis simplificadoras se obtiene que

$$\left| \frac{V_{ca}}{V_{ca}^{d}} \right| = \left| 1 - e^{-jk\frac{2h_1 h_2}{R}} \right| = 2 \left| \operatorname{sen} \frac{k h_1 h_2}{R} \right| \tag{2.15}$$

Si se mantienen todos los parámetros fijos y se varía la altura de una de las antenas, la tensión en circuito abierto presenta oscilaciones. Los nulos corresponden al caso de interferencia destructiva y los máximos a la interferencia constructiva.

Para el caso que kh_1h_2/R sea inferior a $\pi/16$, es decir, si el desfase entre la onda directa y la reflejada es pequeño, puede realizarse la siguiente aproximación lineal indicada en la figura 2.5.

$$\left| \frac{V_{ca}}{V_{ca}^{d}} \right| \approx \frac{2kh_1h_2}{R} \tag{2.16}$$

La potencia recibida es proporcional al cuadrado de la tensión en circuito abierto. En el caso de existir reflexión en la tierra y con la validez de las hipótesis anteriores, se puede escribir la relación entre la potencia recibida por onda de espacio en relación a la recibida por propagación en el espacio libre como

$$\frac{P_R}{P_R^{d}} = \left(\frac{2kh_1h_2}{R} \right)^2 \tag{2.17}$$

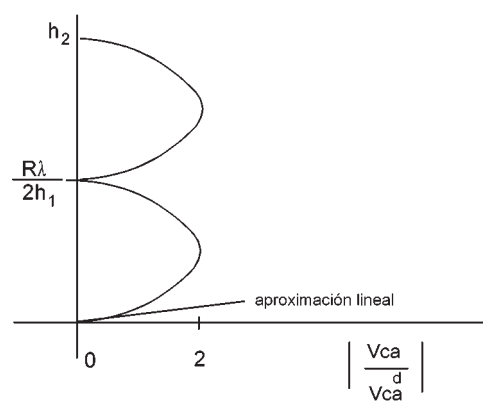


Fig. 2.5 Oscilaciones de la tensión en circuito abierto en función de la altura de una de las antenas

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

o, lo que es lo mismo, la relación entre la potencia transmitida y la recibida, para reflexión en tierra plana con ángulo de incidencia rasante y mucho menor que el ancho de haz de las antenas empleadas, puede escribirse como

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{1}{4\pi R^2} D_T A_{efR} \left(\frac{2kh_1h_2}{R} \right)^2 \propto \frac{1}{R^4} \tag{2.18}$$

En este caso, la potencia recibida es inversamente proporcional a la distancia elevada a la cuarta potencia, en lugar de al cuadrado, como sucede en el espacio libre.

2.2.3 Difracción

La difracción es el fenómeno que ocurre cuando una onda electromagnética incide sobre un obstáculo. La tierra y sus irregularidades pueden impedir la visibilidad entre antena transmisora y receptora en ciertas ocasiones. La zona oculta a la antena transmisora se denomina la zona de difracción (figura 2.6). En esta zona los campos no son nulos debido a la difracción causada por el obstáculo y, por tanto, es posible la recepción, si bien con atenuaciones superiores a las del espacio libre.

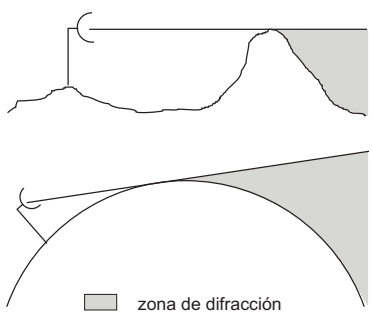


Fig. 2.6 Obstrucción causada por la tierra

En primer lugar es necesario definir la condición de visibilidad entre antenas, es decir, cuándo debe considerarse que un obstáculo interrumpe el camino directo entre la antena transmisora y la receptora y, por tanto, la difracción es un mecanismo relevante en la propagación.

Considérese la situación de la figura 2.7 en que dos antenas isótropas están separadas una distancia R. A una distancia d_1 de la antena transmisora, donde se halla el obstáculo, se define un plano P infinito, perpendicular a la línea que une a la antena transmisora con la receptora.

Se definen las zonas de Fresnel como aquellos puntos del espacio que cumplen:

$$(r_1 + r_2) - R = n\lambda/2\,; \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.19}$$

Las zonas de Fresnel son elipsoides de revolución cuyo eje mayor tiene una longitud de $R+n\lambda/2$. La intersección de las zonas de Fresnel con el plano P son circunferencias cuyo radio puede calcularse para el caso que sea mucho menor que d_1 y d_2 como

$$R_n = \sqrt{n\lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \tag{2.20}$$

Aplicando el principio de Huygens, el campo sobre la antena receptora puede formarse como la superposición de fuentes elementales de ondas esféricas situadas en el plano P, radiando cada una de estas fuentes con un desfase función de la distancia r_1. A estas fuentes equivalentes se les llama fuentes secundarias.

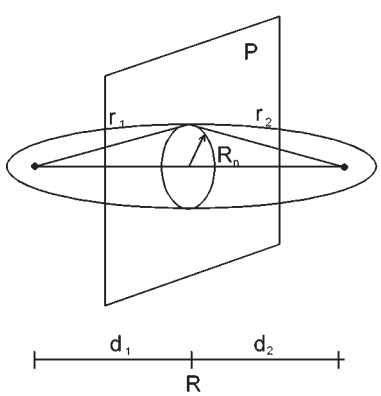


Fig. 2.7 Definición de las zonas de Fresnel

A partir de la definición de las zonas de Fresnel, los campos producidos por las fuentes equivalentes de Huygens

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

situadas en la zona 1 (Fig. 2.8) se sumarán en la antena receptora con una fase inferior a 180º, es decir, constructivamente. Las contribuciones de las fuentes situadas en las zonas 2 y 3 tienden a cancelarse mutuamente, lo mismo que las de las zonas 4 y 5, 6 y 7, y así sucesivamente. Por tanto, si en la situación del plano P se sitúa un plano conductor con un orificio de radio R_1, esto es, dejando solamente las fuentes secundarias comprendidas dentro de la primera zona de Fresnel y anulando el resto, la potencia recibida en el receptor no disminuirá de forma apreciable. Por tanto, el radio de la primera zona de Fresnel permite definir la condición de visibilidad entre antenas, de forma que mientras no exista un obstáculo dentro de la primera zona de Fresnel se considera que la trayectoria no ha sido obstruida. Por el contrario, cuando el obstáculo se encuentra dentro de la primera zona de Fresnel existirá una disminución apreciable en la potencia recibida, por lo que se considera que la trayectoria ha sido obstruida y deberá considerarse el efecto de la difracción.

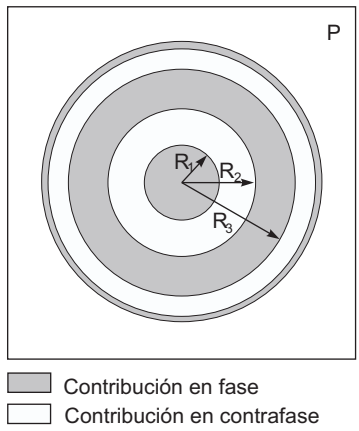


Fig. 2.8 Fase del campo producido por cada una de las fuentes secundarias sobre el receptor

Ejemplo 2.2 A continuación se muestra el radio de la primera zona de Fresnel en el punto medio de un enlace de 40 km de longitud.

Al aumentar la frecuencia, el radio de la primera zona de Fresnel disminuye. Así, a frecuencias correspondientes al visible es de tan sólo unos centímetros, lo que resulta coherente con la hipótesis óptica de rayos. Al disminuir la frecuencia el radio aumenta, de forma que a frecuencias bajas (MF e inferiores) difícilmente se estará en condiciones de visibilidad directa ya que la propia tierra se encontrará dentro de la primera zona de Fresnel.

λ (m)	R_1 (m)	R_1/λ	BANDA DE FRECUENCIA
$0{,}5\cdot10^{-6}$	0,07	140.000	espectro visible
0,03	17	566	banda X
200	1.414	7	MF

La difracción por objetos arbitrarios es un problema electromagnético que admite en pocos casos soluciones analíticas cerradas. Sin embargo, es posible hallar expresiones para objetos canónicos que modelan, aunque de forma aproximada, obstáculos reales. Una esfera conductora lisa y una arista o filo de navaja se emplean para caracterizar los efectos de difracción de la tierra y colinas o edificios respectivamente.

En la figura 2.9a se representa la pérdida adicional respecto al espacio libre, en función de la distancia entre la trayectoria y el obstáculo normalizada al radio de la primera zona de Fresnel, para un obstáculo del tipo filo de navaja. Nótese que hasta que el obstáculo no penetra un 60% en la primera zona de Fresnel, los efectos

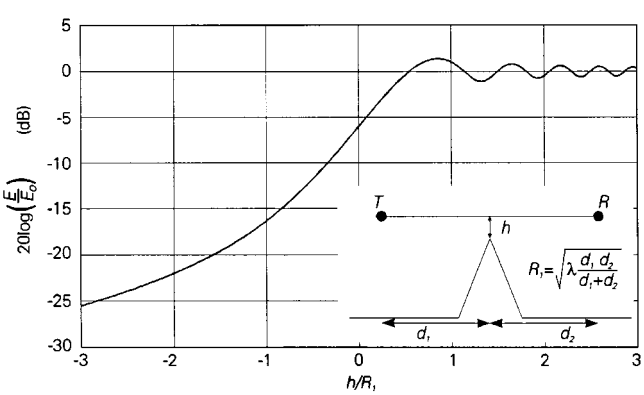


Fig. 2.9*a* Pérdidas de difracción por aristas

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

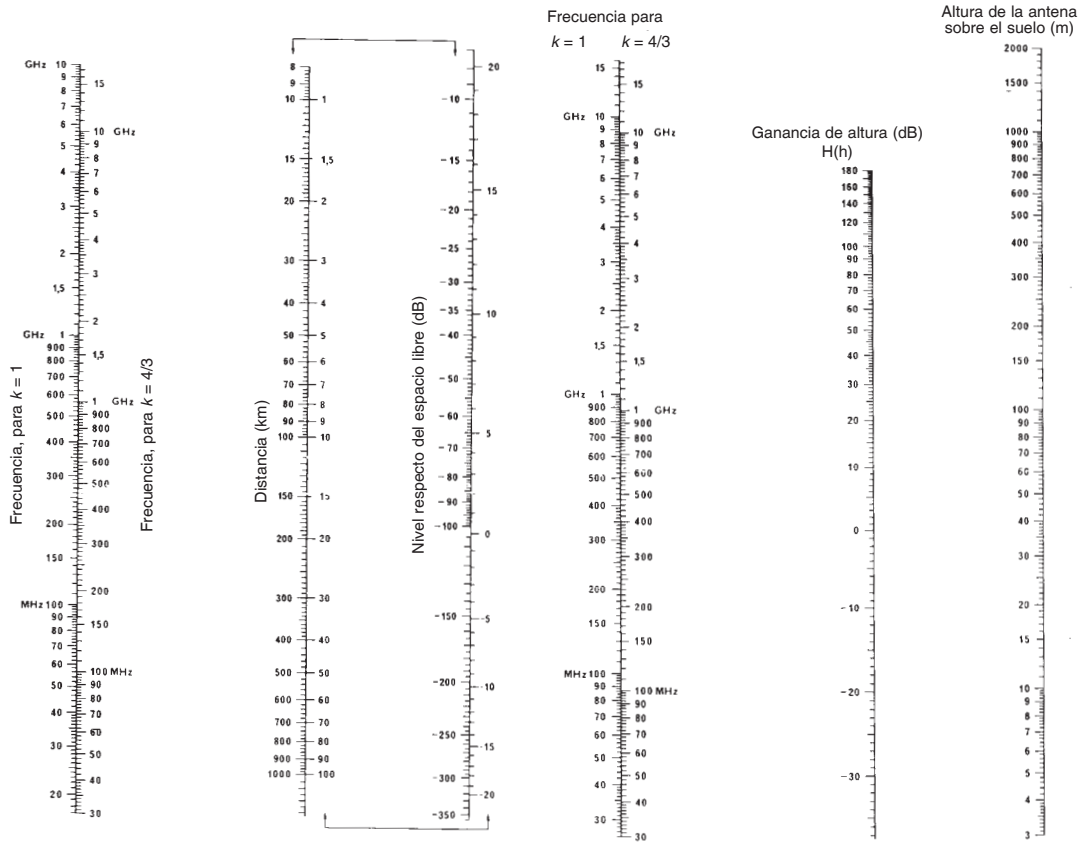


Fig. 2.9*b* Pérdidas de difracción por tierra esférica [UIT]

sobre la potencia recibida son pequeños. En la figura 2.9b se muestran unos nomogramas que permiten calcular la pérdida por difracción en tierra esférica. Esta pérdida es función de la distancia entre antenas d, y la altura de las mismas sobre la tierra h_1 y h_2.

Ejemplo 2.3 Las pérdidas, respecto a las de la propagación en el espacio libre de un radioenlace sobre tierra a una frecuencia de 4 GHz, entre dos puntos elevados 8,4 m y separados 40 km, pueden encontrarse como

$$20 \log \frac{E}{E_0} = F(d) + H(h_1) + H(h_2)$$

La función F tiene en cuenta los efectos de la distancia y la función H los de la altura de las antenas. El valor de ambas funciones puede encontrarse a partir de los nomogramas de la figura 2.9b. La función F está representada a la izquierda de la figura. Trazando una línea recta entre las columnas de frecuencias y distancias se puede leer directamente el valor de F en la columna de la derecha. Nótese que la columna de frecuencias contiene dos valores, para k=1 y k=4/3. Si se emplea el valor de frecuencia correspondiente al caso k=1 no se considera el efecto de la refracción atmosférica, mientras que si se emplea el valor de frecuencia para k=4/3 se está considerando el efecto de refracción producido por una atmósfera típica (sección 2.3.2).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El valor de la función H se obtiene de forma análoga mediante los nomogramas de la derecha. En este caso también es posible considerar los efectos de refracción atmosférica. En la siguiente tabla se muestran los valores de las distintas funciones para este ejemplo.

	F (d) (dB)	H (h) (dB)	20 log E/E_0 (dB)
CON REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA (k = 4/3)	-43	1	-41
SIN REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA (k = 1)	-54	2	-50

2.2.4 Onda de superficie

Anteriormente se ha analizado el efecto de la tierra en la propagación como un problema de reflexión en tierra plana. En este caso se considera la formación de la onda de espacio como una interferencia entre la onda directa y la reflejada. Cuando las alturas sobre el suelo de las antenas transmisora y receptora son pequeñas en términos de λ, la onda de espacio tiende a cancelarse (2.18). En esta situación el mecanismo de propagación más relevante es la onda de superficie (sin considerar posibles efectos ionosféricos).

La radiación de ondas electromagnéticas sobre una superficie esférica lisa es un problema que admite una solución analítica. El campo radiado puede expresarse como una suma de términos cuyas amplitudes son función de la frecuencia, el tipo de terreno, la altura de las antenas sobre el suelo, la polarización y la distancia.

De la solución analítica se observa que, si las antenas se aproximan al suelo, la potencia recibida en ambas polarizaciones decrece hasta una cierta altura en que la potencia recibida en polarización vertical permanece constante, mientras que en polarización horizontal continúa decreciendo. Cuando la altura de las antenas es una fracción de la longitud de onda, la potencia recibida en polarización horizontal es despreciable frente a la potencia recibida en polarización vertical. Este fenómeno es especialmente importante a frecuencias bajas (MF e inferiores, $\lambda > 100$ m) en las que las antenas están necesariamente próximas a la superficie terrestre.

La onda de superficie tan sólo es relevante en polarización vertical; la amplitud de los campos es independiente de la altura de las antenas y presenta una variación en función de la distancia proporcional a $1/R^2$ más un término de decaimiento exponencial que es apreciable a distancias superiores a los 100 km. La atenuación de la onda de superficie es función de la frecuencia y del tipo de terreno.

Las figuras 2.10 y 2.11 muestran las intensidades de campo correspondientes a la onda de superficie sobre el mar y sobre tierra seca. Estas curvas son válidas en el margen de frecuencias de 10 kHz a 30 MHz (sin considerar efectos ionosféricos), y expresan la intensidad de campo correspondiente a la componente vertical medida sobre la superficie de la tierra, en función de la distancia, cuando la potencia transmitida es 1 kW y la antena un monopolo corto. La línea discontinua indica el decaimiento 1/R correspondiente a propagación en espacio libre. Se observan también en las dos gráficas las regiones de decaimiento de forma $1/R^2$ y exponencial.

De las gráficas se observa que la intensidad del campo disminuye con la frecuencia, de forma que la propagación por onda de superficie deja de ser un mecanismo relevante de propagación a grandes distancias en la banda de HF. La atenuación disminuye al aumentar la conductividad del terreno; así, sobre agua de mar el comportamiento del campo es prácticamente 1/R para distancias de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

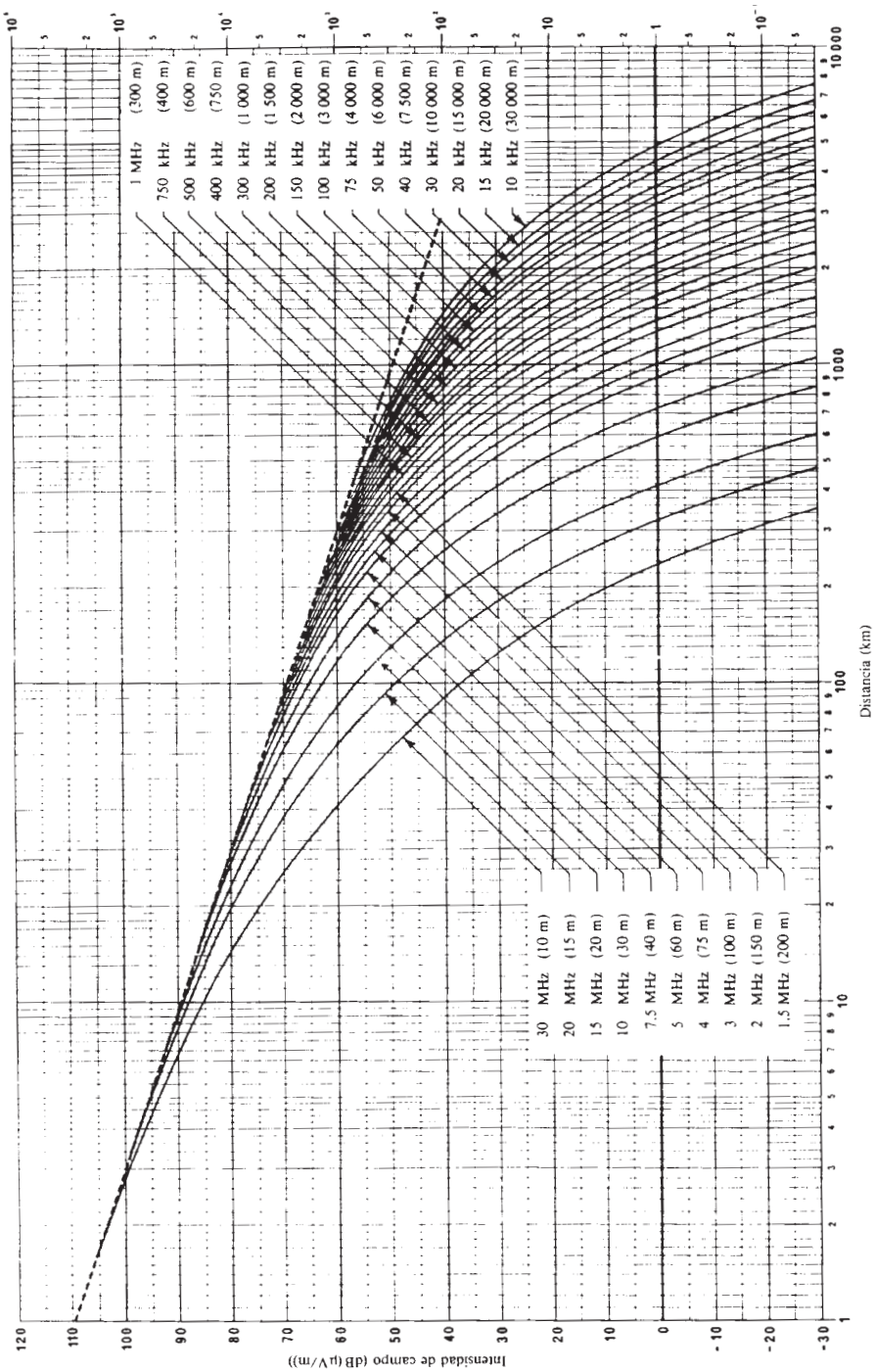


Fig 2.10 Intensidad de la onda de superficie sobre el mar [UIT]

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

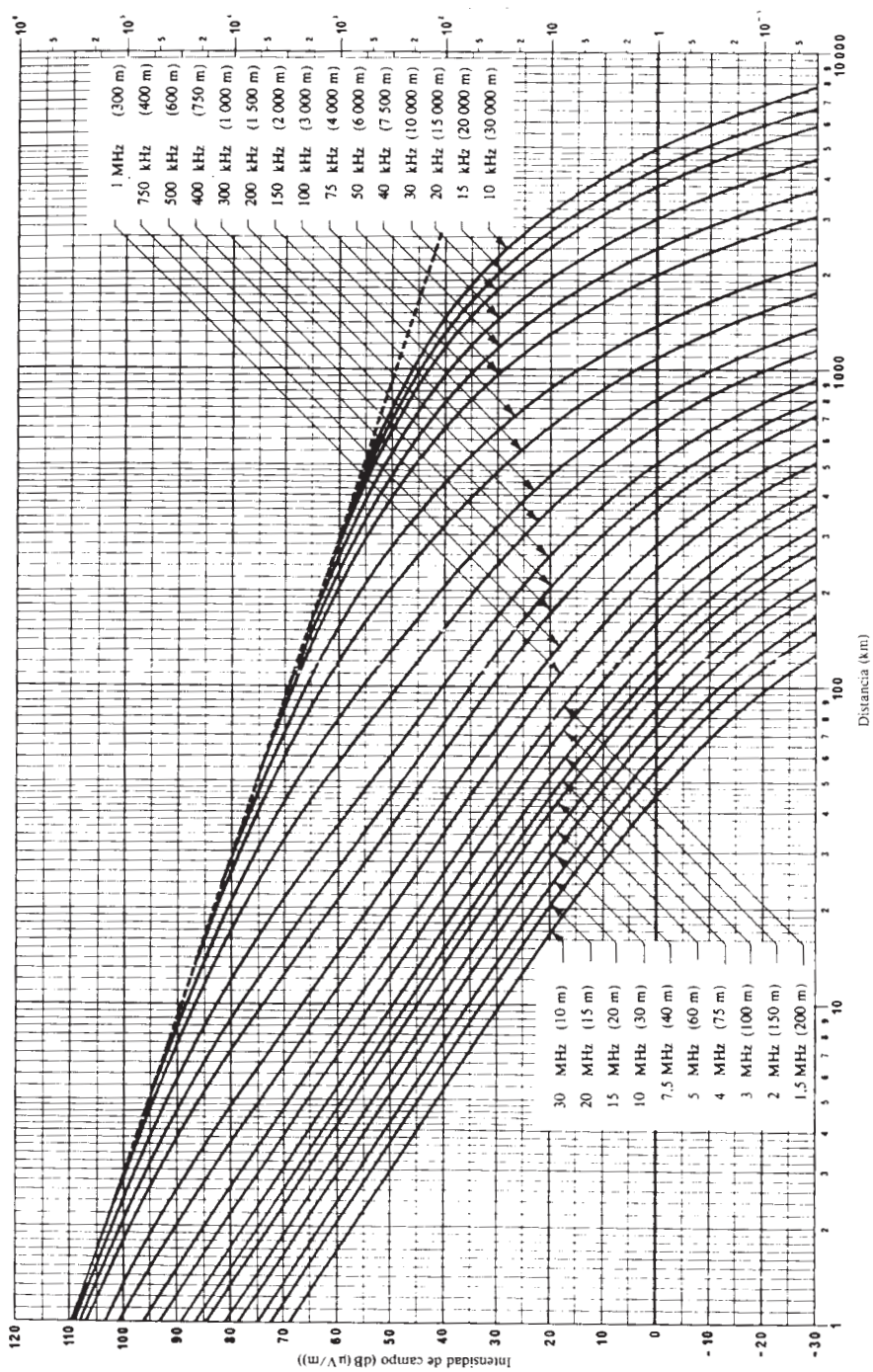


Fig 2.11 Intensidad de la onda de superficie sobre tierra seca [UIT]

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

100 km y para bandas de frecuencia de MF e inferiores, mientras que en tierra seca el comportamiento es $1/R^2$. Finalmente se debe destacar que a grandes distancias (superiores al centenar de kilómetros) se hace evidente el término de atenuación exponencial, por lo que la intensidad de campo disminuye rápidamente con la distancia.

La onda de superficie es el mecanismo responsable de la propagación a grandes distancias en la banda de MF, donde se encuentra ubicado el servicio de radiodifusión en OM. Con potencias de transmisión del orden de 100 kW se obtienen coberturas de hasta unos 100 km con señal de gran calidad (S/N ~ 30 dB) sin necesidad de que exista visibilidad directa entre el transmisor y el receptor.

2.3 Efecto de la troposfera

2.3.1 Atenuación

La absorción molecular de los gases contenidos en la atmósfera y la atenuación producida por los hidrometeoros son las principales causas de la atenuación atmosférica. En la figura 2.12 se muestra la atenuación específica (dB/km) en función de la frecuencia para un trayecto próximo a la superficie de la tierra.

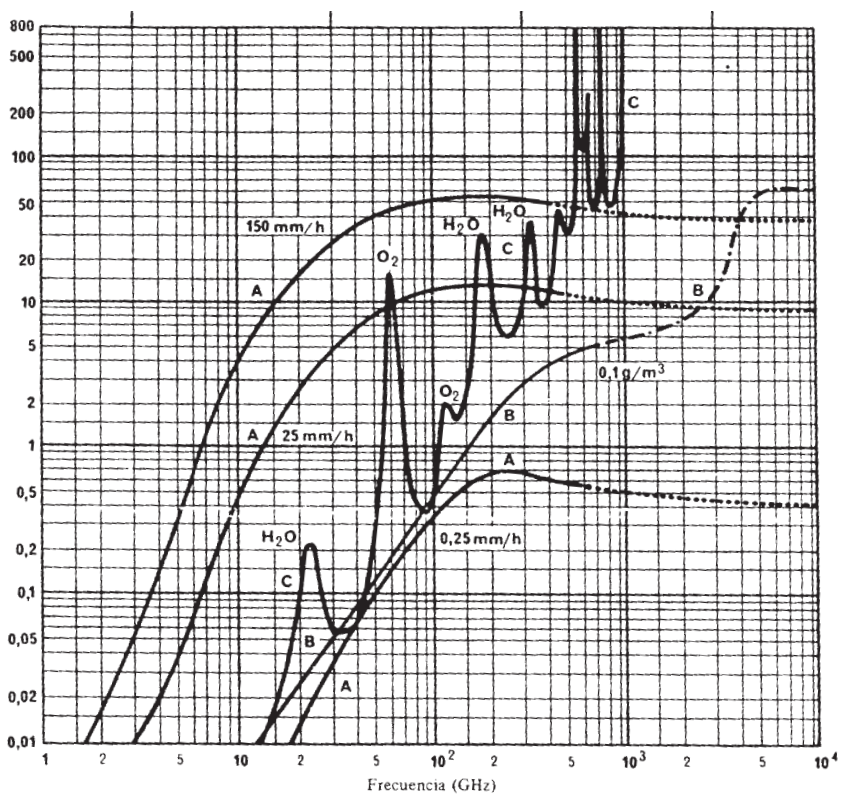


Fig. 2.12 Atenuación específica para un trayecto próximo a la superficie de la tierra. A: lluvia B: niebla, C: componentes gaseosos [UIT]

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La atenuación por absorción molecular se debe principalmente a las moléculas de oxígeno y vapor de agua. Para frecuencias inferiores a 10 GHz es prácticamente despreciable, mientras que a frecuencias superiores presenta un comportamiento creciente con la frecuencia y la aparición de rayas de atenuación asociadas a las frecuencias de resonancia de las moléculas. A 22,3 GHz y 60 GHz aparecen las primeras rayas asociadas al vapor de agua y al oxígeno respectivamente. La correspondiente al oxígeno es especialmente importante ya que a nivel del mar presenta atenuaciones del orden de 15 dB/km, lo que imposibilita las comunicaciones a grandes distancias a esta frecuencia. A frecuencias superiores existen otros picos de absorción. A frecuencias de infrarrojo y visible existe una fuerte atenuación por parte del vapor de agua, hecho de sobras conocido por fenómenos tales como nubes o niebla. En la figura 2.13 se muestra la atenuación específica por absorción molecular en la banda de infrarrojos. Se observa que existe una ventana de baja atenuación para longitudes de onda comprendidas entre 8 y 13 μm.

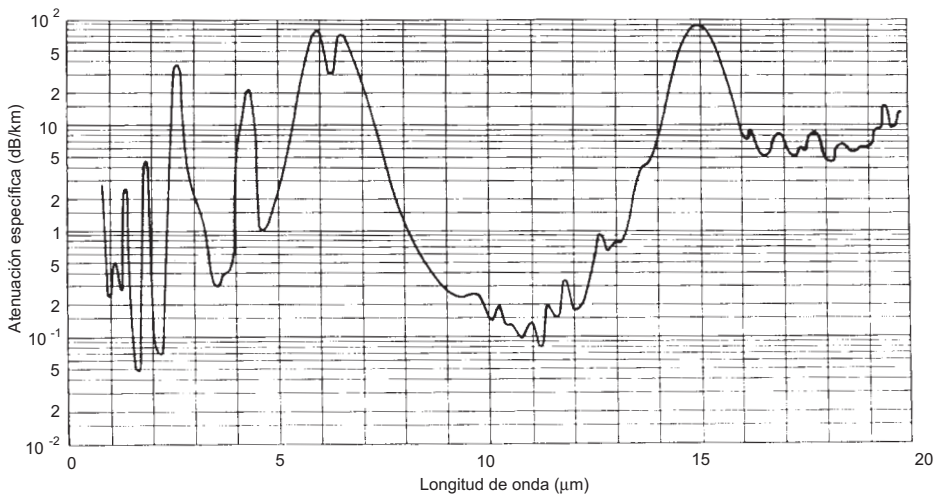


Fig. 2.13 Atenuación específica por absorción molecular en la banda de infrarojos [UIT]

En cuanto a la atenuación por hidrometeoros, es especialmente importante la lluvia, ya que la niebla, la nieve y el granizo producen atenuaciones mucho menores en las bandas de SHF e inferiores. La atenuación por lluvia depende de la intensidad y de factores tales como el tipo de lluvia, el tamaño y la velocidad de las gotas de agua. En la figura 2.12 se observa que la lluvia puede ser una causa importante de atenuación a frecuencias superiores a 1 GHz. La atenuación total producida por la lluvia se obtiene multiplicando la atenuación específica por la longitud de la celda de lluvia. En la planificación de un servicio el efecto de la lluvia debe considerarse de forma estadística teniendo en cuenta la probabilidad de que una cierta intensidad de lluvia ocurra, y sobredimensionando el sistema de forma que la atenuación adicional asociada a esta intensidad de lluvia no afecte al sistema.

Para aplicaciones prácticas la atenuación específica de la lluvia puede calcularse como

$$\gamma_R = K\, R^{\alpha} \quad \text{(dB/km)} \tag{2.21}$$

donde R es la intensidad de la lluvia en mm/h, y las constantes K y α son función de la frecuencia y difieren para polarización vertical y horizontal, ya que las gotas de lluvia no son esféricas sino que por

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

FRECUENCIA (GHz)	K_H	K_V	α_H	α_V
1	0,0000387	0,0000352	0,912	0,880
10	0,0101	0,00887	1,276	1,264
20	0,0751	0,0691	1,099	1,065
30	0,187	0,167	1,021	1,000
40	0,350	0,310	0,939	0,929

Tabla 2.2 Coeficientes para estimar la atenuación específica de la lluvia

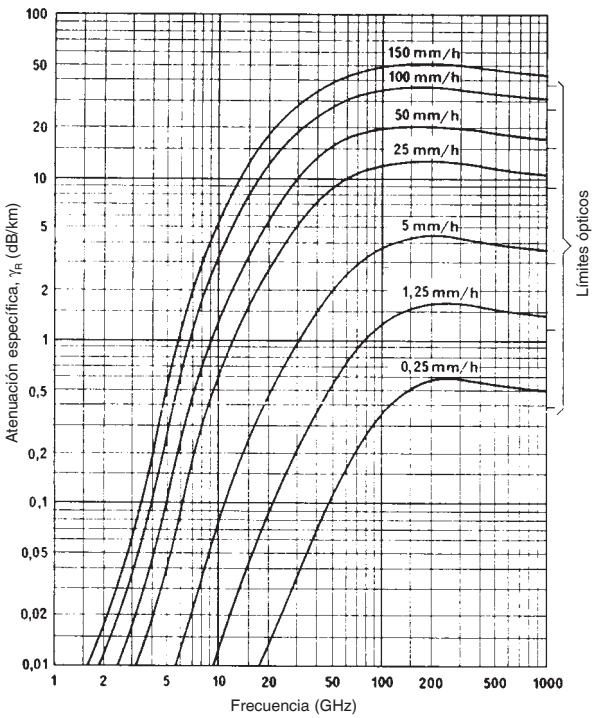


Fig. 2.14 Atenuación específica debida a la lluvia [UIT]

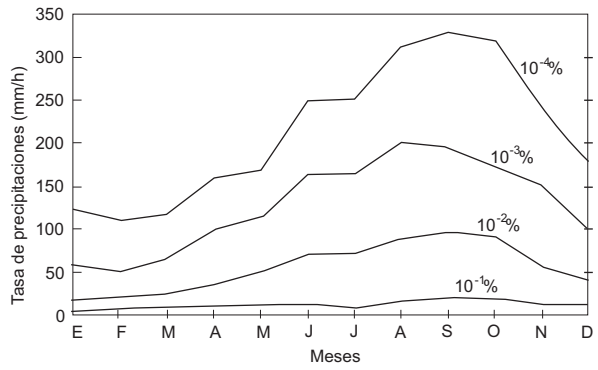


Fig. 2.15 Intensidades de lluvia excedidas un cierto porcentaje del tiempo en la ciudad de Barcelona para cada mes de un año promedio

efecto del rozamiento del aire tienden a achatarse formando esferoides con el eje vertical menor que el horizontal, por lo que la atenuación para la polarización vertical es ligeramente menor que para la horizontal. La relación entre la atenuación específica oscila entre 1,05 y 1,35 dB para cada polarización en el margen de frecuencias entre 10 y 80 GHz. En la tabla 2.2 se muestra el valor de los parámetros K y α para distintas frecuencias y para cada polarización.

En la figura 2.14 se representa la ecuación 2.21 suponiendo que las gotas de lluvia son esféricas. Nótese que para frecuencias inferiores a 100 GHz la atenuación aumenta al aumentar la frecuencia, hasta alcanzar un máximo a partir del que disminuye levemente para mantener un valor constante a frecuencias ópticas.

Para predecir los efectos de la lluvia subsiste el problema de conocer las características de las lluvias en la zona donde se realiza el enlace. En estos casos es fundamental disponer de datos de observación meteorológica que permitan cuantificar de forma probabilística las diferentes intensidades de lluvia. Para ello es necesario disponer de series de observación largas que garanticen la fiabilidad estadística de los datos. En el observatorio Fabra de la ciudad de Barcelona se ha registrado la intensidad de lluvia de forma sistemática y continuada desde el año 1927. En la figura 2.15 se muestra la intensidad de lluvia igualada o excedida un cierto porcentaje del tiempo para cada mes del año. Los datos han sido obtenidos por la Cátedra de Física del Aire de la Universidad de Barcelona promediando las observaciones de 49 años. En el gráfico se observa claramente cómo las precipitaciones más intensas corresponden a las tormentas de otoño en que durante cortos instantes de tiempo pueden alcanzarse intensidades de lluvia superiores a los 400 mm/h. El máximo registrado fue

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

un episodio de 475 mm/h el 3 de septiembre de 1972, si bien su duración fue de breves segundos. La figura 2.16 muestra la intensidad de lluvia y la atenuación producida por una tormenta de otoño en un radioenlace experimental entre el satélite ITALSAT situado en una órbita geostacionaria a 13º de longitud Este y la Escuela de Ingenieros de Telecomunicación de Barcelona a la frecuencia de 40 GHz. Nótese que, aunque durante breves periodos de tiempo, la atenuación puede alcanzar valores importantes.

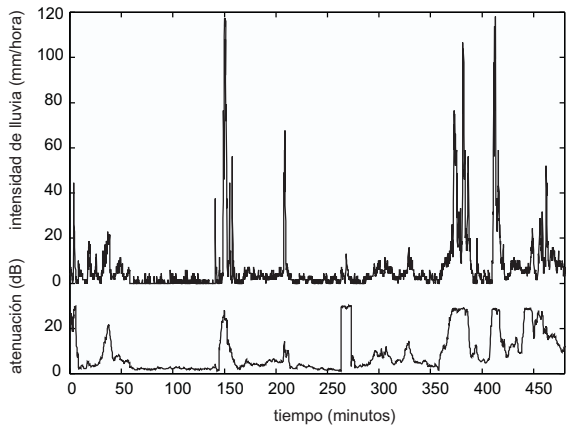


Fig. 2.16 Atenuación producida en un enlace tierra satélite a 40 GHz por una lluvia intensa

En los trayectos inclinados, o trayectos tierra-espacio, los valores de atenuación específica por absorción molecular mostrados en la figura 2.12 no son válidos, ya que en función de la altura disminuyen las concentraciones de gases y, por tanto, la atenuación. El contenido de vapor de agua en la atmósfera decrece rápidamente en función de la altura mientras que el contenido de oxígeno lo hace de forma más gradual.

En la figura 2.17 se muestra la atenuación total de la atmósfera en función de la frecuencia para un trayecto cenital. Para trayectos inclinados debe considerarse el incremento de atenuación debido a la mayor longitud del trayecto recorrido dentro de la atmósfera. Esta puede calcularse del siguiente modo, si ψ es el ángulo de elevación

$$A(\psi) = \frac{A(90°)}{\operatorname{sen}\,\psi} \qquad (2.22)$$

donde A(90º) es la atenuación para el trayecto cenital. Esta expresión corresponde a un modelo de tierra plana que no considera

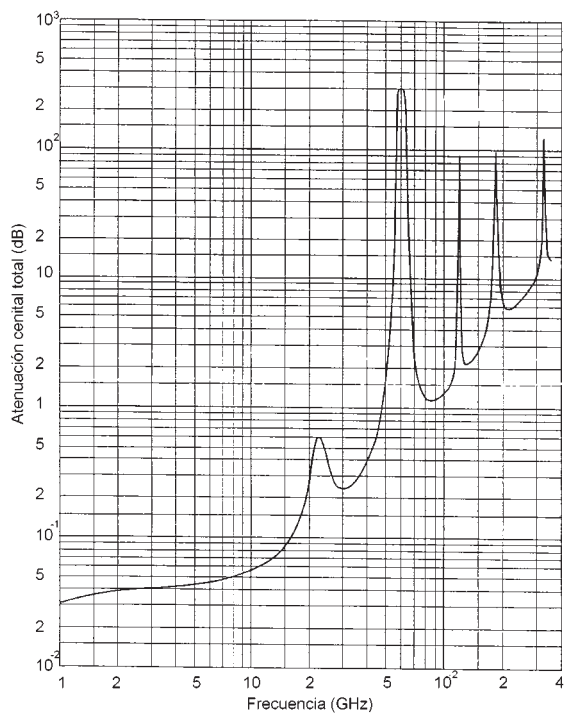


Fig. 2.17 Atenuación atmosférica en un trayecto cenital [UIT]

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

la curvatura de la superficie terrestre y, por tanto, sólo es válida para trayectos que no estén muy alejados de la vertical, como sucede habitualmente en comunicaciones tierra-satélite.

2.3.2 Refracción

El índice de refracción de la atmósfera varía en función de la concentración de gases. Es por este motivo, para una atmósfera normal, que el índice de refracción disminuye con la altura. El índice de refracción del aire es muy próximo a la unidad. Para facilitar los cálculos se define el coíndice de refracción o refractividad N como

$$N = (n-1)\cdot 10^6 \text{ unidades N} \tag{2.23}$$

de forma que la refractividad tiene en la superficie terrestre valores de centenas de unidades N. Si se supone la atmósfera como un gas ideal con una cierta concentración de vapor de agua, la refractividad puede obtenerse como

$$N = 77{,}6\frac{P}{T} + 3{,}73\cdot 10^5\,\frac{e}{T^2} \tag{2.24}$$

donde:

P: presión atmosférica en mbar

T: temperatura absoluta en K

e: presión parcial del vapor de agua en mbar

Tanto la presión atmosférica como la temperatura y el contenido de vapor de agua son función de la altura. Para un perfil atmosférico medio la refractividad varía exponencialmente en función de la altura. La UIT define como atmósfera de referencia aquella en que la refractividad varía como

$$N(h) = 315\, e^{-0{,}136h} \text{ unidades N} \tag{2.25}$$

donde h es la altura en km.

Esta atmósfera corresponde a un valor promedio sobre la superficie terrestre a lo largo del tiempo, en donde 315 es el valor de la refractividad en la superficie terrestre, y se supone que la atmósfera está estratificada en sentido horizontal (la refractividad depende sólo de la altura).

La principal consecuencia de la variación del índice de refracción atmosférico es la refracción de las ondas, es decir, que las ondas no se propagan en línea recta. Para un medio estratificado como el de la figura 2.18, en que el índice de refracción disminuye con la altura, la trayectoria de la onda se curva hacia la región de mayor índice de refracción.

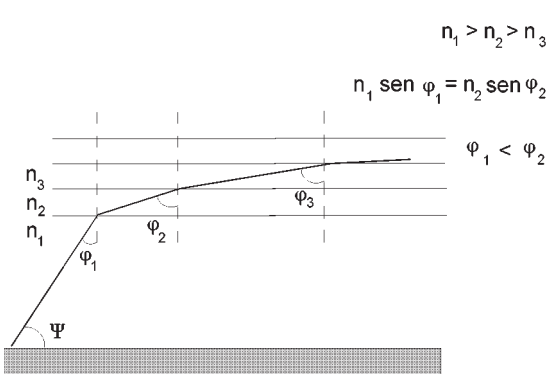


Fig. 2.18 Curvatura de las trayectorias en la atmósfera

El radio de curvatura r de la trayectoria está dado por

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{n(h)}\frac{dn}{dh}\cos\psi \tag{2.26}$$

Como el índice de refracción es muy próximo a 1, y dado que en general las antenas se encuentran a alturas semejantes, es decir, el ángulo ψ se aproxima a cero, la expresión anterior puede escribirse como

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\frac{1}{r} = -\frac{dn}{dh} \tag{2.27}$$

Cuando la variación de n con la altura es significativa, el radio de curvatura no es muy grande y la trayectoria de las ondas no es recta sino que se curva debido a la refracción. Este efecto debe tenerse en cuenta al considerar la visibilidad entre antenas, la distancia al horizonte y la distancia entre trayectorias y obstáculos. Para simplificar los cálculos se supone que en la proximidad de la superficie terrestre el gradiente de la refractividad es constante. En este caso el radio de curvatura de la trayectoria es constante, es decir, describe una circunferencia. Es posible definir un radio equivalente de la tierra, para la cual las ondas se propagan en línea recta. La condición que debe cumplir este radio equivalente es

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_T} - \frac{1}{r} = \left(157 + \frac{dN}{dh}\right) \cdot 10^{-6} \tag{2.28}$$

Para la atmósfera de referencia al nivel del mar (gradiente de la refractividad igual a -39 unidades N/km) se obtiene que

$$R_{eq} \approx \frac{4}{3} R_T \approx 8.500 \text{ km} \tag{2.29}$$

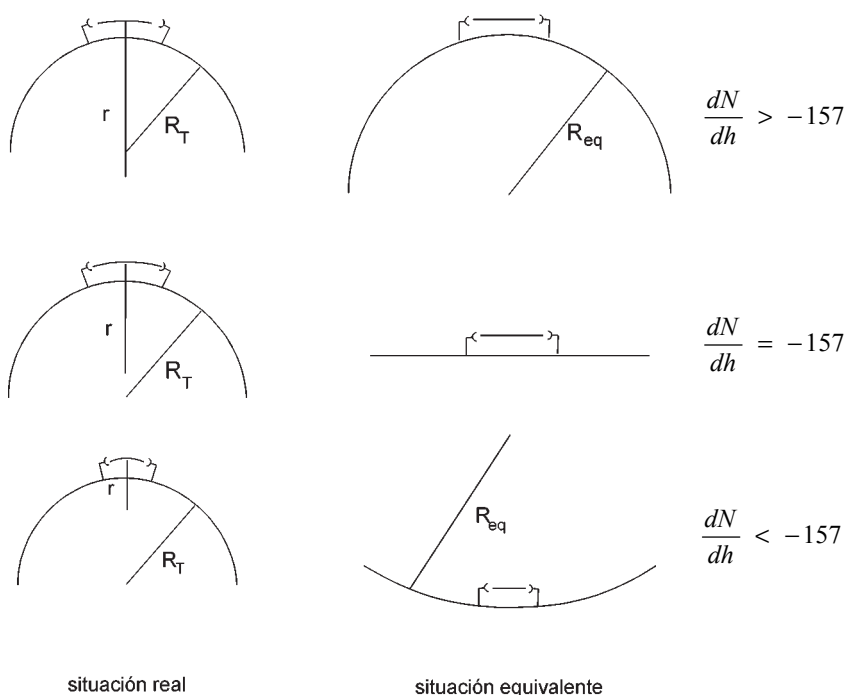


Fig. 2.19 Radio equivalente de la tierra

Nótese que el valor de gradiente de la refractividad de -157 unidades N/km corresponde a un punto crítico. En este caso el radio equivalente de la tierra es infinito, ya que el radio de curvatura del rayo y el radio real de la tierra es el mismo. Para la atmósfera normal (gradiente del índice de refracción

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de -39 unidades N/km) el radio de curvatura del rayo es mayor que el de la tierra. Si el gradiente es inferior a -157 unidades N/km el radio equivalente de la tierra es negativo debido a que el radio de curvatura del rayo es inferior al radio de la tierra. En este último caso la trayectoria de la onda se curva de tal manera que incide sobre la superficie de la tierra. En esta situación puede producirse un guiado de la onda entre la superficie de la tierra y una capa atmosférica próxima. Este fenómeno se denomina propagación por conductos y permite la propagación de ondas electromagnéticas con atenuaciones muy inferiores a las correspondientes al espacio libre.

La propagación dentro de un conducto puede analizarse a partir de los modos de propagación dentro de una guía de ondas. En función de la dimensión del conducto existe una frecuencia mínima de corte por debajo de la cual no hay propagación dentro del mismo. La formación y dimensión de los conductos sólo puede describirse de forma estadística, si bien las alturas habituales son de algunos metros y en condiciones extraordinarias pueden alcanzar los centenares de metros. Consecuentemente la propagación por conductos afecta primordialmente a las bandas de VHF, UHF y SHF, si bien en esta última banda al ser la atenuación específica de la atmósfera mayor el fenómeno es menos relevante.

En la figura 2.20 se muestra una simulación por ordenador de la trayectoria seguida por rayos con diferentes ángulos de salida, para una antena situada a 50 m de altura y un conducto de 200 m de grosor y gradiente de -500 unidades N/km; en la gráfica se representa el índice de refracción modificado M en función de la altura h, siendo $M = N + 10^6\, h/R_T$. Nótese que para ciertos ángulos de salida el rayo queda atrapado entre la superficie de la tierra y una capa atmosférica de poca altura.

La formación de conductos está asociada a grandes variaciones del gradiente del índice de refracción, debidas a su vez a variaciones elevadas en la concentración de vapor de agua en las capas altas de la atmósfera. Es por este motivo que la formación de conductos es más probable sobre mares cálidos, mientras que sobre tierra es un fenómeno menos frecuente.

La propagación por conductos es suficientemente impredecible como para no constituir un modo de propagación sobre el que se pueda establecer un servicio fijo de radiocomunicaciones con parámetros de calidad aceptables; sin embargo, su probabilidad es suficientemente elevada como para considerarse, al evaluar las posibles interferencias causadas entre estaciones que comparten la misma frecuencia, que en situaciones normales no se interfieren pero que ante una eventual formación de conductos pueden dar sobrealcances anormales y producir interferencias. Así, en los meses de verano es habitual la formación de conductos sobre el mar Mediterráneo que permiten el alcance a grandes distancias en las bandas de VHF y UHF, fenómeno que afecta especialmente a los servicios de radiodifusión de FM y televisión.

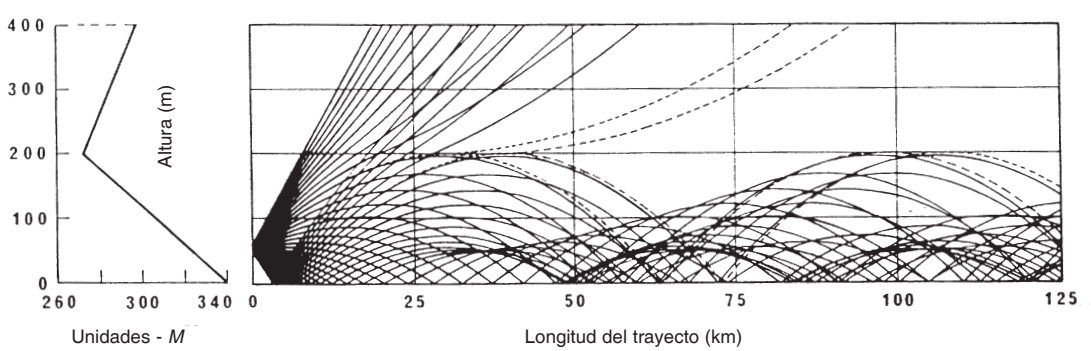


Fig. 2.20 Propagación por conductos. Espesor del conducto 200 m, altura de la antena transmisora 50 m [UIT]

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

2.3.3 Difusión troposférica

Anteriormente se ha supuesto que la atmósfera es un medio estratificado en el que el índice de refracción varía solamente con la altura. En realidad existen en la atmósfera heterogeneidades que producen fluctuaciones locales del índice de refracción. Si mediante la antena transmisora se radia hacia una de estas heterogeneidades suficiente energía, la energía interceptada y rerradiada hacia la antena receptora bastará para realizar una comunicación transhorizonte con niveles de señal superiores a los que se conseguirían por difracción sobre la tierra esférica.

La difusión troposférica es importante en las bandas de VHF y UHF en las que el tamaño de las heterogeneidades es comparable a la longitud de onda, y la atenuación atmosférica es despreciable. Permite alcances de centenares de kilómetros y, sin embargo, está sujeta a desvanecimientos debido a variaciones locales rápidas de las condiciones atmosféricas. Este último inconveniente puede superarse aumentando la potencia de transmisión. Hasta el advenimiento de los satélites, la comunicación troposférica era la única posibilidad de establecer enlaces a grandes distancias en las bandas de VHF y UHF; en la actualidad su uso ha disminuido, si bien se sigue usando en los radares transhorizonte.

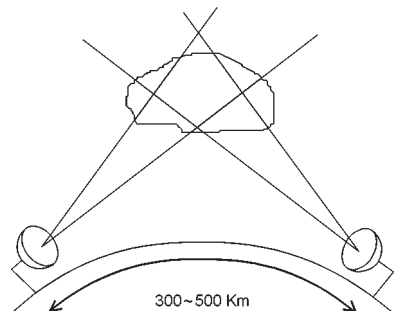


Fig. 2.21 Propagación por difusión troposférica

2.4 Efecto de la ionosfera

2.4.1 Introducción

El 12 de diciembre de 1901, Marconi consiguió realizar de forma satisfactoria la primera comunicación radiotelegráfica transatlántica cubriendo una distancia de 3.000 km entre Gales y Terranova, en el extremo oriental de Canadá. Unos años antes, Hertz había comprobado experimentalmente la existencia de ondas electromagnéticas, cuya naturaleza era similar a la de la luz. Por este motivo el éxito de Marconi resultaba inexplicable considerando que las ondas electromagnéticas deben propagarse según trayectos rectilíneos y que la esfericidad de la tierra impedía la visibilidad directa. De hecho el éxito inicial de Marconi fue recibido con cierto escepticismo por la comunidad científica, que en parte dudaba de su veracidad. En el año 1902 otros experimentos realizados por Marconi pusieron de relieve que las comunicaciones a grandes distancias sufrían fuertes variaciones según se realizasen durante el día o la noche. Así, experimentos de recepción a bordo de un barco desde una estación en tierra mostraron que a distancias superiores a 1.000 km las comunicaciones fallaban totalmente durante el día, mientras que durante la noche era posible la recepción a distancias superiores a los 3.000 km. Marconi estaba más interesado en las posibilidades de explotación comercial de las comunicaciones radiotelegráficas a grandes distancias que en la explicación de los fenómenos responsables de estas comunicaciones, por lo que concentró su actividad en la aplicación práctica de estos hechos más que en la justificación teórica de los mismos.

En el mismo año 1902, Kennelly y Heaviside, de forma independiente, postularon la existencia de una capa ionizada en la parte alta de la atmósfera como la responsable de la reflexión de las ondas electromagnéticas, explicando de esta forma el mecanismo de propagación a grandes distancias.

El primer experimento para realizar mediciones directas de la ionosfera lo llevaron a cabo Appleton y Barnett en Londres, en 1925. Consistía en emitir una señal de onda continua de fase

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

variable con el tiempo. En un receptor próximo se recibía la interferencia entre la onda directa y la reflejada. A partir de la formación de interferencias constructivas y destructivas les fue posible determinar la altura de la capa ionizada. A esta capa la llamaron capa eléctrica, o abreviadamente capa E. Estudios posteriores revelaron la existencia de capas inferiores y superiores a la capa E, a las que manteniendo el orden alfabético se las denominó D y F respectivamente.

Investigaciones más profundas demostraron que la ionosfera no es un medio estratificado, sino que presenta variaciones continuas de la densidad de ionización en función de la altura. Por razones históricas se mantiene la nomenclatura de capas D, E y F para designar cada una de las regiones de la ionosfera de altitud creciente. Bajo ciertas condiciones la capa F se desdobla en dos, las capas F_1 y F_2.

La causa primordial de ionización de la ionosfera es la radiación solar en la región del espectro de los rayos X y ultravioletas. También contribuyen a la ionización la incidencia de partículas cargadas (protones y electrones) de origen solar y los rayos cósmicos galácticos. La creación de iones depende de la energía de las radiaciones y de la densidad de moléculas. Para alturas elevadas la energía de la radiación incidente es elevada pero la densidad de moléculas es baja, mientras que a alturas más bajas la densidad de moléculas es alta pero la energía de las radiaciones ha sido absorbida en gran parte, de modo que la densidad de ionización máxima se produce en un punto intermedio. La densidad de ionización existente es el resultado de un equilibrio dinámico entre la ionización y la desionización producida principalmente por la colisión entre iones.

Dado que la causa principal de ionización es la actividad solar, el comportamiento de la ionosfera está muy influido por los ciclos solares observados desde la tierra. Los periodos de estos ciclos son: diurno, anual y de once años. Este último está asociado a los periodos de aparición de las manchas solares. En la figura 2.22 se muestra la densidad de ionización típica de la ionosfera en función de la altura para el día y la noche.

La capa inferior D se extiende entre los 50 y 90 km de altura. Su densidad de ionización aumenta rápidamente con la altura y presenta grandes variaciones entre el día y la noche. De hecho, por la noche prácticamente desaparece, por lo que habitualmente se considera que la capa D es una capa diurna. La capa E es la zona intermedia comprendida entre los 90 y 130 km de altura. Su comportamiento está muy ligado a los ciclos solares. A pesar de presentar grandes variaciones de ionización conserva un nivel apreciable durante la noche. Alcanza el máximo de ionización durante el mediodía en los meses de verano con niveles en torno a los 10^{11} electrones/m^3. En ciertas ocasiones aparece una ionización anómala en la capa E que se denomina capa E esporádica (E_s). En zonas templadas la capa E_s es bastante frecuente en verano, y alcanza densidades iónicas varias veces superior a la capa E circundante. La capa F se extiende hacia arriba a partir de los 130 km de altitud. Debido al distinto comportamiento de la parte inferior y superior de la capa, ésta se subdivide en capa F_1 entre los 130 y 210 km y F_2 a partir de los 210 km. La capa F_1 desaparece durante la noche mientras que la capa F_2 mantiene niveles de ionización relativamente constantes entre el día y la noche.

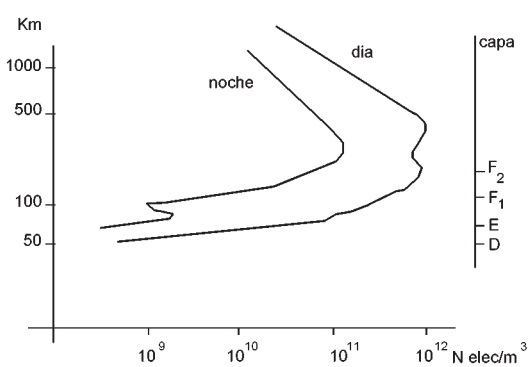


Fig. 2.22 Densidad de ionización típica de la ionosfera

Este comportamiento se explica por la poca densidad de móleculas en las capas altas de la atmósfera, lo que dificulta la recombinación por colisiones y por fenómenos dinámicos de difusión de iones desde capas inferiores.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

2.4.2 Propagación en un medio ionizado

La propagación de ondas electromagnéticas en la ionosfera se puede modelar a partir de la propagación en plasmas. Un plasma es una región de espacio, con la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío, que contiene electrones libres. Un modelo simplificado es el de plasma frío, en el que se desprecia el movimiento de los electrones por causas térmicas. Un análisis más acorde con la realidad debe considerar la presencia de un campo magnético estático, de la misma manera que en la ionosfera existe el campo magnético terrestre.

Considérense en primer lugar las fuerzas a las que se encuentra sometido un electrón inmerso en el campo electromagnético de una onda plana. Éste experimentará una fuerza debida al campo eléctrico y otra al campo magnético dadas por

$$\begin{aligned} \left|\vec{F}_e\right| &= e\left|\vec{E}\right| = e\,E \\ \left|\vec{F}_m\right| &= e\left|\vec{v}\times\vec{B}\right| = e\,v\,B\,\mathrm{sen}\,\theta = e\,v\,\frac{\mu}{\eta}E\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{v}{c}\left|\vec{F}_e\right|\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde e es la carga del electrón, v su velocidad y c la velocidad de la luz. Nótese que la fuerza experimentada por el electrón debida al campo magnético de la onda plana es despreciable frente a la fuerza producida por el campo eléctrico, cuando la velocidad del electrón es mucho menor que la de la luz.

La ecuación del movimiento de un electrón en un plasma frío, en el que se propaga una onda plana y existe un campo magnético estático $\vec{H}_o$ está dada por

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\,\vec{E} - \upsilon\,m\,\vec{v} - e\,\mu_o\,\vec{v}\times\vec{H}_0 \tag{2.31}$$

donde se ha considerado también un término de pérdidas por colisión entre electrones y donde υ es la frecuencia de colisiones. La presencia del campo magnético estático dificulta el análisis, por lo que en los desarrollos que siguen se va a omitir, si bien esto no significa que el efecto del campo magnético terrestre sobre la propagación ionosférica sea despreciable. Suponiendo variaciones armónicas de la forma $e^{j\omega t}$, de la expresión anterior se deduce que

$$\vec{v} = \frac{-e\,\vec{E}}{m\,(\upsilon + j\,\omega)} \tag{2.32}$$

Si existe una densidad de N electrones/m^3 se creará una densidad de corriente

$$\vec{J} = -N\,e\,\vec{v} = \frac{N\,e^2}{m\,(\upsilon + j\,\omega)}\vec{E} \tag{2.33}$$

asociada al movimiento de los electrones, y a partir de las ecuaciones de Maxwell (3.5)

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon_0\vec{E} = j\omega\varepsilon_0\left[1 + \frac{N\,e^2}{j\omega\varepsilon_0\,m\,(j\omega+\upsilon)}\right]\vec{E} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon^*\,\vec{E} \tag{2.34}$$

es posible definir la permitividad eléctrica relativa y la conductividad del plasma

$$\varepsilon^* = \varepsilon' - j\,\varepsilon'' = \varepsilon' - j\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0\,\omega} \quad \text{con} \quad \varepsilon' = 1 - \frac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0(\upsilon^2+\omega^2)} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{N\,e^2\,\upsilon}{m\,(\upsilon^2+\omega^2)} \tag{2.35}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En ausencia de colisiones entre iones ($\upsilon = 0$) las expresiones anteriores pueden escribirse como

$$\varepsilon' = 1 - \frac{N e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2} = 1 - \frac{f_p^2}{f^2} \qquad \sigma = 0 \tag{2.36}$$

donde se ha introducido la frecuencia de resonancia del plasma f_p, también llamada frecuencia crítica

$$f_p^2 = \left(\frac{\omega_p}{2\pi} \right)^2 = \frac{N e^2}{(2\pi)^2 m \varepsilon_0} \tag{2.37}$$

Al sustituir las constantes por su valor se obtiene que

$$f_p = 9 \sqrt{N} \ \text{(Hz)} \tag{2.38}$$

con la densidad de ionización en electrones por m^3.

Una onda plana propagándose en este supuesto por la ionosfera tiene una constante de fase $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon'}$. En el caso que la frecuencia sea inferior a la frecuencia de resonancia, la constante de fase será imaginaria y la onda se atenuará de forma exponencial con la distancia; por el contrario, si la frecuencia es superior a f_p, la constante de fase es real. En este último caso la permitividad relativa es inferior a la unidad y por tanto la velocidad de fase es superior a la de la luz

$$v_{fase} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'}} \tag{2.39}$$

La velocidad de grupo es

$$v_{grupo} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{v_{fase}}{1 - \frac{\omega}{v_{fase}} \frac{d v_{fase}}{d\omega}} = \frac{c^2}{v_{fase}} = c \sqrt{\varepsilon'} \tag{2.40}$$

Nótese que en este caso la velocidad de propagación es función de la frecuencia y, por tanto, la ionosfera constituye un medio dispersivo.

Si se considera la existencia de colisiones en la ionosfera, la constante dieléctrica ε^* tiene una parte imaginaria no nula, por lo que el medio presentará atenuación. En este caso la constante de propagación compleja puede escribirse como

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon_0 \left[\varepsilon' - j \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right]} \tag{2.41}$$

Bajo la hipótesis de buen dieléctrico

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} << \varepsilon' \tag{2.42}$$

se obtiene que

$$\alpha = 60 \pi \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon'}} \quad \text{(Neper/m)} \tag{2.43}$$

Suponiendo que el índice de refracción es próximo a la unidad y que la frecuencia de la onda es mucho mayor que la frecuencia de las colisiones ($\omega >> \upsilon$) la atenuación puede escribirse como

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\alpha = 1{,}16 \cdot 10^{-3} \frac{N \upsilon}{f^2} \quad \text{(dB/km)} \tag{2.44}$$

Ejemplo 2.4 La frecuencia de colisión iónica es máxima a unos 75 km de altura (capa D), con un valor aproximado de $\upsilon = 2 \cdot 10^6$ s^{-1}. La densidad de ionización máxima en esta capa para alturas entre los 80 y 90 km es de 10^9 electrones/m^3, valor que se alcanza durante el mediodía. Para esta densidad de ionización la frecuencia de resonancia es de 300 kHz. La atenuación a la frecuencia de 1 MHz es de 2,3 dB/km, mientras que a 10 MHz es tan sólo de 0,023 dB/km. Durante la noche los iones prácticamente desaparecen en la capa D por lo que no existe atenuación apreciable. En el resto de las capas la frecuencia de colisión es mucho menor, debido a que la atmósfera es más tenue, por lo que la atenuación es prácticamente despreciable.
Por tanto, la capa D produce durante el día una fuerte atenuación a las frecuencias correspondientes a la banda de MF, a pesar de tratarse de frecuencias superiores a la frecuencia de resonancia.

2.4.3 Influencia del campo magnético terrestre

En el análisis anterior no se ha considerado el efecto del campo magnético terrestre. Un plasma sometido a un campo magnético constante posee características anisótropas, de forma que la constante dieléctrica no es un escalar sino un tensor.

El efecto más notable es que la constante de propagación es función de la polarización de la onda. En concreto la constante de propagación es distinta para una onda polarizada circularmente a derechas o a izquierdas. Esto produce una rotación en el plano de polarización de una onda linealmente polarizada. Considérese la siguiente onda linealmente polarizada según el eje *x*, que se propaga en la dirección del eje *z*, y que se descompone como la suma de dos ondas polarizadas circularmente

$$\vec{E}_i = 2E_0 e^{-jk_0 z} \hat{x} = E_0 (\hat{x} + j\hat{y}) e^{-jk_0 z} + E_0 (\hat{x} - j\hat{y}) e^{-jk_0 z} \tag{2.45}$$

Tras propagarse por un medio anisótropo de espesor *l* con constantes de propagación k_1 y k_2 para cada una de las polarizaciones circulares se obtiene (despreciando las reflexiones en las superficies de separación entre medios)

$$\vec{E} = 2E_0 e^{-j(k_1+k_2)\frac{l}{2}} \left[\hat{x} \cos(k_2 - k_1)\frac{l}{2} + \hat{y} \operatorname{sen}(k_2 - k_1)\frac{l}{2} \right] \tag{2.46}$$

que es la expresión de una onda polarizada linealmente con una dirección rotada respecto al eje *x* un ángulo ϕ dado por

$$\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\left[(k_2 - k_1)\frac{l}{2} \right] \tag{2.47}$$

A este efecto se le denomina rotación de Faraday. El ángulo de rotacion de la polarización depende de la diferencia entre las dos constantes de propagación. Esta diferencia es función de la dirección de propagación de la onda respecto al campo magnético terrestre, de la intensidad del campo magnético y de la frecuencia de resonancia de la ionosfera, e inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Para frecuencias superiores a 10 GHz la rotación de Faraday es totalmente despreciable (inferior a 1º); sin

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

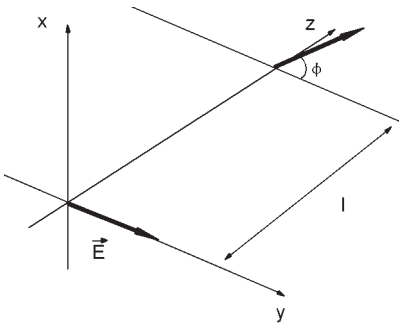


Fig. 2.23 Rotación de Faraday

embargo, en las bandas de VHF y UHF puede tener valores considerables que son impredecibles. Es por este motivo que en estas bandas es necesario el empleo de polarización circular en las comunicaciones tierra - satélite, ya que el empleo de polarización lineal tendría asociadas pérdidas por desacoplo fluctuantes, impredecibles y con valores potencialmente elevados.

Por el contrario, a frecuencias superiores a 10 GHz, puede emplearse polarización lineal sin que exista una rotación apreciable en la polarización, y de hecho es habitual en las comunicaciones espaciales en estas bandas la reutilización de frecuencias mediante el empleo de polarizaciones lineales ortogonales.

2.4.4 Comunicaciones ionosféricas

La existencia de la ionosfera permite, tal como comprobó Marconi, las comunicaciones a grandes distancias. El efecto de la ionosfera es distinto para las diferentes bandas de frecuencias. A frecuencias bajas y muy bajas (bandas de LF y VLF) la ionosfera supone un cambio brusco en términos de λ del índice de refracción atmosférico. Esta variación abrupta produce una reflexión de la onda incidente en la parte baja de la ionosfera.

Se puede considerar que la superficie de la tierra y la parte baja de la ionosfera forman una guía de ondas que favorece la propagación a grandes distancias en estas bandas de frecuencias (típicamente entre los 5.000 y 20.000 km). Dado que la onda no llega a penetrar en la ionosfera, este modo de propagación es relativamente insensible a las variaciones de la ionosfera.

A frecuencias más elevadas (MF y superiores) la onda penetra en la ionosfera. La ionosfera es un medio cuyo índice de refracción varía con la altura. La densidad de ionización aumenta con la altura hasta alcanzar el máximo entre los 300 y 500 km. A medida que la densidad de ionización aumenta, el índice de refracción disminuye, produciéndose la refracción de la onda, o curvatura de la trayectoria, de forma análoga a la refracción atmosférica. Bajo ciertas condiciones la curvatura es tal que la onda regresa a la tierra.

La condición para que la onda regrese a la tierra es que para cierta altura se cumpla, según la ley de Snell,

$$1 \cdot \operatorname{sen}\phi_i = n \cdot \operatorname{sen} 90° = n = \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \tag{2.48}$$

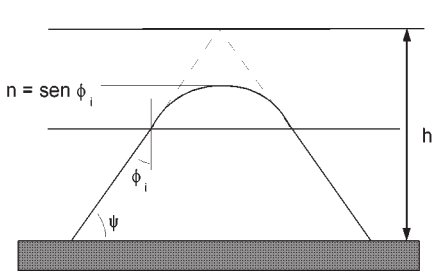


Fig. 2.24 Reflexión ionosférica para tierra plana

que mediante una sencilla manipulación se convierte en

$$\cos\phi_i = \frac{f_p}{f} \tag{2.49}$$

Nótese que, aunque el proceso físico involucrado en este modo de propagación es una refracción, es habitual referirse a él como reflexión ionosférica, considerando que se produce una reflexión a una altura virtual h.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Se define la frecuencia máxima utilizable básica (MUF básica) como

$$MUF = \frac{f_p}{\cos\phi_i} = \frac{f_p}{\operatorname{sen}\psi} \tag{2.50}$$

El significado de la MUF es el siguiente: para unas condiciones ionosféricas dadas (f_p) y ángulo de elevación respecto al horizonte (ψ), la MUF es la máxima frecuencia utilizable para que la onda regrese a la tierra. Si se emplea una frecuencia mayor la curvatura de la trayectoria no es suficiente. Nótese que la frecuencia de resonancia es la frecuencia a la que se produce reflexión cuando se incide normalmente a la ionosfera.

La distancia cubierta en un enlace ionosférico depende del ángulo de incidencia y de la altura virtual a la que se produce la reflexión. La altura virtual es de unos 100 km para la capa E, entre 200 y 250 km para la capa F_1 y entre los 250 y 400 km para la capa F_2.

El valor del ángulo de elevación máximo está limitado, para una frecuencia dada, por

$$\operatorname{sen}\psi_{máx} = \frac{f_p}{f} \tag{2.51}$$

de forma que si se supera este ángulo la onda no regresa a la tierra. Este ángulo fija la distancia mínima que puede cubrirse con una reflexión ionosférica. Esta distancia mínima está dada por

$$d_{mín} = 2h\sqrt{\left(\frac{f}{f_p}\right)^2 - 1} \tag{2.52}$$

donde h es la altura a la que se produce la reflexión virtual. Esta expresión supone un modelo de tierra plana y no es válida cuando el ángulo de incidencia en la ionosfera es grande, ya que en este caso debe considerarse el efecto de la curvatura de la tierra.

Ejemplo 2.5 La distancia mínima que puede cubrirse con reflexión en las capas E, F_1, y F_2 a la frecuencia de 10 MHz es

CAPA	DENSIDAD DE IONIZACIÓN MÁXIMA (elec/m^3)	f_p (MHz)	h (km)	d_{min} (km)
E	10^{11}	2,84	110	740
F_1	$2\cdot10^{11}$	4	220	1.000
F_2	$5\cdot10^{11}$	6,36	300	730

Obsérvese cómo para distancias inferiores a los 700 km no es posible establecer comunicaciones ionosféricas; por otra parte, por mecanismos de difracción, es posible obtener alcances en estas frecuencias de algunas decenas de km, por lo que queda una zona entre los 40 y 700 km denominada zona de silencio en la que no es posible establecer una radiocomunicación a esta frecuencia y con estas condiciones ionosféricas.

La distancia máxima alcanzable está limitada por la potencia del transmisor, la sensibilidad del receptor, la altura virtual de reflexión y la curvatura terrestre. Considerando el efecto de refracción de la atmósfera terrestre esta distancia está limitada en torno a los 4.000 km. Sin embargo, es posible alcanzar distancias mayores mediante reflexiones múltiples. Estas reflexiones múltiples se producen entre la ionosfera y la superficie de la tierra, o bien entre capas ionosféricas distintas. En estos casos la longitud de los enlaces puede ser superior a los 10.000 km.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La propagación por reflexión ionosférica es importante en las bandas de MF y HF. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en la banda de MF, y especialmente a frecuencias inferiores a 1 MHz, la capa D presenta una atenuación elevada, proporcional a la densidad de ionización, que imposibilita la refracción ionosférica en esta banda durante el día. Es por este motivo que la propagación ionosférica en la banda de MF presenta un comportamiento totalmente distinto durante el día y la noche. Durante el día queda totalmente absorbida por la capa D, mientras que por la noche, cuando la capa D desaparece, es posible la refracción en las capas superiores y establecer enlaces ionosféricos.

Los enlaces en HF no sufren estos problemas ya que la atenuación en la capa D es proporcional a $1/f^2$, y por tanto despreciable en esta banda.

En el siguiente ejemplo se calcularán las coberturas por onda de superficie y reflexión ionosférica de una emisión de radiodifusión en onda media.

Ejemplo 2.6 Una emisora radia a 1,5 MHz una potencia de 1 kW con un monopolo vertical corto ($D_t = 3$). La señal posee un ancho de banda de 8 kHz y se recibe con una antena de ferrita ($D_r = 1{,}5$) de eficiencia $\eta_l = 5\cdot10^{-6}$. La temperatura ambiente es de 290 K y la temperatura de ruido de antena 10^9 K.

Además de la propagación por onda de superficie, se tiene durante la noche reflexión ionosférica en la capa E. La altura de esta capa es h = 100 km, su frecuencia de resonancia de noche es $f_p = 1$ MHz y se pueden estimar las pérdidas en la reflexión en 8 dB. ¿Dónde se recibirá esta emisora con una relación señal-ruido mejor de 10 dB?

La potencia de ruido en bornes de la antena valdrá

$$N = k\,T_a\,B\,\eta_1 + k\,T_{amb}\,B\,(1-\eta_1) = 5{,}8\cdot10^{-16}\ \mathrm{W}$$

y la densidad de potencia incidente sobre la antena ha de cumplir

$$S = \wp\frac{\lambda^2}{4\pi}D_r\,\eta_l > 10\,\mathrm{N}, \qquad \wp > 2{,}4\cdot10^{-13}\ \mathrm{W/m^2}$$

a la que corresponde una intensidad de campo

$$E > (\wp\,\eta)^{\frac{1}{2}} = 9{,}6\,\mu\mathrm{V/m} \qquad (19{,}6\ \mathrm{dB}\mu\mathrm{V/m})$$

Para la propagación por onda de superficie, sobre una tierra típica, se obtiene de la figura 2.11 un alcance de 75 km.

El máximo alcance por reflexión ionosférica resulta para salida rasante y se obtiene a partir de la figura 2.25

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right) = 0{,}176 = 10{,}1°$$

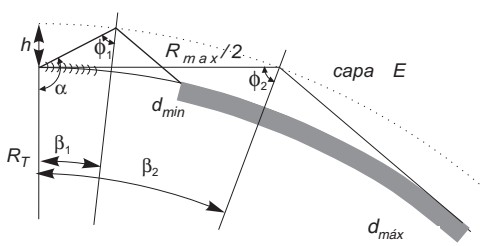


Fig. 2.25 Alcance por reflexión ionosférica

$$\phi_2 = 90° - \beta_2 = 79{,}9°$$

$$d_{\mathrm{máx}} = 2\beta_2\,R_T = 2.248\ \mathrm{km}$$

El trayecto recorrido por la onda es de 2.272 km y teniendo en cuenta las pérdidas por reflexión se tiene en el receptor S/N=25 dB.

El mínimo alcance se obtiene de (2.49), con el resultado

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{f_p}{f}\right) = 0{,}841 = 48{,}2°$$

$$\frac{R_T + h}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{R_T}{\operatorname{sen}\phi_1}, \quad \alpha = 130{,}8°, \quad \beta_1 = 0{,}0175 = 1°$$

$$d_{\text{mín}} = 2\,\beta_1\,R_T = 224 \text{ km}$$

Durante el día se recibirá la emisión hasta una distancia de 75 km, mientras que de noche se añadirá una segunda zona de cobertura entre 224 y 2.248 km. Quedará una zona intermedia de silencio entre 75 y 224 km.

Para establecer una comunicación ionosférica es necesario conocer la frecuencia de resonancia y la altura virtual a la que se produce la reflexión. Las predicciones de las condiciones ionosféricas se realizan en función de observaciones sobre largos periodos de tiempo. Existe una red mundial de observatorios que realizan mediciones continuas de la ionosfera, y es a partir de estos datos que pueden realizarse estimaciones del comportamiento de la ionosfera.

La forma más simple de medir la ionosfera es transmitir un pulso de una determinada frecuencia *f*, de corta duración, en dirección vertical. El pulso se reflejará cuando la densidad de iones sea $f = 9\sqrt{N}$. El tiempo que tarda el pulso en regresar depende de la altura a la que se produce la reflexión. Al variar la frecuencia del pulso transmitido es posible determinar la altura de las distintas capas.

En las figuras 2.26 y 2.27 se presenta el valor medio mensual de la altura de capas y la frecuencia crítica o de resonancia para cada hora del día para los meses de junio y diciembre de 1985. Estos datos han sido elaborados por el Observatorio del Ebro (Roquetas, Tarragona) a partir de medidas realizadas cada hora. Se observa la influencia de la actividad solar en la densidad de ionización que se traduce en una mayor frecuencia de resonancia en verano que en invierno. Nótese la aparición de la capa E esporádica (capa E_s) en verano con valores de ionización muy superiores a los de la capa E, y la fuerte dependencia de la capa E con la radiación solar,

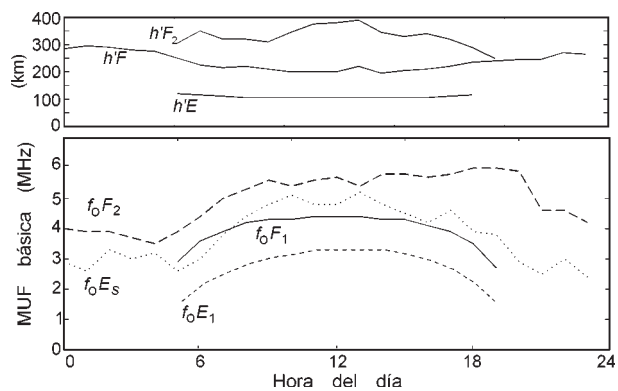


Fig. 2.26 Valor medio de la altura de las capas y frecuencia de resonancia para el mes de junio de 1985

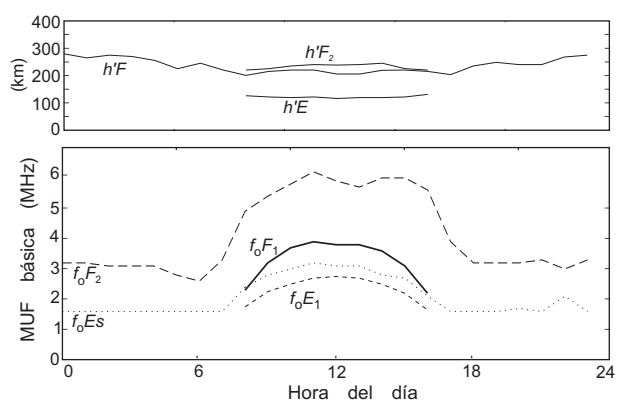


Fig. 2.27 Valor medio de la altura de las capas y frecuencia de resonancia para el mes de diciembre de 1985

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

mientras que la capa F presenta un desdoblamiento durante el día, y durante la noche mantiene valores de ionización apreciables.

La propagación por refracción ionosférica está muy condicionada por las características ionosféricas. Un enlace de este tipo está sujeto a fluctuaciones profundas por la propia dinámica de la ionosfera, las interferencias son frecuentes y las señales se distorsionan debido a la dispersión. Sin embargo, hasta finales de los años 60 era el único medio de establecer radiocomunicaciones a grandes distancias con equipos de dimensiones reducidas. Con el establecimiento generalizado de las comunicaciones por satélite, la propagación ionosférica ha caído en desuso para servicios que requieran calidad y fiabilidad elevada; sin embargo, continúa siendo una alternativa simple y económica para comunicaciones a grandes distancias, utilizada de forma habitual por los radioaficionados.

2.5 Modelización de la propagación en entornos complejos

2.5.1 Introducción

Los modelos de propagación de las secciones anteriores son útiles para evaluar las pérdidas de propagación asociadas a los distintos efectos que se han descrito: reflexión en tierra, difracción por obstáculos, etc. Cuando el efecto dominante en las pérdidas de propagación es únicamente uno de ellos las permiten estimar adecuadamente. En entornos de propagación complejos en los que existe una superposición de varios efectos, el cálculo de las pérdidas de propagación debe abordarse de forma diferente. Considérese la situación de la figura 2.28 en la que se representa un escenario habitual en los servicios de comunicaciones móviles en entornos urbanos. En la mayoría de las ocasiones no existe visibilidad directa entre los dos extremos del enlace: la estación base y el terminal móvil. La intensidad de campo eléctrico y por tanto la densidad de potencia incidente en la antena receptora es el resultado de la contribución de ondas reflejadas y difractadas en los edificios y obstáculos del entorno. En función de la fase de cada una de las contribuciones la suma de todas ellas puede ser constructiva o destructiva. En el caso de ser destructiva se producirá un fuerte desvanecimiento en la señal recibida. Sin embargo, con sólo desplazar el móvil una distancia del orden de media longitud de onda (17 cm a 900 MHz), la contribución puede ser constructiva, y por tanto se pueden observar fuertes variaciones

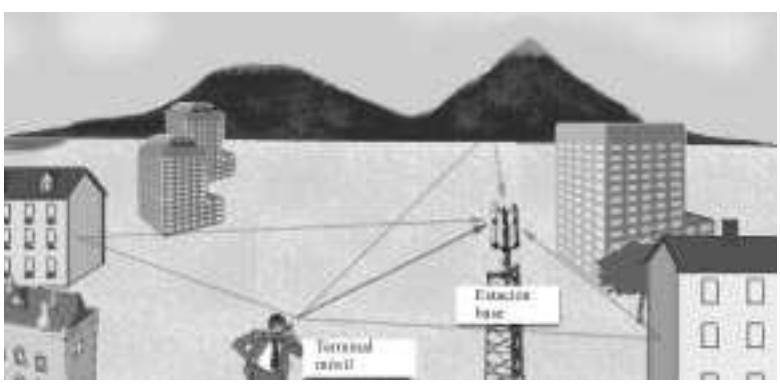


Fig. 2.28 Las condiciones de propagación en los actuales servicios de comunicaciones móviles son el resultado de la superposición de múltiples reflexiones y difracción en edificios y obstáculos

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

en la potencia de señal recibida. Estas variaciones pueden ser del orden de 30 a 40 dB con pequeños desplazamientos.

En este contexto, la modelización de la propagación debe abordarse a partir de modelos empíricos que permiten determinar el valor medio o esperado de las pérdidas de propagación. Sobre este valor medio se superpone una variable aleatoria que modela las fluctuaciones en la atenuación. El resultado es la caracterización estocástica de las pérdidas de propagación, cuyo objetivo no es predecir el valor exacto de las pérdidas, sino asociar a una atenuación una probabilidad de ocurrir. De forma que desde el punto de vista de la planificación de un servicio, el objetivo es garantizar que una cierta pérdida de propagación no se supere el 90, el 95 o el 99 % del tiempo en función de la fiabilidad que se le quiera conferir al servicio.

2.5.2 Modelos empíricos para el valor medio de las pérdidas de propagación. El modelo Okumura-Hata

Los modelos empíricos se basan en el ajuste de leyes de decaimiento de la potencia recibida en función de la distancia, altura de antenas, frecuencia y tipología del entorno a datos medidos. Evidentemente, mientras que ciertos parámetros como la frecuencia o la altura de las antenas son conocidos de forma unívoca otros, como la tipología del entorno son más difíciles de objetivar. Generalmente los modelos empíricos distinguen entre zonas urbanas muy densas, zonas urbanas de baja densidad y zonas rurales. A lo largo del tiempo se han desarrollado distintos modelos empíricos. Uno de los más empleados es el denominado Okumura-Hata, que se desarrolló a partir de medidas realizadas en Tokio. De acuerdo con este modelo las pérdidas de propagación L definidas como

$$\frac{P_L}{P_T} = -L + G_T + G_R \quad (dB) \tag{2.53}$$

se pueden calcular para distancias R>1km como

Zona urbana densa	L = A + B log R - E (dB)
Zona urbana de baja densidad	L = A + B log R - C (dB)
Zona rural	L = A + B log R - D (dB)

Donde R es la distancia en km y los parámetros A, B, C, D y E dependen de la altura de la antena de la estación base (h_b), la altura de la antena del terminal (h_m) ambas expresadas en metros, y la frecuencia (f) expresada en MHz y según el modelo pueden calcularse como:

$$\begin{aligned}
&A = 69{,}55 + 26{,}16 \log f - 13{,}82 \log h_b \\
&B = 44{,}9 - 6{,}55 \log h_b \\
&C = 2(\log (f/28))^2 + 5{,}4 \\
&D = 4{,}78(\log f)^2 + 18{,}33 \log f + 40{,}94 \\
&E = 3{,}2(\log (11{,}75h_m))^2 - 4{,}97 \quad \text{ciudades grandes } f \geq 300 \text{ MHz} \\
&E = 8{,}29(\log (1{,}54h_m))^2 - 1{,}1 \quad \text{ciudades grandes } f<300 \text{ MHz} \\
&E = (1{,}11 \log f - 0{,}7)h_m - (1{,}56 \log f - 0{,}8) \text{ ciudades medias y pequeñas}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

El modelo es válido con las siguientes restricciones: 150 MHz ≤ f ≤ 1.500 MHz, 30 m ≤ h_b ≤ 200 m, y 1m ≤ h_t ≤ 10 m.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El modelo Okumura-Hata predice una disminución del valor medio de la potencia recibida en función de la distancia de la forma

$$L \propto \frac{1}{R^{4,5-0,66\log h_b}} \tag{2.55}$$

que para una altura de antena de la estación base de 200 m implica una variación de la forma $1/R^{2,98}$ y para una altura de 30 m la variación en función de la distancia es de la forma $1/R^{3,52}$. Por tanto, el valor que se obtiene es intermedio entre la variación del tipo $1/R^2$ correspondiente a la propagación en espacio libre y el caso de reflexión en tierra plana lisa con incidencia rasante proporcional a $1/R^4$ (ecuación 2.18). Cuanto más alta se encuentra la antena de la estación base menor es el exponente que afecta a la distancia.

2.5.3 Caracterización estadística de las pérdidas de propagación

Los modelos empíricos sólo proporcionan el valor medio o esperado de las pérdidas de propagación para un entorno genérico en función de la distancia entre la estación base y el terminal. Sin embargo, es evidente que aún manteniendo la distancia a la estación base constante se observarán fluctuaciones en los niveles de señal en distintas ubicaciones del terminal móvil. Éstas se deben a las diferentes alturas de los edificios, orientación y características de las calles, etc. Por tanto, al describir una circunferencia en torno a una estación base se medirán variaciones en las pérdidas de propagación. Variaciones relativamente lentas en función de la distancia recorrida y que físicamente cabe asociarlas a la variación en el entorno. Dado que estas variaciones dependen de múltiples factores independientes, la resultante es una variación aleatoria de distribución gaussiana. De forma que las pérdidas de propagación se caracterizan como:

$$L = L_{50} + L_s \tag{2.56}$$

donde L_{50} es la atenuación mediana no excedida el 50 % del tiempo obtenida mediante un modelo empírico. Nótese que para una variable aleatoria gaussiana el valor medio o esperado y la mediana coinciden. En cuanto a L_s es una variable aleatoria gaussiana de media cero y caracterizada por su desviación estándar σ. Una vez más el valor de σ depende de la frecuencia y de la tipología del entorno y se determina mediante leyes derivadas de datos empíricos. Un modelo empírico es:

$$\sigma = 0{,}65(\log f)^2 - 1{,}3\log f + A \tag{2.57}$$

con A = 5,2 en entornos urbanos y 6,6 en los suburbanos.

De esta forma es posible asociar una probabilidad a una atenuación para unas características dadas del enlace.

Ejemplo 2.7 Una estación base de telefonía móvil GSM con frecuencia de 915 MHz, en un entorno urbano denso está situada en la azotea de un edificio a 30 m de altura sobre el nivel medio del suelo. La potencia radiada es de 20 W y la ganancia de la antena es de 17 dB. Si se considera que el terminal móvil se encuentra a 2 km de distancia a una altura de 1,5 m del suelo se puede emplear el modelo de Okumura-Hata para estimar la pérdida media de propagación. En este caso:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$A = 69,55 + 26,16 \log 915 - 13,82 \log 30 = 134,02$
$B = 44,9 - 6,55 \log 30 = 35,32$
$E = 3,2(\log (11,75*1,5))^2 - 4,97 = 0$
y
$L = 134,02 + 35,32 \log 2 = 144,6$ dB

Para un entorno urbano denso podemos estimar la variación estandar de las fluctuaciones de las pérdidas debidas a la variabilidad del entorno como

$$\sigma = 0,65(\log 915)^2 - 1,3 \log 915 + 5,2 = 6,85 \text{ dB}$$

Mediante el empleo de la función error es fácil comprobar que la atenuación no superada el 90% viene dada por $L_{50} + 1,25*\sigma$. Si consideramos que la ganancia de la antena en el terminal es de 0 dB, obtenemos que la potencia recibida el 90% es superior a

$$P_{L\ (90\%)} = 13 \text{ dBW} + 17\text{dB} - (144,6 + 1,25*6,85)\text{dB} + 0\text{dB} = -123,2 \text{ dBW} = -93,2 \text{ dBm}$$

Si se desea el valor superado el 99% del tiempo, tenemos que la atenuación no superada el 99% del tiempo viene dada por $L_{50} + 2,37*\sigma$ y $P_{L\ (99\%)} = -101$ dBm

2.5.4 Desvanecimientos rápidos multicamino y diversidad

En una situación real de comunicaciones móviles el campo incidente en la antena receptora es el resultado de la superposición de múltiples contribuciones: campos reflejados en edificios, campos difractados en las aristas o bordes de los edificios, componentes reflejadadas en el suelo, y componentes provenientes de múltiples reflexiones. Si se considera una situación como la de la figura 2.29 se comprende que al desplazarse el receptor del punto 1 al 2 las distintas contribuciones se sumaran con fases distintas, ya que cada una de ellas habrá recorrido una distancia distinta. De hecho sólo que la diferencia de camino recorrido sea de media longitud de onda (17 cm a 900 MHz), una componente que contribuía constructivamente se convierte en destructiva. Por tanto, un móvil al desplazarse observa fuertes variaciones en el nivel de señal recibido. A este efecto se le denomina desvanecimiento por multicamino, y se caracteriza estocásticamente. En la figura 2.30 se muestra un ejemplo de la potencia recibida en un terminal móvil en función de la distancia. En entornos urbanos densos en que es habitual que no exista visibilidad directa entre el terminal móvil y la estación base las fluctuaciones en la densidad de potencia incidente y por tanto en la potencia recibida se caracterizan por una función de densidad de probabilidad Rayleigh.

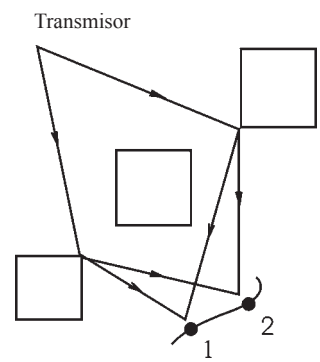


Fig. 2.29 Al desplazarse el receptor del punto 1 al 2 separados una distancia del orden de la longitud de onda, la fase de las distintas contribuciones varía de forma que la resultante puede presentar grandes fluctuaciones

Una observación detallada de la figura 2.30 muestra como al producirse un desvanecimiento profundo en un punto, existe siempre uno próximo en el que no se da este fenómeno. Por tanto cabe plantearse como forma de combatir los desvanecimientos por multicamino un sistema

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

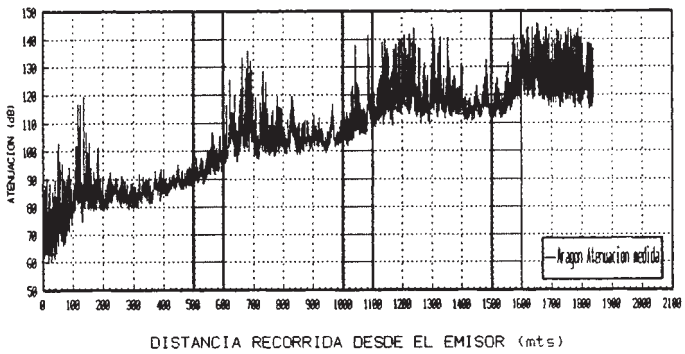


Fig. 2.30 Atenuación en función de la distancia entre emisor y transmisor a la frecuencia de 1900 MHz en una calle de la ciudad de Barcelona. Se observan las fuertes fluctuaciones de la atenuación y el aumento de la atenuación con la distancia. Las medidas han sido realizadas por el Grupo de Comunicaciones Radio de la UPC

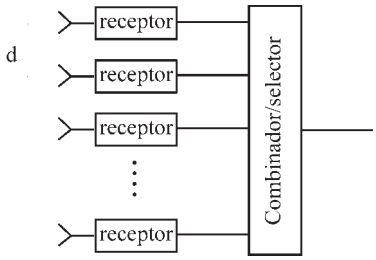


Fig. 2.31 Esquema de un sistema de recepción en diversidad

receptor en diversidad. Tal como se muestra en la figura 2.31 un sistema en diversidad en espacio está formado por varias ramas que consisten cada una de ellas en un receptor conectado a una antena separada una distancia d de las demás, a la salida de cada receptor se realiza una estimación de la relación señal a ruido y a continuación se realiza un proceso de selección o combinación. Una posibiliad es seleccionar en cada momento la salida de la rama que presente una mejor relación señal a ruido. Un elemento crítico para el adecuado funcionamiento de un sistema en diversidad es que a la salida de cada rama receptora se obtenga una señal estadísticamente independiente de las demás. De esta forma se garantiza que no se produzcan desvanecimientos profundos simultáneamente en todas las ramas, y por tanto el empleo de la diversidad mejorará las características globales del receptor. En un sistema de diversidad en espacio significa que la distancia d entre antenas receptoras debe ser tal que exista independencia estadística entre el campo incidente en cada una de las antenas. La independencia estadística se caracteriza por la correlación. En la figura 2.32 se muestra la correlación entre la potencia recibida por dos receptores en función de su separación para el entorno de propagación de interiores a la frecuencia de 5 GHz. Se observa como efectivamente la correlación disminuye rápidamente en función de la distancia. En el caso ideal, si cada una de las ramas fuera independiente, es decir con correlación igual a cero, y p es la probabilidad de tener un cierto desvanecimiento, con la selección entre N canales independientes esta probabilidad queda reducida a p^N. En la figura 2.33 se muestra la

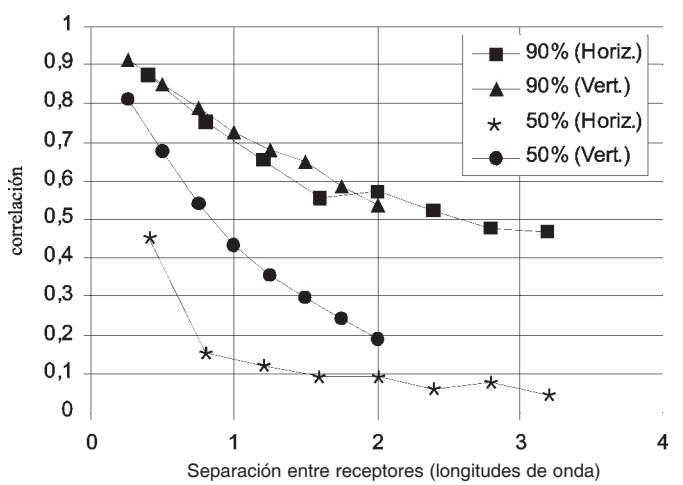


Fig. 2.32 Correlación entre la potencia recibida por dos antenas en función de su separación a la frecuencia de 5 GHz en un entorno de interiores. En la figura se muestran los casos de separación entre antenas en horizontal y vertical. La figura muestra el valor medio de la correlación para un conjunto de medidas y el valor correspondiente a un percentil del 90%

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

ganancia en diversidad para N ramas independientes de tipo Rayleigh. Así, por ejemplo, si para una sola rama existe una probabilidad de 10^{-2} de que la atenuación respecto al valor medio de la señal supere los 20 dB (es decir el 99% del tiempo el desvanecimiento no supera los 20 dB), se observa que para dos canales independientes el desvanecimiento no superado el 99% del tiempo es de 10 dB, y por tanto existe una ganancia por diversidad de 10 dB. Este es de hecho un límite teórico para la ganancia por diversidad y que en la práctica la falta de independencia entre ramas y otras desviaciones respecto a los modelos ideales no permiten alcanzar. En la práctica para apreciar una mejora en un sistema con diversidad es necesario que la correlación entre ramas sea inferior a 0,7, también es necesario que la potencia media recibida por cada una de las ramas sea parecida, de lo contrario un desvanecimiento en una rama no puede ser compensado si en las otras ramas el nivel medio de potencia recibida es bajo. Típicamente las fluctuaciones entre potencia media recibida en cada rama debe ser inferior a 5 dB. Finalmente un factor que limita la independencia estadística de las ramas es el acoplo mutuo entre antenas. Aunque exista independencia entre el campo incidente en las dos antenas la potencia transferida al receptor perderá la independencia estadística a menos que el aislamiento entre antenas sea superior a 15 dB.

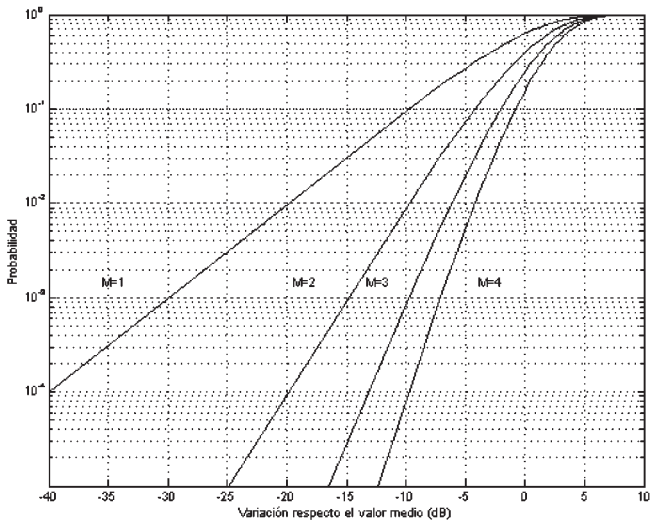


Fig. 2.33 La figura muestra la probabilidad de la fluctuación en el nivel de señal recibido sobre el valor medio de la atenuación para desvanecimientos del tipo Rayleigh en función del número de receptores independientes M. Así para un solo receptor la probabilidad de un desvanecimento de 20 dB es del 10^{-2}. Mientras que con dos receptores incorrelados para esta misma probabilidad se obtiene un desvanecimiento de 10 dB. Por tanto es posible obtener una ganancia por diversidad de hasta 10 dB en el caso de emplear un sistema con diversidad de dos receptores

La diversidad en espacio en recepción es sólo una de las posibles formas de emplear la diversidad para combatir el desvanecimiento multicamino. Otras formas son la diversidad en polarización, diversidad en frecuencia, o diversidad temporal. Asimismo también es posible introducir diversidad en transmisión. También existen diversas formas de combinar la señal recibida por cada una de las ramas, desde el más simple consistente en conmutar de rama cuando la relación señal a ruido es inferior a un cierto umbral, sistema que tiene la ventaja que sólo necesita un receptor, a la selección en cada momento de la rama que presenta la mejor relación señal a ruido y que requiere de tantos receptores como ramas. También se pueden realizar sistemas basados en la combinación dinámica de la señal recibida por cada rama de forma que se maximice en cada momento la relación señal a rudio, de forma que el receptor se adapte a las características cambiantes del entorno de propagación. A este concepto se le denomina genéricamente como antenas inteligentes.

2.6 Fuentes de ruido externo

En la planificación de un sistema de radiocomunicaciones el parámetro fundamental de calidad es la relación señal-ruido en el receptor. La potencia de señal depende, entre otros factores, de las pérdidas

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

que se hayan producido en la propagación y que han sido analizadas con anterioridad. La potencia de ruido en el receptor tiene dos componentes: una externa y otra interna. Las fuentes de ruido internas son la propia antena, en el caso que tenga pérdidas, más el ruido añadido por todos los elementos que forman el receptor. El ruido externo es debido a la emisión radioeléctrica de otras fuentes distintas a las que se desea recibir. Los fenómenos de emisión radioeléctrica son de distinta naturaleza y pueden agruparse de la siguiente manera:

- Fuentes extraterrestres. Ruido galáctico debido a la radiación en la banda de radiofrecuencia de las estrellas que forman la galaxia. Radiación de origen solar y el ruido cósmico de fondo.
- Emisión radioeléctrica de la tierra y de la atmósfera.
- Ruido de origen atmosférico debido a las descargas eléctricas (rayos, tormentas, etc.) generalmente llamados parásitos atmosféricos.
- Ruido de origen humano e industrial debido a motores eléctricos, líneas de alta tensión, etc.

A las fuentes de ruido se las caracteriza por su temperatura de brillo T_b medida en kelvins (K). La temperatura de brillo de una fuente es una medida de la potencia radiada en una banda de frecuencias y es igual a la temperatura física del cuerpo negro que emite la misma potencia en esta banda, y en general tiene características direccionales.

Una antena receptora recibirá contribuciones de ruido de distintas fuentes. La temperatura de antena T_a se obtiene de ponderar la temperatura de brillo de las distintas fuentes por el diagrama de radiación de la antena, de forma que

$$T_a = \frac{1}{4\pi}\iint_{4\pi} T_b(\Omega)\, D(\Omega)\, d\Omega \tag{2.58}$$

Por tanto, para calcular la temperatura de antena es necesario determinar en primer lugar qué fuentes de ruido son relevantes en la banda de trabajo, la temperatura de brillo de estas fuentes y con qué ángulo se reciben.

Las fuentes de ruido extraterrestres más importantes son el sol y el ruido galáctico. El sol presenta temperaturas de brillo muy elevadas, entre 10^4 y 10^5 K, que pueden incrementarse notablemente en periodos de fuerte actividad solar, si bien sólo debe considerarse cuando el haz principal o un lóbulo secundario de la antena apunta al sol.

El ruido galáctico sólo es importante a frecuencias inferiores a 2 GHz, mientras que a frecuencias superiores y excepto radiofuentes puntuales, solamente es significativo el ruido cósmico de fondo de 2,7 K.

En el capítulo 1 se ha obtenido la expresión del ruido añadido por un atenuador. De forma análoga la atmósfera presenta una atenuación en función de la frecuencia a la cual está asociada la generación de ruido térmico. Si se supone un trayecto a través de la atmósfera con atenuación específica γ (dB/km), con un espesor de atmósfera H (km) y ángulo respecto a la horizontal de ψ grados, la atenuación total es (para un modelo de tierra plana):

$$L = \gamma \frac{H}{\operatorname{sen}\psi} \quad \text{(dB)} \tag{2.59}$$

La temperatura de brillo observada, debida a la atenuación atmosférica es

$$T_b(\psi) = T_m\left(1 - 10^{-\frac{L}{10}}\right) \tag{2.60}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde T_m es la temperatura física de la atmósfera.

La temperatura de brillo es mayor a las frecuencias de fuerte absorción molecular. En la figura 2.35 se representa la temperatura de brillo de la atmósfera en función de la frecuencia, para distintos ángulos de elevación, sin considerar la contribución del ruido cósmico de fondo o cualquier otra fuente extraterrestre. Esta temperatura de brillo puede incrementarse si la atenuación aumenta por causa de la lluvia.

En cuanto a la emisión radioeléctrica de la superficie de la tierra depende de su temperatura física, de la rugosidad y del tipo de terreno. A efectos prácticos se puede considerar el valor de 290 K como un valor razonable para la mayoría de los casos.

La actividad eléctrica de la atmósfera produce descargas que originan radiación radioeléctrica en un amplio espectro de frecuencias con un decaimiento inversamente proporcional a la frecuencia. Este hecho unido a la existencia de la ionosfera que favorece la propagación a grandes distancias de estos parásitos en las bandas de VLF y LF, provoca que los parásitos atmosféricos sean especialmente perturbadores a bajas frecuencias.

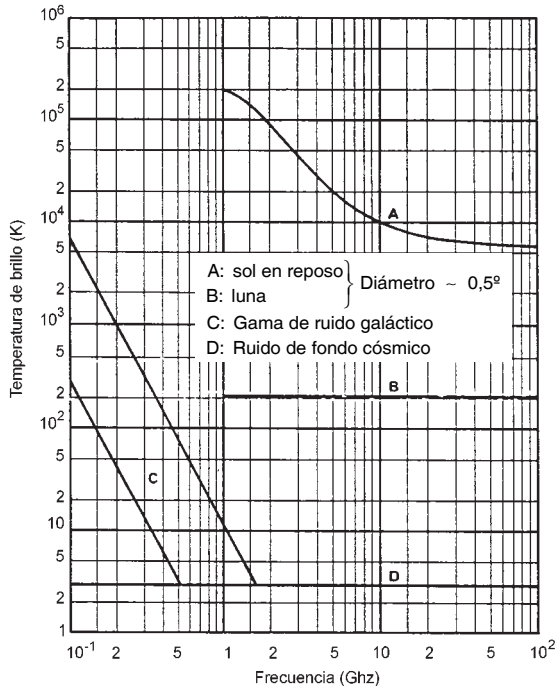


Fig. 2.34 Temperatura de brillo de las fuentes de origen extraterrestre [UIT]

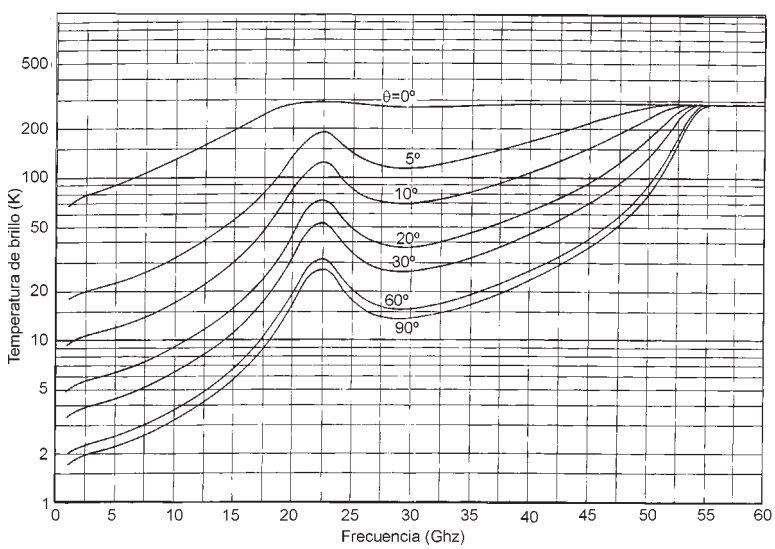


Fig. 2.35 Temperatura de brillo de la atmósfera para una concentración de vapor de agua de 7,5 g/m³ [UIT]

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La potencia de ruido depende de la actividad eléctrica de la atmósfera y ésta presenta variaciones estacionales y espaciales. Para la zona europea puede aproximarse el valor medio para el margen de frecuencias entre 10 kHz y 1 MHz por

$$T_b = 10^5 f^{-6} \text{ (K)} \tag{2.61}$$

donde f es la frecuencia en MHz. A frecuencias superiores a 30 MHz la ionosfera es prácticamente transparente, por lo que la temperatura de brillo decrece notablemente y tan sólo es importante el efecto de las perturbaciones próximas.

Finalmente, el ruido de origen humano o industrial presenta variaciones considerables si el entorno es industrial, urbano, rural, etc. Es difícil de predecir, pero en base a medidas realizadas en diversos tipos de entornos se generan curvas orientativas. En la figura 2.36 se representa la relación entre la temperatura de brillo y la temperatura de referencia de 290 K para distintos entornos en función de la frecuencia, para polarización vertical que es predominante frente a la de la polarización horizontal. Se representa también, a efectos de comparación, el ruido galáctico.

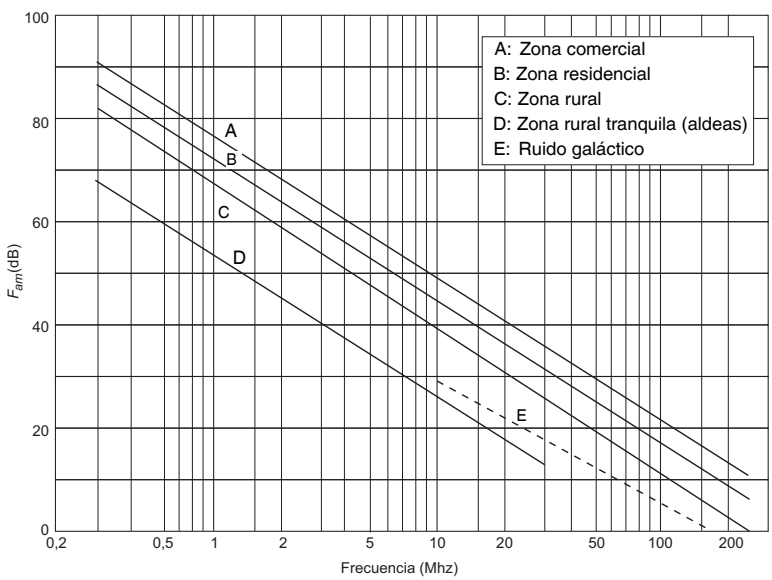


Fig. 2.36 Temperatura de brillo del ruido de origen humano en distintos entornos [UIT]

Es de destacar que las fuentes de ruido mencionadas constituyen en ciertos casos la señal útil que desea medirse. Así, en radioastronomía es justamente la radiación estelar la que desea conocerse, y en aplicaciones de radiometría es posible determinar la altura de las olas del mar o los distintos tipos de cultivos sobre la tierra por la diferente temperatura de brillo observada desde un satélite.

2.7 Resumen

Los factores que intervienen en la propagación en el entorno terrestre son múltiples, y cada uno de ellos afecta de forma distinta en las diferentes bandas de frecuencia. A continuación se resumen los efectos más relevantes para cada una de las bandas. A modo de ejemplo se eligen las bandas destinadas a servicios de radiodifusión.

- *Ondas largas* (LW: 148,5 a 283 kHz)
  Corresponde a la banda de LF (30-300 kHz); la longitud de onda es superior al kilómetro. Se obtienen grandes distancias de cobertura, básicamente por onda de superficie para distancias inferiores a 1.000 km y por reflexión ionosférica (modo guiado) para distancias superiores.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Debido a que la onda no se propaga por el interior de la ionosfera la recepción es relativamente estable, si bien la interferencia entre la onda de superficie y la reflejada en la ionosfera puede dar lugar a desvanecimientos. La existencia de parásitos atmosféricos produce una mediocre calidad sonora. Dada la longitud de onda las antenas son pequeñas en términos de λ; por tanto, para conseguir una relación señal-ruido aceptable en el receptor, es necesario transmitir grandes potencias.

- *Ondas medias* (MW: 526,5 a 1.605,5 kHz)
  Este es el conocido servicio de radiodifusión en onda media (OM), que se encuentra ubicado en la banda de MF. Durante el día la propagación se realiza por onda de superficie con coberturas del orden del centenar de kilómetros. Durante el día la capa D presenta una fuerte absorción en esta banda de frecuencias por lo que no es posible la reflexión ionosférica. Por la noche, cuando la capa D desaparece, se produce propagación por reflexión ionosférica en la capa E con alcances del orden de los 1.000 km. La propagación ionosférica presenta desvanecimientos rápidos por modificaciones locales de las condiciones ionosféricas. Por otra parte, estos alcances nocturnos extraordinarios están sujetos a interferencias por estaciones próximas al receptor que comparten la misma frecuencia. En estas bandas los parásitos atmosféricos son una fuente importante de ruido.
- *Ondas cortas* (SW : 3,2 a 26,1 MHz)
  Corresponde a la banda de HF. En esta banda la propagación se realiza por onda de espacio para distancias cortas (inferiores a 150 km). En este caso la difracción en obstáculos o refracción atmosférica pueden extender el alcance más allá de la visibilidad directa entre transmisor y receptor. En esta banda la reflexión ionosférica en las capas E y F posibilita grandes alcances (varios miles de km). La propagación ionosférica presenta desvanecimientos y variaciones horarias y estacionales. Es de destacar que en esta banda existe una zona intermedia denominada zona de silencio que no puede ser cubierta ni por onda de espacio ni por reflexión ionosférica.
- *Ondas ultracortas*
  (BANDA I : 47 a 68 MHz).
  (BANDA II: 87,5 a 108 MHz).
  (BANDA III: 174 a 230 MHz).
  (BANDAS IV y V: 470 a 850 MHz).
  Corresponde a las bandas de VHF y UHF. En estas bandas se encuentran los servicios de radiodifusión en FM y televisión terrena. La propagación se realiza por trayectos rectilíneos que se modifican por la refracción atmosférica. La difracción posibilita en ciertos casos la recepción sin visibilidad directa. La cobertura se encuentra limitada a algunas decenas de kilómetros, si bien en ciertas aplicaciones es posible obtener alcances del orden de los 300 km mediante difusión troposférica, ello es a costa de emplear grandes potencias de transmisión. En verano es habitual la formación de conductos sobre el mar, lo que da lugar a grandes alcances y la posibilidad de producir interferencias. Esta banda está libre de parásitos, por lo que se obtiene buena calidad de recepción.
- *Microondas* (10,95 a 12,5 GHz)
  Esta banda, comprendida dentro de la banda de SHF, está destinada a la difusión de programas de TV por satélite. En este caso las antenas que se emplean son directivas y se encuentran apuntando hacia el cielo, por lo que los efectos de la tierra son despreciables. La atenuación atmosférica es del orden de unos 2 dB (nótese que la antena apunta a la órbita geoestacionaria situada sobre el ecuador) que puede incrementarse en caso de lluvia. Los efectos ionosféricos (rotación de Faraday) son despreciables y la temperatura de brillo del cielo es baja (alrededor de 50 K).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

2.1 Se desea establecer un enlace a 100 MHz con polarización horizontal entre dos puntos separados 1 km. Suponiendo la aproximación de tierra plana y conductora perfecta, ¿a qué altura colocaría las antenas sobre el suelo para obtener una interferencia constructiva entre la onda directa y la onda reflejada?

a) 27 m b) 39 m c) 55 m d) 65 m

2.2 Las pérdidas por difracción debidas a un obstáculo que obstruye la línea de visión directa de un enlace:

a) Aumentan al aumentar la frecuencia.
b) Disminuyen al aumentar la frecuencia.
c) No varían con la frecuencia.
d) Son infinitas.

2.3 Entre una antena transmisora y una receptora, separadas 10 m, se interpone un semiplano equidistante de ambas; su borde está situado a una distancia de 10 cm de la línea de unión entre las dos antenas, obstruyendo la visibilidad. ¿Para qué frecuencia disminuirá más la señal con respecto a la que se recibiría en ausencia del plano?

a) 8 GHz b) 4 GHz c) 2 GHz d) 1 GHz

2.4 Para una comunicación a 100 MHz entre dos puntos sin visibilidad directa, separados 100 km y situados sobre una Tierra supuestamente esférica y conductora perfecta, las pérdidas por difracción entre los dos puntos:

a) Disminuyen al disminuir el radio equivalente de la tierra.
b) Disminuyen al aumentar la separación entre los puntos.
c) Aumentan al aumentar la altura del las antenas sobre el suelo.
d) Aumentan al aumentar la frecuencia.

2.5 ¿Qué afirmación es cierta respecto a la onda de superficie?

a) Presenta variaciones entre el día y la noche.
b) Permite la propagación mas allá del horizonte en las bandas de MF, HF y VHF.
c) La polarización horizontal se atenúa mucho más que la vertical.
d) El campo lejos de la antena es proporcional a la inversa de la distancia.

2.6 La atenuación por absorción atmosférica:

a) Es constante con la frecuencia.
b) Siempre es creciente con la frecuencia.
c) Presenta picos de absorción a 22 y 60 GHz.
d) Presenta picos de absorción a 15 y 40 GHz.

2.7 ¿Cuál es el fenómeno meteorológico que produce una mayor atenuación en la señal en la banda de SHF?

a) granizo b) nieve c) niebla d) lluvia

2.8 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) La capa D sólo existe de noche y refleja HF.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) La capa E refleja de noche MF.
c) La capa F1 sólo existe de día y refleja HF.
d) La capa F2 refleja de noche HF.

2.9 El ángulo de incidencia mínimo de una señal de HF en la ionosfera, para que se refleje:
a) Disminuye si la frecuencia de la señal aumenta.
b) Aumenta si la frecuencia de la señal aumenta.
c) Es independiente de la frecuencia.
d) Las señales de HF siempre se reflejan en la ionosfera.

2.10 El alcance mínimo de una reflexión ionosférica en la capa F_2 (altura = 300 km, N= 10^{12} elec/m^3) para una frecuencia de 18 MHz es:
a) 260 km b) 520 km c) 1.039 km d) 1.560 km

2.11 Para una determinada concentración de iones en la ionosfera y a una altura dada, la distancia mínima de cobertura por reflexión ionosférica (zona de silencio)
a) Aumenta con la frecuencia. b) Disminuye con la frecuencia.
c) No depende de la frecuencia. d) Depende de la potencia radiada.

2.12 Una emisora de radiodifusión que emite a una frecuencia de 1 MHz es captada por la noche hasta distancias de 1.000 km. ¿Cuál es el fenómeno de propagación?
a) Onda de superficie. b) Reflexión ionosférica en capa E.
c) Reflexión ionosférica en capa F. d) Difusión troposférica.

2.13 Cuando una onda de frecuencia inferior a 3 MHz se emite hacia la ionosfera, ¿qué fenómeno no se produce nunca?
a) Rotación de la polarización. b) Atenuación.
c) Absorción. d) Transmisión hacia el espacio exterior.

2.14 ¿Cuál es la máxima frecuencia de utilización de una capa de la ionosfera cuya densidad electrónica es de un millón de electrones por centímetro cúbico, para una onda cuyo ángulo de elevación es de 60º?
a) 10,4 MHz b) 18 MHz c)18 kHz d) 10,4 kHz

2.15 En 1901 Marconi realizó la primera transmisión radioeléctrica transoceánica utilizando una frecuencia de:
a) 0,8 MHz b) 40 MHz c) 80 MHz d) 400 MHz

2.16 Los radioaficionados utilizan en sus comunicaciones satélites en la banda de VHF. ¿Qué polarización utilizaría para optimizar la señal recibida?
a) Lineal vertical. b) Lineal horizontal.
c) Circular. d) Indistintamente cualquiera de las anteriores.

2.17 ¿Qué frecuencia y polarización se utilizarían en una comunicación Tierra-satélite?
a) MF, circular. b) SHF, lineal.
c) VHF, lineal. d) UHF, lineal.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

2.18 ¿Qué fenómeno permite establecer comunicaciones transoceánicas en C.B. (banda ciudadana: 27 MHz)?

a) Difusión troposférica.
b) Refracción en la ionosfera.
c) Conductos atmosféricos.
d) Reflexión en la luna.

2.19 Una señal de OM es captada a 30 km de la emisora. El mecanismo responsable de la propagación es:

a) Reflexión ionosférica.
b) Refracción troposférica.
c) Onda de espacio.
d) Onda de superficie.

2.20 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la fuente importante de ruido en cada banda es incorrecta?

a) Ruido atmosférico en 1-10 MHz.
b) Ruido industrial en 10-200 MHz.
c) Ruido cósmico en 100 MHz-1GHz.
d) Absorción molecular de gases atmosféricos en 1-10 GHz.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

2.1 Un radioenlace de vano 50 km consta de dos antenas idénticas, horizontalmente polarizadas y correctamente alineadas. La directividad de las antenas a la frecuencia de funcionamiento del radioenlace, 10 GHz, está dada por

$$D(\theta) = \left| 100 \frac{\text{sen}(100\pi \,\text{sen}\,\theta)}{100\pi \,\text{sen}\,\theta} \right|^2$$

donde θ es el ángulo medido a partir de la trayectoria.

a) Obtener la relación señal-ruido en el receptor si la potencia del transmisor es 1 W, el ancho de banda 30 MHz, las pérdidas totales del transmisor y del receptor 20 dB y la temperatura equivalente de ruido 1.000 K. Supónganse las condiciones de propagación del espacio libre.

b) ¿Cuál será la atenuación producida por una celda de lluvia de intensidad 25 mm/hora y de extensión 10 km?

c) Calcular el efecto que tendrá en el nivel de señal recibida una reflexión en tierra plana, supuesta conductora perfecta, situada en el punto medio de la trayectoria, paralela y por debajo de ella a una distancia:
   c.1) 10 m
   c.2) 375 m

d) En idéntica posición que en el apartado anterior, ¿qué efecto produciría un obstáculo en forma de filo de navaja que bloqueara la trayectoria y la sobrepasase en 10 m?

e) ¿A qué altura mínima habría que situar las antenas sobre tierra, supuesta perfectamente esférica, para que considerando la refracción atmosférica no tuviera que considerarse el bloqueo de la Tierra?

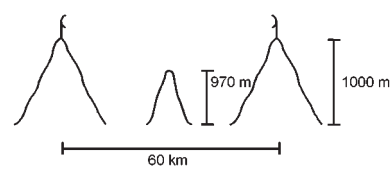
2.2 Se desea realizar un enlace entre dos puntos situados en dos montañas de 1.000 m de altura y distantes 60 km. Las opciones para realizar el enlace son:

- En línea directa teniendo en cuenta que a mitad de trayecto se halla un monte de 970 m de altura.
- A través de un reflector pasivo equidistante de ambas antenas 40 km.

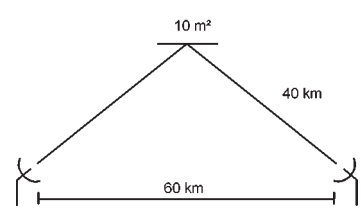
Las antenas están unidas al transmisor y al receptor mediante sendos tramos de guía de ondas.

a) Evaluar las pérdidas en el enlace para cada una de las alternativas, considerando la Tierra esférica, refracción estándar, y la figura 2.9.

b) Se decide llevar a cabo la primera alternativa. Calcular la relación S/N del enlace.
   f = 3 GHz
   D = 34 dB
   Área del reflector = 10 m^2
   $L_{guía}$ = 2 dB
   $F_{receptor}$ = 4 dB
   $G_{receptor}$ = 35 dB
   B = 10 MHz
   T_a = 150 K
   $T_{ambiente}$ = 290 K
   P_T = 1 W
   R_{tierra} = 6.370 km
   k = 4/3



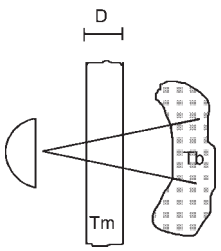
ALTERNATIVA 1



ALTERNATIVA 2

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

2.3 Para la situación de la figura, en la que existe un medio absorbente (α dB/km) a la temperatura T_m y de grosor D (km), situado entre la antena y una fuente lejana de ruido T_b:



a) Obtener la expresión de la temperatura de antena T_a, suponiendo que su radiación está totalmente dirigida hacia la región absorbente y la fuente de ruido.
b) La atmósfera se comporta, a frecuencias de microondas, como una capa absorbente. Calcular T_a de una antena apuntando al cielo, para f = 1 y 10 GHz y para los ángulos de elevación ψ = 5º y 90º. Supóngase un modelo de tierra plana, T_b = 2,7 K, T_m = 290 K, $\alpha = 0{,}0004\ f^2$ (GHz) dB/km y D = 4 km.

2.4 La recepción de una emisora de OM (f = 1 MHz) se realiza durante la noche a través de una reflexión en la capa E de la ionosfera (h = 100 km, N= $2 \cdot 10^3$ elec/ cm^3). Esta reflexión se produce acompañada de una atenuación de 20 dB.

a) Calcular el alcance mínimo, suponiendo un modelo plano.
b) Para prever una buena recepción se exige una relación S/N = 30 dB. Si se utiliza como receptora una antena de ferrita de directividad 1,5, con una eficiencia $\eta_l = 10^{-5}$ (T=300 K, $T_a = 10^{11}$ K, B = 10^4 Hz) y como transmisora se emplea una antena de 1,8 dB de ganancia, calcular la potencia radiada necesaria.
c) Con esta potencia radiada, obtener la distancia a la que es posible la recepción mediante onda de superficie, con la misma relación S/N. Considérense los casos de propagación sobre tierra seca y sobre mar.
d) Hasta qué valor podría reducirse la eficiencia de la antena receptora, si se acepta un empeoramiento de 3 dB en la relación S/N.
e) ¿Qué sucedería con esta comunicación durante el día?

2.5 Los radioaficionados se comunican a grandes distancias en la banda de 27 MHz mediante reflexión ionosférica. Se desean calcular los alcances máximo y mínimo, empleando un modelo de tierra esférica, para que se establezca la comunicación con una relación señal-ruido mejor que 10 dB entre dos equipos iguales, teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

ESPECIFICACIONES DE LOS EQUIPOS	
TRANSMISOR	Potencia radiada: 14 W
RECEPTOR	Factor de ruido: 6 dB Ancho de banda de ruido: 4 kHz
LINEA DE TRANSMISIÓN A LA ANTENA	Atenuación: 2 dB Impedancia característica: 75 Ω Relación de onda estacionaria en la línea de transmisión: 1,6
ANTENA	Directividad: 1,64 Eficiencia óhmica: 0,95
CONDICIONES DE PROPAGACIÓN	Temperatura de antena: $2{,}5 \cdot 10^5$ K Atenuación en la reflexión ionosférica: 12 dB Radio de la Tierra: 6.370 km

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3
Fundamentos de radiación

3.1 Ecuaciones de Maxwell

Todos los fenómenos electromagnéticos están gobernados por las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

junto con la ecuación de continuidad, que es una manifestación del principio de conservación de la carga

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.2}$$

De (3.2) y las dos ecuaciones rotacionales (leyes de Ampère y Faraday) se derivan las dos ecuaciones de la divergencia (ley de Gauss), por lo que estas dos últimas no son realmente independientes y basta resolver las dos ecuaciones del rotacional junto con la ecuación de continuidad.

Hay que añadir a lo anterior la ley de Lorentz que da la fuerza que actúa sobre una carga ρ, que se mueve con velocidad $\vec{v}$, cuando se sitúa en campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{3.3}$$

En medios materiales hay que considerar la relación entre los vectores intensidad $(\vec{E},\vec{H})$ e inducción $(\vec{D},\vec{B})$ mediante la permitividad eléctrica ε y la permeabilidad magnética μ

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{aligned} \tag{3.4}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

con ε_r y μ_r los valores relativos y $\varepsilon_o = (1/36\pi)\cdot 10^{-9}$ F/m y $\mu_o = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m los valores del vacío. En medios lineales ε y μ no dependen de las intensidades de campo. En medios homogéneos e isótropos son escalares y constantes; en medios heterogéneos e isótropos dependen de las coordenadas de cada punto, son escalares y función de la posición. En medios anisótropos son tensores.

Además de la corriente de desplazamiento $\partial\vec{D}/\partial t$, ya puesta de manifiesto expresamente en (3.1), pueden existir en cada punto corrientes de conducción (ley de Ohm) $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, con la conductividad σ en siemens/m. Para una corriente de convección originada por una distribución volumétrica de carga ρ moviéndose con velocidad $\vec{v}$, se tiene $\vec{J} = \rho\vec{v}$. Si todas estas corrientes se escriben explícitamente en la ley de Ampère (3.1) el valor de densidad de corriente $\vec{J}$ que en ella aparece será únicamente la corriente impresa o forzada por los generadores aplicados al sistema.

En el sistema internacional las magnitudes anteriores tienen las siguientes unidades:

$$\rho\text{: C/m}^3, \quad \text{J: A/m}^2, \quad \text{E: V/m}, \quad \text{H: A/m}$$
$$\text{D: C/m}^2, \quad \text{B: weber/m}^2 = \text{V}\cdot\text{s/m}^2 = \text{tesla}$$

Para variaciones temporales armónicas de las fuentes se tiene

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{J}(\vec{r})\,e^{j\omega t}\right]$$

donde $\vec{J}(\vec{r})$ es un fasor, o vector complejo. Los campos también variarán de la misma forma y para los correspondientes fasores las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{H} &= \vec{J} + j\,\omega\varepsilon\,\vec{E} \\ \nabla\times\vec{E} &= -\,j\,\omega\mu\,\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{D} &= \rho \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

que una vez resueltas para los campos darán el vector de campo real multiplicando por $e^{j\omega t}$ el fasor y tomando su parte real [Re] de acuerdo con el criterio anterior para las fuentes.

El sistema (3.5) es un sistema general de ecuaciones ya que cualquier dependencia temporal de las fuentes puede ser descompuesta en su espectro mediante una transformada de Fourier, analizada cada frecuencia del espectro con su correspondiente amplitud y fase mediante (3.5), y transformando inversamente la solución obtendríamos los campos correspondientes. A título ilustrativo transformaremos la ley de Ampère.

Para la densidad de corriente tenemos

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}_\omega(\vec{r})\,e^{j\omega t}d\omega \\ \vec{J}_\omega(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}(\vec{r},t)\,e^{-j\omega t}dt \end{aligned} \qquad (3.6)$$

y análogamente las demás magnitudes de (3.1). La ley de Ampère se transforma en

$$\nabla\times\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}_\omega(\vec{r})\,e^{j\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}_\omega(\vec{r})\,e^{j\omega t}\,d\omega + \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{D}_\omega(\vec{r})\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

Agrupando en un miembro

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla\times\vec{H}_{\omega}(\vec{r})-\vec{J}_{\omega}(\vec{r})-j\omega\,\vec{D}_{\omega}(\vec{r})\right]e^{j\omega t}\,d\omega\;=\;0$$

resulta

$$\nabla\times\vec{H}_{\omega}\left(\vec{r}\right)=\vec{J}_{\omega}\left(\vec{r}\right)+j\omega\varepsilon\vec{E}_{\omega}\left(\vec{r}\right) \tag{3.7}$$

y se obtendrán análogamente el resto de las ecuaciones (3.5) para los espectros de cada una de las magnitudes. La forma de las ecuaciones es semejante a las del caso armónico. Una vez resueltas para los campos se aplicará su transformada inversa, definida en (3.6) y se obtendrá la solución en cada punto e instante de tiempo.

Si el medio posee conductividad ($\sigma\neq 0$) tendremos una corriente de conducción en cada punto, que en la ley de Ampère se sumará a la corriente de desplazamiento, quedando en la forma

$$\nabla\times\vec{H}\;=\;\vec{J}_{fuentes}+\sigma\vec{E}+j\,\omega\varepsilon\,\vec{E}\;=\;\vec{J}_{fuentes}+j\,\omega\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E} \tag{3.8}$$

de forma idéntica a la de partida si se introduce una permitividad equivalente o efectiva de valor $\varepsilon_{eq}=\varepsilon\text{-}j\sigma/\omega$, que resulta compleja debido a que las corrientes de conducción y desplazamiento están en cuadratura de fase. La permitividad relativa equivalente será

$$\varepsilon^{*}\;=\;\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_0}\;=\;\varepsilon'-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\;=\;\varepsilon'-j\,\varepsilon'' \tag{3.9}$$

donde ε' es la permitividad del medio y $\varepsilon''=\sigma/\omega\varepsilon_0$, que en análisis de propagación resulta en un término de atenuación o pérdida, debido precisamente a las pérdidas óhmicas en el medio. En el análisis de la ionosfera ya hemos usado esta formulación.

En dieléctricos se utiliza como parámetro característico la tangente de pérdidas, definida por $\text{tg}\,\delta=\varepsilon''/\varepsilon'$. Para buenos dieléctricos toma valores entre 0,01 y 0,0001.

3.1.1 Fuentes eléctricas y magnéticas. Dualidad

Hemos establecido las ecuaciones de Maxwell (3.1) para corrientes y cargas eléctricas, pero para ciertas situaciones es conveniente introducir, para simplificar los cálculos de los campos producidos por corrientes, unas distribuciones ficticias de densidad de corriente magnética $\vec{M}$ y de densidad de carga magnética τ. Las ecuaciones (3.1) quedan en la forma

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}\;&=\;\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}\;&=\;-\vec{M}-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}\;&=\;\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}\;&=\;\tau\end{aligned} \tag{3.10}$$

En un problema general en el que estuvieran presentes ambos tipos de fuentes eléctricas y magnéticas, la solución se obtendría mediante la superposición de las soluciones de un problema con solamente fuentes eléctricas y un problema con solamente fuentes magnéticas, quedando en general

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Fuentes eléctricas

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H}_1=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}_1}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{E}_1=-\mu\frac{\partial\vec{H}_1}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}_1\right)=\rho\\
&\nabla\cdot\left(\mu\vec{H}_1\right)=0\\
&\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0
\end{aligned}\qquad(3.11)$$

Fuentes magnéticas

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H}_2=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}_2}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{E}_2=-\vec{M}-\mu\frac{\partial\vec{H}_2}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}_2\right)=0\\
&\nabla\cdot\left(\mu\vec{H}_2\right)=\tau\\
&\nabla\cdot\vec{M}+\frac{\partial\tau}{\partial t}=0
\end{aligned}\qquad(3.12)$$

Los dos sistemas de ecuaciones (3.11) y (3.12) son duales. Por ejemplo si sustituimos en (3.12), para el vacío,

$$\begin{aligned}
&\mu=\varepsilon\\
&\varepsilon=\mu\\
&\tau=\rho\\
&\vec{M}=\vec{J}\\
&\vec{E}=-\vec{H}\\
&\vec{H}=\vec{E}
\end{aligned}\qquad(3.13)$$

obtendremos el sistema (3.11), por lo que $\vec{E}_1, \vec{H}_1$, y $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ son soluciones duales.

En ciertas aplicaciones conviene introducir un conductor magnético perfecto, con la condición $\vec{H}_{\text{tangencial}} = 0$, que es equivalente a tener una conductividad magnética σ_m infinita.

En general las condiciones de contorno en la superficie de separación de dos medios (Fig. 3.1) si se incluyen fuentes magnéticas, tomarán la forma

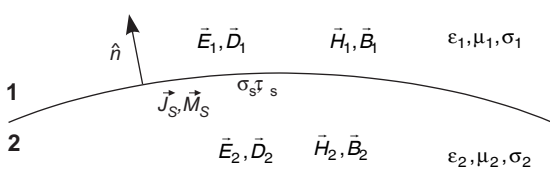


Fig. 3.1 Condiciones de contorno en discontinuidades entre medios

$$\begin{aligned}
&\hat{n}\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=\vec{J}_s\\
&\hat{n}\times\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)=-\vec{M}_s\\
&\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\sigma_s\\
&\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)=\tau_s
\end{aligned}\qquad(3.14)$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie de separación y va dirigida del medio 2 al 1. Los símbolos $\vec{J}_S$, $\vec{M}_S$ σ_s y τ_s, denotan respectivamente las densidades superficiales de corrientes y de cargas.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El sistema de ecuaciones (3.11) permite interpretar la corriente $\vec{J}$ como un generador ideal de corriente (Fig. 3.2a); si se desconecta la fuente de corriente los extremos quedan en circuito abierto.

Análogamente una fuente magnética en forma de espira colineal con el conductor representa un generador ideal de tensión. En la figura 3.2b, teniendo en cuenta que el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo, podemos obtener

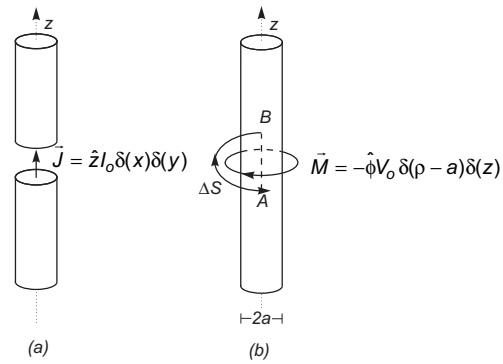


Fig. 3.2 Generadores equivalentes de tensión y de corriente

$$V_{BA} = -\int_{AB} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_{\Delta S} \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Delta S} \vec{M}\cdot d\vec{s} \tag{3.15}$$

Se ha supuesto que $\Delta S \to 0$ y sustituyendo la expresión de $\vec{M}$ dada en la figura 3.2b, obtenemos

$$V_{BA} = \iint_{\Delta S} \vec{M}\cdot(-\hat{\phi})\, d\rho\, dz = \iint_{\Delta S} V_0\, \delta(\rho - a)\,\delta(z)\, d\rho\, dz = V_0 \tag{3.16}$$

Los terminales quedan en cortocircuito al desconectar el generador.

3.2 Potenciales retardados

En todos los problemas electromagnéticos, dadas unas fuentes y una región del espacio con condiciones de contorno apropiadas, se tiene que buscar una solución de las ecuaciones de Maxwell. En ciertos casos, como las ecuaciones de onda homogéneas, es posible encontrar directamente la solución de las ecuaciones. En general, es más conveniente utilizar los potenciales como funciones auxiliares que simplifican la resolución de las ecuaciones, y a partir de ellos obtener los campos. La ecuación $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ permite definir $\vec{B}$ en función de un potencial vector $\vec{A}$ mediante

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \tag{3.17}$$

que sustituido en la ecuación $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t = -\nabla\times\partial\vec{A}/\partial t$ resulta en $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t = -\nabla\Phi$, donde se ha introducido el potencial escalar Φ y queda

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{3.18}$$

Sustituidos ambos campos en las leyes de Ampère y Gauss resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla\times\nabla\times\vec{A} &= \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \\ \nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\vec{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \\ -\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.19}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y sumando $\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ en ambos miembros de esta última se obtiene

$$\nabla^2 \Phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \tag{3.20}$$

El potencial vector $\vec{A}$ se ha definido sólo mediante su rotacional, lo que permite poder imponerle condiciones adicionales y, en particular, fijar arbitrariamente su divergencia. Una forma de hacerlo es mediante la condición de Lorentz

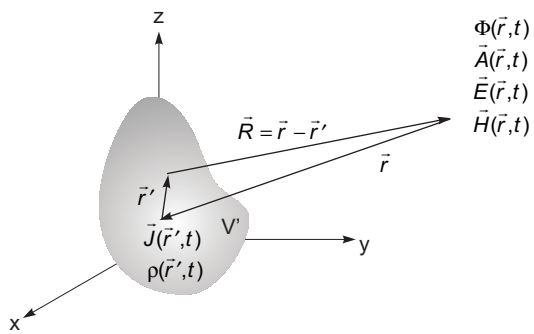
$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{3.21}$$

que simplifica las ecuaciones de onda para los potenciales, con lo que queda

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \tag{3.22}$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.23}$$

La solución de estas ecuaciones de onda, referida al sistema de coordenadas indicado en la figura 3.3, en el que los puntos de fuente se denotan con un sistema primado ($\vec{r}\,'$) y se reserva el sistema sin primar para los puntos de campo ($\vec{r}$), toma la forma general (Anexo A)



$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{V'} \frac{\mu\vec{J}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}\right)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv' \tag{3.24}$$

$$\Phi(\vec{r},t) = \int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv' \tag{3.25}$$

Fig. 3.3 Sistema de referencia para el cálculo de potenciales y campos

Si las fuentes tienen una dependencia temporal armónica la solución resulta ser

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\int_{V'} \frac{\mu\,\vec{J}(\vec{r}\,')e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv'\right] \tag{3.26}$$

$$\Phi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv'\right] \tag{3.27}$$

o con la notación que usaremos habitualmente

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\mu \vec{J}(\vec{r}')\, e^{-jkR}}{4\pi R}\, dv' \tag{3.28}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\, e^{-jkR}}{4\pi\varepsilon R}\, dv' \tag{3.29}$$

donde $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ es la distancia de un punto de fuente al punto de campo.

También se podría haber llegado a las ecuaciones (3.28) y (3.29), como se desarrolla en el Anexo A, de forma muy simple si tenemos en cuenta que las ecuaciones de onda de los potenciales (3.22) y (3.23) son lineales y, por tanto, permiten utilizar el concepto de respuesta impulsional. El potencial escalar $G(\vec{r})$ producido por un impulso de densidad volumétrica de carga $\rho = \delta(\vec{r})$ en un medio homogéneo (espacio libre) es la onda esférica

$$G(\vec{r}) = \frac{e^{-jk|\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}|}$$

Esta respuesta impulsional se conoce como función de Green, en honor de George Green (1793-1841), matemático inglés que introdujo el concepto del potencial en la física matemática. Así, el potencial debido a una carga arbitraria $\rho(\vec{r})$ se obtiene mediante la convolución de la carga (excitación) con la respuesta impulsional $G(\vec{r})$, obteniendo la ecuación (3.29) en la que $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. La ecuación (3.28) para el potencial vector se obtiene de forma análoga.

3.3 Expresiones generales de los campos

Sustituyendo (3.28) y (3.29) en (3.17) y (3.18) y teniendo en cuenta que el operador ∇ actúa sobre las coordenadas del punto de campo $\vec{r}$ (Fig. 3.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\, e^{-jkR}}{4\pi\varepsilon R}\, dv' - j\omega \int_{V'} \mu \frac{\vec{J}(\vec{r}')\, e^{-jkR}}{4\pi R}\, dv' = \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \left[\rho(\vec{r}')\, \nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) + j\omega\mu\varepsilon \vec{J}(\vec{r}') \left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) \right] dv' \end{aligned} \tag{3.30}$$

pero

$$\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) = \left(-jk - \frac{1}{R}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}\,\hat{R}$$

por lo que resulta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \left[\left(jk + \frac{1}{R}\right)\frac{e^{-jkR}}{R}\, \rho(\vec{r}')\hat{R} - j\omega\mu\varepsilon \vec{J}(\vec{r}')\frac{e^{-jkR}}{R} \right] dv' \tag{3.31}$$

y análogamente

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{B} = \nabla \times \int_{V'} \frac{\mu \vec{J}(\vec{r}')e^{-jkR}}{4\pi R} dv' = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) \times \vec{J}(\vec{r}')\, dv'$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \left(jk + \frac{1}{R}\right) \frac{e^{-jkR}}{R} \hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}') dv' \tag{3.32}$$

Ambas son expresiones generales y exactas de los campos; en ellos se aprecian dependencias del tipo $1/R^2$ y $1/R$, que permiten escribirlos como suma de dos términos, denominados *campo próximo* o *inducido* y *campo lejano* o *radiado*: $\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^r$, $\vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^r$, que toman la forma general

- Campos inducidos:

$$\vec{E}^i = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \hat{R}\, \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R^2} dv' \tag{3.33}$$

$$\vec{H}^i = -\frac{1}{4\pi} \int_{v'} \left[\hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}')\right] \frac{e^{-jkR}}{R^2} dv' \tag{3.34}$$

- Campos radiados:

$$\vec{E}^r = -\frac{jk}{4\pi\varepsilon} \int_{v'} \left[\rho(\vec{r}')\hat{R} - \sqrt{\mu\varepsilon}\, \vec{J}(\vec{r}')\right] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \tag{3.35}$$

$$\vec{H}^r = -\frac{jk}{4\pi} \int_{v'} \left[\hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}')\right] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \tag{3.36}$$

Si $kR << 1$ tenemos $k/R << 1/R^2$ y dominan los campos inducidos, lo que corresponde a puntos próximos a la distribución.

La ecuación (3.33) para $\vec{E}^i$ es la ley de Coulomb con el factor de retardo e^{-jkR} en el integrando. La (3.34) es la ley de Biot y Savart, también con el mismo factor de retardo. En bajas frecuencias y para distribuciones de cargas y corrientes de dimensiones pequeñas comparadas con λ el factor de retardo es despreciable y obtenemos los campos estáticos multiplicados por Re $[e^{j\omega t}] = \cos(\omega t)$. En consecuencia, las capacidades e inductancias definidas en electrostática y magnetostática siguen siendo válidas para el caso de variación temporal sinusoidal.

En general estos campos inducidos, que están en cuadratura con los radiados, dan origen a la existencia de potencias reactivas en la vecindad de la antena, y producen la aparición de términos reactivos en su impedancia. Para poder calcular la impedancia de la antena es necesario un conocimiento de los campos inducidos sobre ella misma.

3.3.1 Aproximaciones a grandes distancias para los campos radiados

En antenas nos interesa, en general, conocer los campos producidos en puntos muy alejados; en ellos los campos inducidos son despreciables en comparación con los radiados y vamos a realizar en éstos las aproximaciones para grandes distancias.

Además, mediante la ecuación de continuidad (3.2), podemos escribir $\vec{E}^r$ sólo en función de la distribución de corriente $\vec{J}$. Consideremos una distribución arbitraria y tomemos el origen de coordenadas en un punto próximo o sobre ella misma (Fig. 3.3) y supongamos

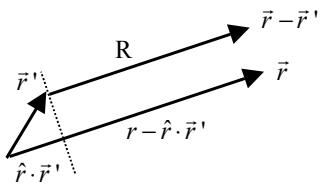
© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$k\,R \gg 1; \quad r \gg r'$$

como

$$R = \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right| = \left(r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tomando los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la expresión anterior, lo cual equivale a una aproximación de rayos paralelos, podemos escribir entonces a grandes distancias



$$R \approx r\left(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = r\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right) = r - \hat{r}\cdot\vec{r}\,' \tag{3.37}$$

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jkr}}{r}\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} \tag{3.38}$$

$$\hat{R} \approx \hat{r} \tag{3.39}$$

y

$$\vec{E}^r \approx \frac{jk}{4\pi\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r}\int_{V'}\left[\rho(\vec{r}\,')\hat{r} - \sqrt{\mu\varepsilon}\,\vec{J}(\vec{r}\,')\right]e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\,dv' \tag{3.40}$$

La ecuación de continuidad (3.2) permite escribir

$$\rho(\vec{r}\,') = -\frac{1}{j\omega}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,') \tag{3.41}$$

95

$$\vec{E}^r = \frac{j\,k}{4\,\pi\,\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r}\int_{V'}\left[-\frac{\hat{r}}{j\,\omega}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,') - \sqrt{\mu\,\varepsilon}\,\vec{J}(\vec{r}\,')\right]e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\,dv' \tag{3.42}$$

pudiendo transformar el término de la divergencia

$$\int_{V'}\left[\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')\right]e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\,dv' = \int_{V'}\nabla'\cdot\left[\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\right]dv' - \int_{V'}\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left(e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\right)dv' \tag{3.43}$$

Pero

$$\int_{V'}\nabla'\cdot\left[\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\right]dv' = \int_{S'}e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}\,\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{s}\,' \equiv 0 \tag{3.44}$$

ya que en el volumen V' están contenidas todas las fuentes y no hay corriente $\vec{J}(\vec{r}\,')$ que atraviese su superficie externa S'. Además como

$$\hat{r} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{3.45}$$

$$\vec{r}\,' = (x', y', z') \tag{3.46}$$

encontramos

$$\nabla' e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} = \nabla'\exp\left(j\,k\left(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma\right)\right) = j\,k\,\hat{r}\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} \tag{3.47}$$

por lo que resulta

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\int_{V'}\left(\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')\right)e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}dv' = -jk\int_{V'}\vec{J}(\vec{r}')\cdot\hat{r}\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,dv' \tag{3.48}$$

$$\vec{E}^r = \frac{jk}{4\pi\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r}\sqrt{\mu\varepsilon}\int_{V'}[\hat{r}(\vec{J}(\vec{r}')\cdot\hat{r})-\vec{J}(\vec{r}')]\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,dv' \tag{3.49}$$

Pero

$$\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{J}\right)=\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\vec{J}\right)-\vec{J}\left(\hat{r}\cdot\hat{r}\right)=\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\vec{J}\right)-\vec{J} \tag{3.50}$$

por lo que finalmente se obtienen las siguientes expresiones para los campos a grandes distancias

$$\begin{aligned}\vec{E}^r &= \frac{j\omega\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{V'}\vec{J}(\vec{r}')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,dv'\right)\\ \vec{H}^r &= -\frac{jk}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{r}\times\int_{V'}\vec{J}(\vec{r}')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,dv'\\ \vec{A} &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\int_{V'}\vec{J}(\vec{r}')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,dv'\end{aligned} \tag{3.51}$$

Se observa que localmente existe una onda plana, ya que

$$\vec{E}^r = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\hat{r}\times\vec{H}^r = \eta\,\vec{H}^r\times\hat{r} \tag{3.52}$$

donde η es la impedancia de onda en el vacío. También pueden escribirse los campos en función del potencial

$$\vec{E}^r = j\omega\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{A}\right) \tag{3.53}$$

$$\vec{H}^r = -j\frac{\omega}{\eta}\hat{r}\times\vec{A} \tag{3.54}$$

Es decir, $\vec{A}$ tiene un carácter vectorial definido por el de $\vec{J}$; $\vec{H}^r$ es perpendicular a la dirección de propagación $\hat{r}$ y a $\vec{A}$; $\vec{E}^r$ es perpendicular a $\hat{r}$ y $\vec{H}^r$. Resulta, pues, que tanto $\vec{H}^r$ como $\vec{E}^r$ están contenidos en el plano perpendicular a la dirección de propagación o radio vector $\hat{r}$ del punto donde estamos calculando los campos. Si $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi}$ tenemos

$$\begin{aligned}\hat{r}\times\vec{A} &= -\hat{\theta}\,A_\phi + \hat{\phi}\,A_\theta\\ \hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{A}\right) &= -\hat{\theta}\,A_\theta - \hat{\phi}\,A_\phi\end{aligned}$$

y sustituidos en (3.53) y (3.54) resultan las siguientes expresiones para las componentes de los campos de radiación

$$\begin{aligned} E_r &= 0 & H_r &= 0\\ E_\theta &= -j\omega A_\theta & H_\theta &= j\frac{\omega}{\eta}A_\phi, \quad H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta}\\ E_\phi &= -j\omega A_\phi & H_\phi &= -j\frac{\omega}{\eta}A_\theta, \quad H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}\end{aligned} \tag{3.55}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Es habitual escribir el potencial vector (3.51) en función del vector de radiación $\vec{N}$, definido mediante la expresión

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\vec{N} \tag{3.56}$$

$$\vec{N} = \int_{V'}\vec{J}(\vec{r}')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,dv' \tag{3.57}$$

Resultan los campos y el vector de Poynting

$$\begin{aligned} E_\phi &= -j\omega\mu\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}N_\phi, \qquad H_\theta = jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}N_\phi \\ E_\theta &= -j\omega\mu\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}N_\theta, \qquad H_\phi = -jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}N_\theta \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\vec{\wp} = \mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right] = \hat{r}\frac{\eta}{4\lambda^2 r^2}\left[\,|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\,\right] \tag{3.59}$$

Los campos eléctrico y magnético a grandes distancias tienen las componentes vectoriales e impedancia de onda correspondientes a una onda plana, mientras que la fase es la de una onda esférica. En una región pequeña del frente de onda esférico la fase es aproximadamente constante, por lo que se observa el comportamiento de onda localmente plana antes mencionado.

La potencia total radiada es

$$P_r = \iint_{4\pi}\vec{\wp}\cdot\hat{r}\,ds = \frac{\eta}{4\lambda^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right]\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \tag{3.60}$$

La intensidad de radiación K, definida en (1.7) como la potencia radiada por unidad de ángulo sólido ($ds = r^2 d\Omega$) vale

$$K = r^2\wp = \frac{\eta}{4\lambda^2}\left[\,|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\,\right] \tag{3.61}$$

y $t(\theta,\phi) = K(\theta,\phi)/K_{máx}$ es el diagrama de radiación de la antena (1.15).

El cálculo de la integral (3.57) se realiza sobre un sistema de coordenadas en el que la distribución $\vec{J}(\vec{r}')$ tenga una expresión simple, mientras que los campos (3.55) tienen su expresión en esféricas. Es necesario en muchos casos cambiar de sistema de coordenadas. A título ilustrativo supongamos conocido $\vec{N}$ en cartesianas $\vec{N} = \left(N_x, N_y, N_z\right)$ y que deseamos obtener sus componentes esféricas (N_r, N_θ, N_ϕ)

$$\vec{N} = (\vec{N}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\vec{N}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\vec{N}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} \tag{3.62}$$

Utilizando la matriz unitaria de transformación

$$\begin{bmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\phi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi & \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & -\mathrm{sen}\,\theta\\ -\mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix} \tag{3.63}$$

resulta

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\begin{aligned} N_r &= \vec{N}\cdot\hat{r} = N_x \operatorname{sen}\theta\cos\phi + N_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + N_z\cos\theta \\ N_\theta &= \vec{N}\cdot\hat{\theta} = N_x\cos\theta\cos\phi + N_y\cos\theta\operatorname{sen}\phi - N_z\operatorname{sen}\theta \\ N_\phi &= \vec{N}\cdot\hat{\phi} = -N_x\operatorname{sen}\phi + N_y\cos\phi \end{aligned} \tag{3.64}$$

Para cualquier otro sistema de coordenadas (Anexo D) debe procederse análogamente.

Es también frecuente tener que calcular $e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}}$ y, por ejemplo, en coordenadas esféricas obtendríamos

$$\hat{r}\cdot\vec{r}\,' = r'\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right) = r'\left[\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right) + \cos\theta\cos\theta'\right] \tag{3.65}$$

Dos casos particulares interesantes de distribuciones de corriente son:

- $\vec{J} = J\hat{z}$, que es el caso de hilos conductores rectos. (3.57) lleva a

$$\vec{N} = N_z\hat{z}: \qquad N_\phi = 0, \qquad N_\theta = -N_z\operatorname{sen}\theta \tag{3.66}$$

lo que implica $E_\phi = H_\theta = 0$, y que el campo está linealmente polarizado ($E_\theta \neq 0$) y

$$K = \frac{\eta}{4\lambda^2}\left|N_z\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta \tag{3.67}$$

- Corriente con simetría cilíndrica (espiras)

$$\begin{aligned} \vec{J} &= J\hat{\phi}' \\ \vec{N} &= N_\phi\hat{\phi} \\ N_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{3.68}$$

lo que implica $E_\theta = H_\phi = 0$ y polarización lineal, horizontal en este caso ($E_\phi \neq 0$) y

$$K = \frac{\eta}{4\lambda^2}\left|N_\phi\right|^2 \tag{3.69}$$

3.3.2 Radiación de corrientes magnéticas

Debemos analizar, además de los campos producidos por corrientes eléctricas $\vec{J}$, los producidos por corrientes magnéticas $\vec{M}$, que denominaremos $\vec{E}_m, \vec{H}_m$; estos campos satisfarán, en el caso armónico, las ecuaciones (3.12)

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{E}_m &= -\vec{M} - j\omega\vec{B}_m \\ \nabla\times\vec{H}_m &= j\omega\vec{D}_m \\ \nabla\cdot\vec{D}_m &= 0 \\ \nabla\cdot\vec{B}_m &= \tau \end{aligned} \tag{3.70}$$

cuya solución general puede establecerse mediante un potencial vector $\vec{F}$ definido, a partir de $\nabla\cdot\vec{D}_m = 0$, por

$$\vec{D}_m = -\nabla\times\vec{F} \tag{3.71}$$

que sustituida en la segunda ecuación rotacional de (3.70) permite introducir un potencial escalar ψ, con el resultado

$$\vec{H}_m = -\nabla\psi - j\omega\vec{F} \tag{3.72}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

De las dos ecuaciones (3.70) restantes, que contienen las fuentes, se obtienen por sustitución de $\vec{D}_m$ y $\vec{H}_m$, previa imposición de la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{F} + j\omega\mu\varepsilon\psi = 0 \tag{3.73}$$

las ecuaciones de onda para los potenciales

$$\nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = -\varepsilon \vec{M} \tag{3.74}$$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -\frac{\tau}{\mu} \tag{3.75}$$

cuya solución es

$$\vec{F} = \int_{V'} \frac{\varepsilon \vec{M} e^{-jkR}}{4\pi R} dv', \quad \psi = \int_{V'} \frac{\tau e^{-jkR}}{4\pi\mu R} dv' \tag{3.76}$$

similar a la obtenida para $\vec{A}$, Φ, lo que permite escribir para los campos de radiación expresiones semejantes

$$\begin{aligned} H_{rm} &= 0 & E_{rm} &= 0 \\ H_{\theta m} &= -j\omega F_\theta & E_{\theta m} &= \eta H_{\phi m} \\ H_{\phi m} &= -j\omega F_\phi & E_{\phi m} &= -\eta H_{\theta m} \end{aligned} \tag{3.77}$$

Se puede introducir un vector de radiación $\vec{L}$ para el problema magnético dado por

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{L} \tag{3.78}$$

$$\vec{L} = \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}\,') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv' \tag{3.79}$$

en función del cual los campos de radiación toman la forma

$$\begin{aligned} H_{\theta m} &= -j\frac{\omega\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} L_\theta, \qquad H_{\phi m} = -j\frac{\omega\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} L_\phi \\ E_{\theta m} &= \eta H_{\phi m} = -j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} L_\phi, \qquad E_{\phi m} = -\eta H_{\theta m} = j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} L_\theta \end{aligned} \tag{3.80}$$

La solución general, cuando están presentes fuentes eléctricas y magnéticas, se obtiene por superposición de (3.58) y (3.80) con el resultado

$$\begin{aligned} E_\theta &= -j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left[\eta N_\theta + L_\phi\right], & H_\phi &= \frac{E_\theta}{\eta} \\ E_\phi &= -j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left[\eta N_\phi - L_\theta\right], & H_\theta &= -\frac{E_\phi}{\eta} \\ K &= \frac{\eta}{4\lambda^2}\left[\left|N_\theta + \frac{L_\phi}{\eta}\right|^2 + \left|N_\phi - \frac{L_\theta}{\eta}\right|^2\right] \\ \vec{N} &= \int_{V'} \vec{J}\, e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv', & \vec{L} &= \int_{V'} \vec{M}\, e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv' \end{aligned} \tag{3.81}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3.3.3 Significado de los vectores de radiación

Los vectores de radiación $\vec{N}$ y $\vec{L}$ están definidos mediante integrales semejantes, en un caso sobre fuentes eléctricas y en el otro sobre magnéticas. En ambos casos se puede identificar que la relación entre la distribución de fuentes $(\vec{J}, \vec{M})$ y los vectores de radiación $(\vec{N}, \vec{L})$ es una transformada de Fourier. Para analizarlo con más detalle para el caso eléctrico, podemos asignar a *k* en (3.57) y (3.79) carácter vectorial $\vec{k} = k\,\hat{r}$, dándole la dirección del radio vector del punto de campo. Tenemos entonces el vector de onda

$$\vec{k} = k\,\hat{r} = k_x\,\hat{x} + k_y\,\hat{y} + k_z\,\hat{z} = k\cos\alpha\,\hat{x} + k\cos\beta\,\hat{y} + k\cos\gamma\,\hat{z} \tag{3.82}$$

y en coordenadas esféricas (θ, ϕ) sus componentes cartesianas valen

$$k_x = k\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, \qquad k_y = k\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad k_z = k\cos\theta \tag{3.83}$$

Tenemos también $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ y de (3.57) resulta la expresión del vector de radiación $\vec{N}$

$$\vec{N} = \vec{N}(k\hat{r}) = \vec{N}(\vec{k}) = \vec{N}(\alpha,\beta,\gamma) = \vec{N}(\theta,\phi) = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r})\, e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}'}\, dv' \tag{3.84}$$

y en coordenadas cartesianas

$$\vec{N} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk_x x'}\, dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk_y y'}\, dy' \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk_z z'}\, \vec{J}(x', y', z')\, dz' \tag{3.85}$$

100

que es una transformada de Fourier tridimensional.

Por ejemplo, para un elemento lineal de corriente (dipolo) alineado según *z*, tenemos

$$\vec{J}(x', y', z') = \hat{z}\, I(z')\,\delta(x')\,\delta(y') \tag{3.86}$$

Si la corriente es uniforme y el elemento es de longitud ℓ

$$I(z') = \begin{cases} I_0 & |z'| \le \ell/2 \\ 0 & |z'| > \ell/2 \end{cases}$$

resulta, realizando la integral (3.85),

$$\vec{N} = \hat{z}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') e^{jk_x x'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') e^{jk_y y'} dy' \int_{-\ell/2}^{\ell/2} I_0 e^{jk_z z'} dz' \tag{3.87}$$

$$\vec{N} = \hat{z}\, I_0\, \ell\, \frac{\mathrm{sen}\left(k_z \frac{\ell}{2}\right)}{k_z \frac{\ell}{2}} \tag{3.88}$$

$$\vec{A} = \mu\, I_0\, \ell\, \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\, \frac{\mathrm{sen}\left(k \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)}{k \frac{\ell}{2}\cos\theta}\, \hat{z} \tag{3.89}$$

Los campos radiados se obtienen a partir de (3.55).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si se comparan (3.57) y (3.79) con la forma habitual de las transformadas de Fourier para señales temporales (3.6) se observa la analogía entre t y $\vec{r}'$, pero hay una diferencia en el signo de la exponencial para la equivalencia de ω con $\vec{k}$. Por ello, debe utilizarse en tablas de transformadas directas la sustitución de ω por $-\vec{k}$.

Es de destacar que la elección de la transformada con exponencial negativa se hace en sistemas temporales para poder considerar la señal temporal como una superposición de señales armónicas $e^{j\omega t}$, para las que se conoce la respuesta del sistema; equivalentemente podría haberse hecho con el otro signo, superponiendo entonces señales $e^{-j\omega t}$.

La utilización de la definición de la transformada directa de Fourier con uno u otro signo no significa un cambio en las propiedades fundamentales de las transformadas, aunque para funciones impares implica una forma diferente.

El cuadrado del módulo de la proyección $N_\perp$ del vector de radiación $\vec{N}$ sobre el plano tangente (3.59) es el diagrama de radiación de la antena (no normalizado). Obtenemos, pues, el diagrama o las características de radiación en una dirección $\hat{r}$ mediante la transformada de Fourier de la distribución de corriente de la fuente $\vec{J}(\vec{r}')$. Es decir, fuente y diagrama de radiación están en la misma relación que una señal temporal y su espectro frecuencial. Una vez conocido $\vec{N}$, el paso a $\vec{A}$ y a los campos se hace fundamentalmente, constantes aparte, eliminando la componente radial y multiplicando por el término de onda esférica e^{-jkr}/r. La forma final de radiación es una onda esférica que emana del centro de fase, se propaga con velocidad $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ y cuyo valor en cada dirección viene dado por la transformada de Fourier de la distribución de la fuente sin la componente radial. Los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ mantienen entre sí las relaciones de una onda plana, lo que se comprende considerando que una onda esférica vista a gran distancia se comporta localmente como una onda plana.

Vamos a obtener a continuación una tabla comparativa para diversas iluminaciones o distribuciones de corrientes que surgen habitualmente en antenas. La obtendremos sólo para una dimensión, pero de (3.85) se observa que también es representativa de lo que ocurrirá en el caso general, ya que las integrales se realizan en cadena. También es frecuente que $\vec{J}(\vec{r}')$ sea una función separable en coordenadas cartesianas y (3.85) se convierte en el producto de tres transformadas en una dimensión.

Supongamos funciones F(z') definidas en el intervalo (-ℓ/2, ℓ/2), con valor máximo 1 en él y valor cero fuera de dicho intervalo. Corresponde a una antena de dimensión lineal ℓ y distribución de corriente F(z'). Las integrales de (3.85) toman la forma

$$G(k_z) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} F(z') e^{jk_z z'} dz' \tag{3.90}$$

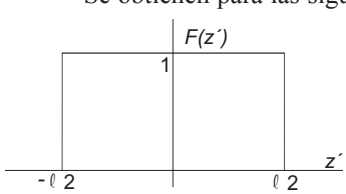
que con el cambio de variables

$$z = z' \frac{2}{\ell}, \qquad u = k_z \frac{\ell}{2} \tag{3.91}$$

se transforma en

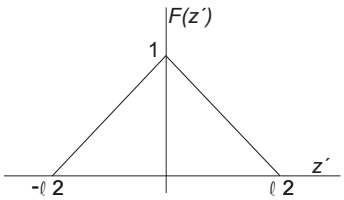
$$g(u) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{1} f(z) e^{juz} dz \tag{3.92}$$

Se obtienen para las siguientes distribuciones las soluciones indicadas



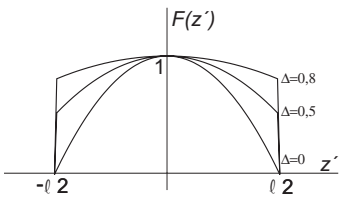
$$F(z') = 1$$
$$g(u) = \ell \frac{\operatorname{sen} u}{u} \tag{3.93}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



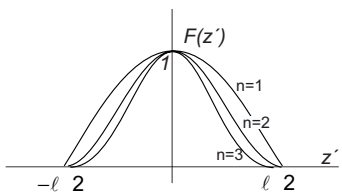
$$F(z') = 1 - \frac{2}{\ell}|z'|$$

$$g(u) = \frac{\ell}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} u/2}{u/2}\right)^2 \tag{3.94}$$



$$F(z') = 1 - (1-\Delta)\left(z'\frac{2}{\ell}\right)^2 \qquad 0<\Delta<1$$

$$g(u) = \ell\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u} + (1-\Delta)\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)\right) \tag{3.95}$$



$$F(z') = \cos^n\left(\frac{\pi}{\ell}z'\right)$$

$$g(u) = \frac{2\ell}{\pi} n!\cos u \Big/ \prod_{l=0}^{(n-1)/2}\left\{(2l+1)^2 - \frac{4u^2}{\pi^2}\right\}, \quad n \text{ impar} \tag{3.96}$$

$$g(u) = \ell n!\operatorname{sen} u \Big/ u\prod_{l=1}^{n/2}\left\{(2l)^2 - \frac{4u^2}{\pi^2}\right\}, \quad n \text{ par}$$

TIPO DE DISTRIBUCIÓN	1	$1-\frac{2}{\ell}\lvert z'\rvert$	$1-(1-\Delta)\left(\frac{2z'}{\ell}\right)^2$				$\cos^n\left(\frac{\pi z'}{\ell}\right)$				
PARÁMETRO			Δ=1	0,8	0,5	0	n=0	1	2	3	4
DIRECTIVIDAD RELATIVA A LA UNIFORME	1	0,75	1	0,99	0,97	0,83	1	0,81	0,67	0,58	0,52
ANCHO DE HAZ A -3dB (radianes)	0,88 λ/ℓ	1,28 λ/ℓ	0,88 λ/ℓ	0,92 λ/ℓ	0,97 λ/ℓ	1,15 λ/ℓ	0,88 λ/ℓ	1,2 λ/ℓ	1,45 λ/ℓ	1,66 λ/ℓ	1,93 λ/ℓ
PRIMER CERO A PARTIR DEL MÁXIMO (radianes)	1λ/ℓ	2 λ/ℓ	1 λ/ℓ	1,06 λ/ℓ	1,14 λ/ℓ	1,43 λ/ℓ	1 λ/ℓ	1,5 λ/ℓ	2 λ/ℓ	2,5 λ/ℓ	3 λ/ℓ
NIVEL DE LÓBULO PRINCIPAL A SECUNDARIO (dB)	13,2	26,4	13,2	15,8	17,1	20,6	13,2	23	32	40	48

Tabla 3.1 Parámetros de radiación de distribuciones unidimensionales de longitud ℓ (ℓ>> λ)

La tabla 3.1 muestra diversos parámetros para estas distribuciones en el caso ℓ>> λ. La directividad relativa es la relación entre la directividad de esa distribución y la de la uniforme. El ancho de haz a -3dB resulta del orden de λ/ℓ en todas las distribuciones.

Dada una antena de dimensión ℓ, tenemos $k_z = k\cos\theta$, por lo que a cada dirección del espacio (valor de θ) se le asigna un valor de k_z, pero $|\cos\theta| \le 1$ y $|k_z| \le k$, luego nuestro espacio real se corresponde sólo con una porción limitada del espectro G (k_z) obtenido; por ejemplo en la figura 3.4, que es la transformada de una distribución uniforme, el valor máximo de u es $u_{máx} = k\ell/2 = \pi\ell/\lambda$.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si $\ell \ll \lambda$, resulta $k_z\ell/2 \approx 0$, por lo que todo nuestro espacio se transforma en una región muy pequeña en torno a $u = 0$ y en (3.88) o en la figura 3.4 se ve que $g(u) \approx$ cte.

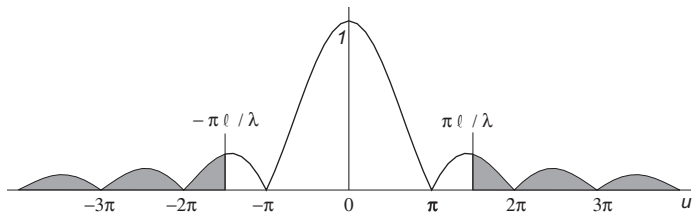


Fig. 3.4 Porción del espectro que se corresponde con el espacio real

Si $\ell = \lambda$ se introduce el primer cero, $k_z\ell/2 = \pm\pi$, que corresponde a direcciones $\theta = 0,\pi$ ($\cos\theta = \pm 1$).

Si $\ell \gg \lambda$, $u = k_z\ell/2$, una gran porción de la transformada entra en el diagrama de radiación, y éste tendrá un haz estrecho y tantos ceros de radiación como dos veces la parte entera de ℓ/λ.

De la tabla 3.1 se desprende también que la distribución uniforme es la que presenta mayor directividad y el haz principal más estrecho, pero también la peor relación de lóbulo principal a secundario; ello es debido a la manera en que la distribución cubre el intervalo $(-\ell/2, \ell/2)$ y a la discontinuidad en su extremo. Un decrecimiento gradual, como el que se produce en la parábola sobre un pedestal Δ al disminuir el valor de Δ, conduce a un ensanchamiento del haz y una mejora del nivel de lóbulo principal a secundario. Ambos efectos son mucho más patentes en la curva $\cos^n(\pi z'/\ell)$ que, dado el decaimiento suave sin discontinuidades en las derivadas, resulta en elevadas relaciones de lóbulo principal a secundario.

En el siguiente cuadro se resumen las equivalencias más significativas entre sistemas y antenas.

Sistemas	*Antenas*
Sistema de ecuaciones ordinarias lineales	Sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales (ec. Maxwell)
$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\,e(t')dt'$	$\vec{A}(\vec{r}) = \mu\int_{V'} G(\vec{r}-\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')dv'$
	$G(\vec{r}-\vec{r}') = \dfrac{e^{-jk\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}}{4\pi\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$
h(t): respuesta impulsional H(ω): función de transferencia	respuesta impulsional del sistema formado por las ecuaciones de Maxwell y todo el espacio. A grandes distancias:
$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = e \otimes h$	$\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}\int_{V'} \vec{J}(\vec{r}')e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}'}dv' = \vec{J} \otimes G$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier nos permite calcular fácilmente la fase de los campos radiados por una antena desplazada del origen. Si una antena que cuando está situada en el origen tiene un vector de radiación $\vec{N}_0$ se desplaza al punto $\vec{r} = \vec{a}$, su nuevo vector de radiación será, según (3.57)

$$\vec{N} = \int_{v'} \vec{J}\left(\vec{r}\,' - \vec{a}\right) e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} dv' = \int_{v'} \vec{J}\left(\vec{u}\right) e^{jk\hat{r}\cdot(\vec{u}+\vec{a})} dv' = e^{jk\hat{r}\cdot\vec{a}}\,\vec{N}_0$$

3.3.4 Regiones de Fresnel y de Fraunhofer

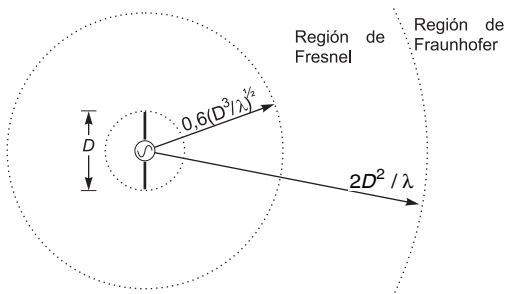


Fig. 3.5 Regiones de Fresnel y de Fraunhofer

Hemos establecido la existencia de dos regiones, la de campos inducidos y la de campos de radiación, pero no hemos marcado la frontera inferior de esta última. Vamos a establecerla para el problema unidimensional, aunque podría hacerse de forma similar para estructuras planas o tridimensionales. Consideremos una distribución lineal de corriente de dimensión D (que se corresponde con la dimensión lineal de la antena o el diámetro de la esfera menor que circunscribe la antena), que supondremos grande en términos de la longitud de onda, como se indica en la figura 3.5.

Hemos calculado en la sección 3.3.1 el potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$ para puntos alejados con la aproximación $R \approx r - \hat{r}\cdot\vec{r}\,' = r - z'\cos\theta$, pero el valor exacto de *R* viene dado por

$$R = (r^2 - 2rz'\cos\theta + z'^2)^{1/2} = r\left(1 - 2\frac{z'}{r}\cos\theta + \frac{z'^2}{r^2}\right)^{1/2} \tag{3.97}$$

que puede ser desarrollado en serie binómica

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\cdots \tag{3.98}$$

y obtenerse

$$R = r - z'\cos\theta + \frac{z'^2}{2r}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{z'^3}{2r^2}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + \cdots \tag{3.99}$$

Los dos primeros términos del desarrollo en serie corresponden a la aproximación de rayos paralelos (3.37), mientras que el tercer término es la aproximación parabólica de la circunferencia.

Sustituyendo esta serie en la expresión exacta del potencial (3.28), tenemos

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \hat{z}\,I(z')\frac{e^{-jkR}}{R}dz' \approx$$
$$\approx \frac{\mu}{4\pi r}e^{-jkr}\int_{-D/2}^{D/2} \hat{z}\,I(z')\,e^{\,jkz'\cos\theta}e^{-jk\frac{z'^2}{2r}\operatorname{sen}^2\theta}\,e^{-jk\frac{z'^3}{2r^2}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}\ldots dz' \tag{3.100}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si nos acercamos hacia la antena desde $r \to \infty$, los términos exponenciales del integrando salvo el primero, que es independiente de r, pasarán progresivamente de ser despreciables a tomar valores apreciables. La región desde $r \to \infty$ hasta la distancia en que $\exp(-jk\,\mathrm{sen}^2\theta\, z^2/2r)$ aporta una fase de $\pi/8$ se conoce como la región de Fraunhofer o la región de campos radiados lejanos. En ella podemos usar la expresión del vector de radiación $\vec{N}$

$$\vec{N} = \int_{-D/2}^{D/2} \hat{z}\, I(z') e^{jkz'\cos\theta} dz' \tag{3.101}$$

que da origen a un diagrama de radiación en dicha región independiente de la distancia r. Los campos radiados en esta región vienen dados por las expresiones de los campos lejanos (3.58).

La situación más desfavorable del término de fase es para $z' = D/2$ y $\theta = \pi/2$. La distancia a partir de la cual se garantiza un error de fase menor que $\pi/8$ es:

$$k\frac{(D/2)^2}{2r} = \frac{\pi}{8}, \quad r = \frac{2D^2}{\lambda} \tag{3.102}$$

y la región de Fraunhofer queda definida mediante

$$\frac{2D^2}{\lambda} \le r < \infty \tag{3.103}$$

Si $r < 2D^2/\lambda$ habrá que considerar en (3.100) el término de fase en z'^2 y estaremos en la región de Fresnel o de campos radiados próximos, que se extiende desde $r = 2D^2/\lambda$ hasta la distancia en que el término de fase en z'^3 adquiere valores iguales a $\pi/8$,

$$\frac{k(D/2)^3 \cos\theta\, \mathrm{sen}^2\theta}{2r^2} = \frac{\pi}{8} \tag{3.104}$$

que resulta en

$$r = 0{,}6(D^3/\lambda)^{1/2} \tag{3.105}$$

Y la región de Fresnel queda definida como

$$0{,}6(D^3/\lambda)^{1/2} \le r \le 2D^2/\lambda \tag{3.106}$$

La zona de Fresnel tiene importancia únicamente en antenas grandes comparadas con la longitud de onda, como son las antenas de reflector. Dejará de existir teóricamente para $D<\lambda/10$, pero esto carece de sentido porque una de las hipótesis de partida era $D>>\lambda$. En la zona de Fresnel obtenemos las expresiones de $\vec{A}$ y los campos a partir de

$$\vec{N} = \int_{-D/2}^{D/2} \hat{z}\, I(z') e^{-jk\frac{z'^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{2r}} e^{jkz'\cos\theta}\, dz' \tag{3.107}$$

que es dependiente de r; tenemos, pues, que al pasar de la región de Fraunhofer a la de Fresnel el diagrama de radiación empieza a cambiar con la distancia. La forma en que se produce este cambio es similar al paso de una señal temporal por un elemento con una distorsión de fase cuadrática.

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{-j\alpha\omega^2} e^{j\omega t}\, d\omega \tag{3.108}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Estas dos regiones se consideran de campos lejanos o de radiación; para calcular los campos en la vecindad de la antena habría que recurrir a las expresiones de los campos próximos o inducidos.

3.4 Teoremas de unicidad y equivalencia

Vamos a introducir ahora dos teoremas que tienen amplia aplicación en los cálculos de los parámetros de radiación de aperturas que se realizarán en el capítulo 6.

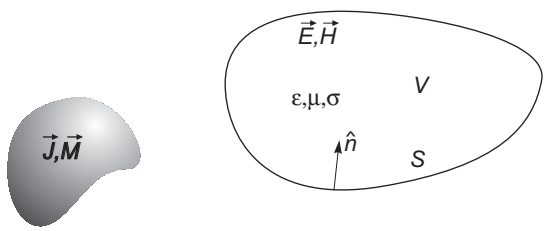


Fig. 3.6 Volumen para la demostración de la unicidad de la solución

Supongamos un volumen V, limitado por una superficie S, que contiene un medio homogéneo con pérdidas $\sigma > 0$. Consideramos un conjunto de fuentes exteriores a él que producen campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$. El teorema de unicidad dice que si se conoce el valor de las componentes tangenciales de $\vec{E}$ o $\vec{H}$ sobre S, la solución para cualquier punto de V es única. Para demostrar la unicidad de la solución, supongamos que existen en V dos soluciones distintas de las ecuaciones de Maxwell, $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ y $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ (Fig. 3.6), que toman el mismo valor especificado $\hat{n} \times \vec{H}$ o $\hat{n} \times \vec{E}$ sobre S.

En cualquier punto de V tenemos a partir de (3.5) y (3.8)

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_1 &= -j\omega\mu \vec{H}_1 & \nabla \times \vec{E}_2 &= -j\omega\mu \vec{H}_2 \\ \nabla \times \vec{H}_1 &= (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}_1 & \nabla \times \vec{H}_2 &= (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}_2 \\ \nabla \cdot \vec{D}_1 &= 0 & \nabla \cdot \vec{D}_2 &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 &= 0 & \nabla \cdot \vec{B}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Si construimos los vectores $\vec{E}_2 - \vec{E}_1$ y $\vec{H}_2 - \vec{H}_1$, también satisfarán estas ecuaciones y desarrollando la divergencia de un producto vectorial tenemos

$$\nabla \cdot \left[\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right)^* \right] = \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right)^* \cdot \nabla \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) - \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \cdot \nabla \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right)^*$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.109) e integrando en volumen resulta

$$\begin{aligned} &\int_{S'} \left[\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right)^* \right] \cdot \hat{n}\, ds' = \\ &= j\omega \int_{V'} \left[\mu \left| \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right|^2 - \varepsilon \left| \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right|^2 \right] dv' + \sigma \int_{V'} \left| \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right|^2 dv' \end{aligned} \tag{3.110}$$

Sobre S ambos conjuntos de campos toman el mismo valor de componentes tangenciales de campo eléctrico o magnético

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right)_s &= 0 \\ \hat{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right)_s &= 0 \end{aligned} \tag{3.111}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En consecuencia la integral de superficie vale cero, lo que implica que las partes real e imaginaria de la integral de volumen han de ser cero. Dado que el integrando de la parte real es no negativo, $|\vec{E}_2 - \vec{E}_1|^2 \geq 0$, ha de ser cero el integrando y $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$. Análogamente, de la parte imaginaria se obtiene $\vec{H}_2 = \vec{H}_1$, con lo que queda probada la unicidad de la solución para medios con pérdidas si se conocen los campos tangenciales en la superficie del volumen.

En un medio sin pérdidas, $\sigma = 0$, la solución no es única cuando se cumple $\int_{v'} \mu \left|\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right|^2 dv' = \int_{v'} \varepsilon \left|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right|^2 dv'$ es decir, cuando las energías eléctrica y magnética almacenadas son iguales (fenómeno de resonancia). Por ejemplo, si S es la superficie perfectamente conductora de una cavidad resonante, existen infinitas combinaciones lineales de modos de la cavidad con $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ sobre S. Cuando se calculan campos radiados por antenas, se toma el volumen V como el espacio exterior a la superficie S, en el interior de la cual se encuentra la antena. En este caso no puede haber resonancia y la solución es única en V.

A efectos del interior del volumen podemos sustituir el conocimiento de las fuentes exteriores a V por un conocimiento de los campos tangenciales eléctrico y magnético sobre la superficie.

Ésta es la sustitución que se utiliza en el teorema de equivalencia. Supongamos el volumen de la figura 3.7 que rodea las fuentes; el volumen V al que se aplicaría el teorema anterior sería todo el volumen exterior a las fuentes, es decir, el limitado por S y la superficie del infinito.

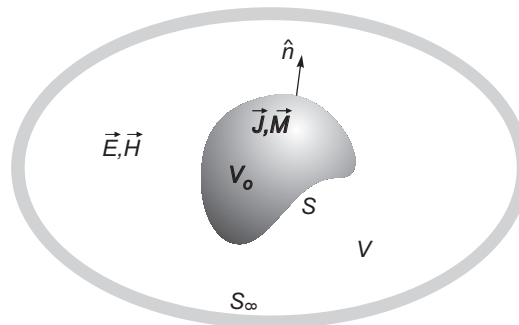


Fig. 3.7 Volumen externo a unas fuentes

Si conocemos los campos que producen las fuentes sobre S sabemos por el teorema de unicidad que la solución en cualquier punto de V es única y, en consecuencia, puede ser determinada a partir del conocimiento de las componentes tangenciales $\hat{n} \times \vec{E}$ o $\hat{n} \times \vec{H}$ sobre S. Basado en esto podemos sustituir el problema de la figura 3.7 por uno equivalente en que dentro del volumen V_0, que ocupan las fuentes, retiramos éstas e imponemos campos nulos, pero sobre S mantenemos los valores tangenciales $\hat{n} \times \vec{E}$ y $\hat{n} \times \vec{H}$ (ambos problemas son equivalentes). En esta sustitución, para poder pasar de valores de campos nulos a los valores de campos tangenciales existentes, tienen que existir corrientes equivalentes sobre S dadas por las condiciones de contorno (3.14), que implican la existencia de densidades lineales de corrientes eléctrica $\vec{J}_S$ y magnética $\vec{M}_S$ sobre S, dadas por

$$\begin{aligned} \vec{J}_S &= \hat{n} \times \vec{H} \\ \vec{M}_S &= -\hat{n} \times \vec{E} \end{aligned} \qquad (3.112)$$

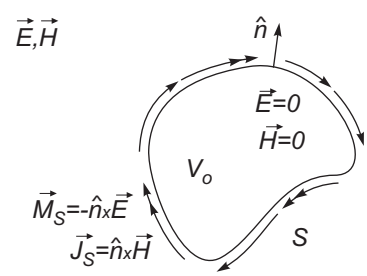


Fig. 3.8 Corrientes equivalentes

Tal y como se indica en la figura 3.8 hemos sustituido el problema por otro equivalente, pasando de las fuentes reales o primarias a otras equivalentes sobre S.

A las corrientes $\vec{J}_S$ y $\vec{M}_S$ se las conoce como corrientes equivalentes. Los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ sobre S son los campos primarios o iluminantes del principio de Huyggens.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Los campos en V se calculan mediante el teorema de equivalencia sumando la radiación en espacio libre de todas las fuentes presentes en el problema equivalente: las corrientes equivalentes y las fuentes impresas en *V*, si las hubiera. El campo radiado por las primeras se denomina campo dispersado (scattered en inglés), $\vec{E}_s$, mientras que el radiado por las segundas se denomina campo incidente, $\vec{E}_i$. De esta forma, el campo total en *V* será igual al campo radiado por las fuentes equivalentes más el campo incidente, $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_s$. El campo dispersado a grandes distancias se calcula mediante (3.57) y (3.79)

$$\vec{N}_S = \int_{S'} \vec{J}_S \, e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} ds' \qquad \vec{L}_S = \int_{S'} \vec{M}_S \, e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} ds' \tag{3.113}$$

En el interior de *S*, volumen V_0, la suma de los campos incidente y dispersado es exactamente igual a cero.

La validez del teorema de equivalencia también puede justificarse sin recurrir al teorema de unicidad, pues el problema equivalente es coherente con las ecuaciones de Maxwell: las cumple dentro de *S* (campos y fuentes nulos) y fuera de *S* (campos originales), mientras que la densidad volumétrica de corrientes equivalentes en la dirección perpendicular a *S* es una función delta de Dirac que en las ecuaciones de Maxwell del rotacional corresponde con la derivada de la discontinuidad de los campos en *S*. En consecuencia, el problema equivalente cumple las ecuaciones de Maxwell en todo el espacio, y la equivalencia con el problema original en *V* se justifica meramente por la elección de los campos en *V*, iguales a los del problema original.

Como $\vec{E} = 0$, $\vec{H} = 0$ en el interior del volumen V_o, se puede modificar el medio sin alterar esta condición. Dos opciones claras son ocupar todo el volumen V_o por un conductor eléctrico perfecto o por uno magnético también perfecto (Fig. 3.9).

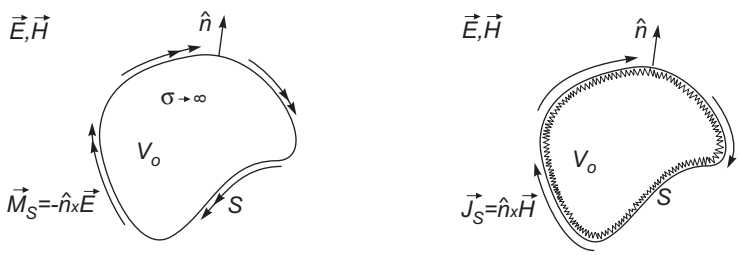


Fig. 3.9 Problemas equivalentes con conductores eléctricos y magnéticos

Para el primero de los casos, las fuentes equivalentes $\vec{J}_s$ coinciden con la corriente que las fuentes magnéticas $\vec{M}_s$ inducen sobre el conductor, según la condición de contorno $\vec{J}_s = \hat{n}\times\vec{H}\big|_s$ y, por tanto, no radian en presencia del mismo. El campo dispersado es ahora debido únicamente a la radiación de las fuentes $\vec{M}_s$ en presencia del conductor. Utilizando un símil de circuitos, podría decirse que el conductor cortocircuita las fuentes equivalentes $\vec{J}_s$. Análogamente, para un conductor magnético perfecto, las fuentes magnéticas coinciden con la tensión inducida por las eléctricas y no radian. En este caso tenemos únicamente la radiación de las fuentes eléctricas $\vec{J}_s$.

Las corrientes eléctricas inducidas en un conductor eléctrico perfecto o las magnéticas inducidas en un conductor magnético perfecto nunca radian. Si situamos una superficie cerrada infinitesimal alrededor de un elemento de corriente inducida, el flujo neto de potencia que atraviesa esta superficie infinitesimal es nulo: hay campos que entran y excitan la corriente inducida y campos que salen, radiados por la corriente inducida. Dentro de esta superficie infinitesimal ni se genera ni se

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

disipa potencia. En cambio, las corrientes impresas son excitadas por una fuente de señal externa, que introduce energía en el sistema, y no hay flujo de potencia que entra en la superficie infinitesimal, sólo flujo saliente que corresponde a la radiación de la fuente impresa.

La reducción de dos tipos de fuentes equivalentes a una no implica en general una simplificación del problema, ya que a diferencia de la situación de partida, donde el medio es homogéneo, ahora hay que tener en cuenta la presencia del conductor y resolver el problema de radiación de la fuente estando presente el conductor en el volumen V_o. En el caso particular de que la frontera de V_o sea un plano, sí se obtiene una simplificación, ya que entonces la presencia del conductor puede analizarse mediante las imágenes de las fuentes.

El teorema de equivalencia y las tres configuraciones de generadores anteriores tienen un símil circuital [Harrington '61] que permite comprender mejor las tres familias de fuentes equivalentes encontradas. Tomemos la interconexión de una red activa y una pasiva, que vamos a representar, según se indica en la figura 3.10a, mediante un generador de tensión V_g e impedancia interna Z_g conectado a una carga Z_L. En bornes de la carga existirá una tensión V y circulará por ella una corriente I. Si se compara este modelo con la situación descrita en la figura 3.7, se observa que las fuentes situadas en V_o equivalen al generador, el medio externo a las fuentes equivale a la carga y los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ existentes en la superficie S a la tensión V y a la corriente I.

Vista desde la carga, la fuente puede sustituirse por dos generadores, uno de tensión y otro de corriente, de valores idénticos a la tensión y a la corriente en la carga, más la impedancia del generador, como se indica en la figura 3.10b. Esta red equivalente puede analizarse mediante superposición, y se comprueba que se mantienen sobre la carga los mismos valores de tensión y de corriente que en el problema original, pero ahora sobre Z_g no existe tensión ni corriente ($V'=0$, $I'=0$). Como consecuencia de esto último, puede cortocircuitarse o dejarse en circuito abierto Z_g, por lo que resultan los nuevos generadores equivalentes de las figuras 3.10c y d, que se corresponden con la presencia, en la figura 3.9, de conductores eléctricos o magnéticos.

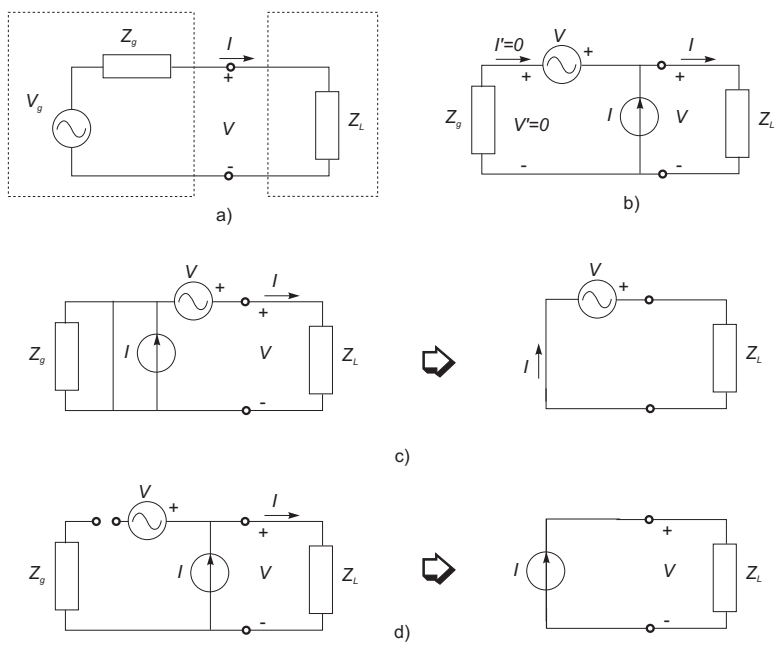


Fig. 3.10 Generadores equivalentes de una fuente arbitraria

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Aplicación del teorema de equivalencia al cálculo de campos radiados por antenas

En el problema original tenemos unas fuentes impresas o primarias, correspondientes a la alimentación de la antena, que radian en presencia de la misma, y unas corrientes inducidas sobre la superficie conductora de la antena que no radian. No podemos calcular la radiación de las fuentes primarias en presencia de la antena, pues la formulación derivada de los potenciales retardados (3.24) y (3.25) (obtenidas en el Anexo A a través del lema de Green A.5) es válida únicamente en un medio homogéneo (espacio libre). Análogamente, en las ecuaciones (3.28) y (3.29), potenciales en el dominio de la frecuencia, la función $e^{-jkR}/(4\pi R)$ es la respuesta impulsional -o función de Green- en el espacio libre. Para poder utilizar esta formulación de espacio libre, nos vemos obligados a transformar el problema original en uno equivalente en el cual todas las fuentes se encuentren en un medio homogéneo.

Esto se realiza mediante el teorema de equivalencia, que nos permite calcular los campos originales en V mediante la suma de los campos radiados en espacio libre por unas fuentes equivalentes $\vec{J}_s$ y $\vec{M}_s$ más los radiados por las fuentes impresas existentes en V (no por las existentes en V_0, que han sido eliminadas en el problema equivalente). Si hacemos coincidir la superficie S con la superficie de la antena, perfectamente conductora, las fuentes magnéticas equivalentes son nulas, $\vec{M}_s = 0$, y el valor de las fuentes eléctricas equivalentes, $\vec{J}_s = \hat{n}\times\vec{H}\big|_S$ coincide con el de las corrientes inducidas en el problema original. Cuando en el problema equivalente calculamos la radiación de $\vec{J}_s$ en espacio libre es un error muy común pensar que se está calculando la radiación de las corrientes inducidas, que como sabemos no radian. Sin embargo, el conocimiento experimental o mediante modelos analíticos simples de las corrientes inducidas (ver capítulo 4) nos permite asignar un valor a las fuentes equivalentes $\vec{J}_s$, que de otro modo sería muy difícil de obtener.

A la radiación de las fuentes equivalentes $\vec{J}_s$ hay que sumarle la de las fuentes impresas en V, que corresponden a la alimentación de la antena. En muchos casos, como en las antenas del capítulo 4, esta contribución es muy pequeña y puede despreciarse. En otros casos, como en el de antenas de reflector (capítulo 6), es necesario sumar la radiación de las fuentes impresas (alimentador) para obtener un cálculo correcto del diagrama de radiación en todo el espacio: La superficie S coincide con la superficie del reflector. Las fuentes equivalentes $\vec{J}_s$, de igual valor que las corrientes inducidas, radian tanto hacia delante como hacia atrás del reflector. Por el lado del alimentador, se suma la radiación de $\vec{J}_s$ con la del alimentador, que en muchos casos es despreciable. Por detrás del reflector, prácticamente se cancelan la radiación del alimentador con la de $\vec{J}_s$, obteniendo pequeños valores de campo en la zona de sombra. Si hubiésemos despreciado la radiación de las fuentes impresas (alimentador), habríamos obtenido un lóbulo trasero igual a la radiación de $\vec{J}_s$ en la zona de sombra. En el peor caso (reflector plano) este lóbulo trasero incorrectamente obtenido sería simétrico del lóbulo delantero.

3.5 Teorema de reciprocidad

Vamos a establecer el lema de Lorentz para un medio lineal e isótropo que ocupe un volumen V, con superficie exterior S como se indica en la figura 3.11. Supongamos dos conjuntos de fuentes de la misma frecuencia $\vec{J}^a$, $\vec{M}^a$ y $\vec{J}^b$, $\vec{M}^b$ que producen campos $\vec{E}^a$, $\vec{H}^a$ y $\vec{E}^b$, $\vec{H}^b$ respectivamente. Si tomamos,

$$\nabla\cdot\left[\vec{E}^b\times\vec{H}^a-\vec{E}^a\times\vec{H}^b\right]$$

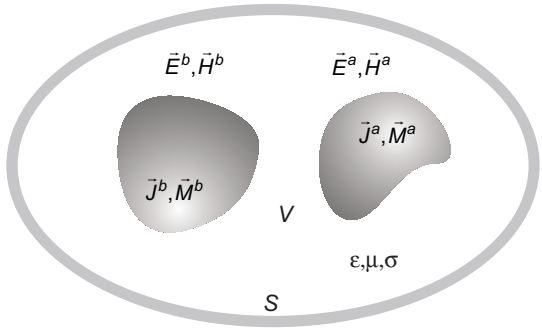


Fig. 3.11 Volumen y fuentes sobre los que se obtiene reciprocidad

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

lo desarrollamos y sustituimos las ecuaciones de Maxwell (3.11) y (3.12), se obtiene

$$\nabla\cdot\left[\vec{E}^b\times\vec{H}^a-\vec{E}^a\times\vec{H}^b\right]=\left(\vec{H}^a\cdot\nabla\times\vec{E}^b-\vec{E}^b\cdot\nabla\times\vec{H}^a\right)-$$
$$-\left(\vec{H}^b\cdot\nabla\times\vec{E}^a-\vec{E}^a\cdot\nabla\times\vec{H}^b\right)=\vec{E}^a\cdot\vec{J}^b-\vec{H}^a\cdot\vec{M}^b-\vec{E}^b\cdot\vec{J}^a+\vec{H}^b\cdot\vec{M}^a$$

de lo que resulta, mediante integración en volumen y aplicación del teorema de la divergencia,

$$\int_{S'}\left[\vec{E}^b\times\vec{H}^a-\vec{E}^a\times\vec{H}^b\right]\cdot d\vec{s}'=\int_{V'}\left[\vec{E}^a\cdot\vec{J}^b-\vec{H}^a\cdot\vec{M}^b-\vec{E}^b\cdot\vec{J}^a+\vec{H}^b\cdot\vec{M}^a\right]dv' \qquad (3.114)$$

Para antenas el volumen es todo el espacio y su superficie exterior la del infinito; si se sustituyen en la integral de superficie los campos de radiación (3.81) resulta, teniendo en cuenta que $E_\theta=\eta H_\phi$, $E_\phi=-\eta H_\theta$ y $d\vec{s}'=\hat{r}\,ds'$,

$$\begin{aligned}\int_{S'}\left[\vec{E}^b\times\vec{H}^a-\vec{E}^a\times\vec{H}^b\right]\cdot d\vec{s}' &= \int_{S'}\left[\left(E_\theta^bH_\phi^a-E_\phi^bH_\theta^a\right)-\left(E_\theta^aH_\phi^b-E_\phi^aH_\theta^b\right)\right]ds' = \\ &= \int_{S'}\left[\left(\eta H_\phi^bH_\phi^a+\eta H_\theta^bH_\theta^a\right)-\left(\eta H_\phi^aH_\phi^b+\eta H_\theta^aH_\theta^b\right)\right]ds' = 0\end{aligned} \qquad (3.115)$$

Finalmente se obtiene el teorema de reciprocidad o lema de Lorentz

$$\int_{v'}\left(\vec{E}^a\cdot\vec{J}^b-\vec{H}^a\cdot\vec{M}^b\right)dv'=\int_{v'}\left(\vec{E}^b\cdot\vec{J}^a-\vec{H}^b\cdot\vec{M}^a\right)dv' \qquad (3.116)$$

En él se relaciona cada conjunto de fuentes con los campos que produce en esa posición del espacio el otro conjunto de fuentes. Una sencilla aplicación de este teorema es la siguiente:

Supongamos fuentes $\vec{M}^b=0$ y $\vec{J}^b=\hat{p}\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$, que es un elemento de corriente de dirección $\hat{p}$ situado en el punto (x_0,y_0,z_0) y produce unos campos $\vec{E}^b$, $\vec{H}^b$ en cualquier punto del espacio; una vez conocidos éstos se pueden calcular los campos que produce cualquier distribución de corrientes $\vec{J}^a$, $\vec{M}^a$ y obtenemos de (3.116)

$$\hat{p}\cdot\vec{E}^a(x_0,y_0,z_0)=\int_{v'}\left(\vec{E}^b\cdot\vec{J}^a-\vec{H}^b\cdot\vec{M}^a\right)dv' \qquad (3.117)$$

que es realmente una integral de convolución en la que $\vec{E}^b$ y $\vec{H}^b$ juegan el papel de respuesta impulsional o función de Green. Orientando $\hat{p}$ según tres direcciones ortogonales del espacio se obtendrá $\vec{E}^a$. Análogamente, $\vec{H}^a$ se obtendría de los campos producidos por $\vec{M}^b$.

3.6 Aplicación del teorema de reciprocidad

El teorema de reciprocidad puede aplicarse a cualquier elemento, dispositivo o medio siempre que se cumplan las hipótesis bajo las que ha sido derivado, básicamente las de radiación en un medio homogéneo, lineal e isótropo, lo que ocurre en la inmensa mayoría de las situaciones reales y siempre en antenas que no se encuentren en presencia de un plano de masa. Si existiera dicho plano, ya no podrían sustituirse los campos de radiación en la integral de superficie (3.115) y el resultado sería distinto. También habrá que ser precavidos en su aplicación si el sistema incorpora elementos no recíprocos, circuladores o aisladores, o si la propagación se realiza en un medio anisótropo.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Vamos a considerar dos antenas identificadas mediante los índices 1 y 2, que supondremos aisladas en todo el espacio. La situación a) consiste en la aplicación de un generador de corriente I_1^a en la antena 1 y la medida de la tensión en circuito abierto V_2^a inducida en bornes de la antena 2. La situación b) consiste en aplicar el generador I_2^b a la antena 2 y medir la tensión en circuito abierto V_1^b en la antena 1, tal y como se indica en la figura 3.12.

Al no existir fuentes magnéticas (3.116) se reduce a

$$\int_{V'} \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b \, dv' = \int_{V'} \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a \, dv' \tag{3.118}$$

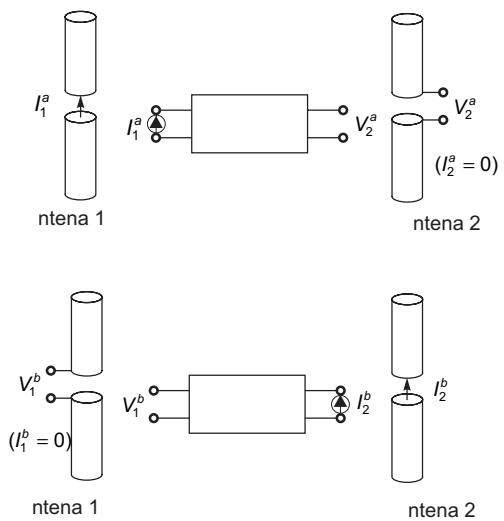


Fig. 3.12 Aplicación del teorema de reciprocidad a dos antenas arbitrarias

y teniendo en cuenta que $\vec{J}^a$ sólo existe en la región terminal de la antena 1 (puerto 1 del cuadripolo formado por las antenas y todo el espacio circundante) y $\vec{J}^b$ en terminales de la antena 2 (puerto 2), tenemos

$$\int_{Ant2} \vec{E}_2^a \cdot \vec{J}_2^b \, dv' = \int_{Ant1} \vec{E}_1^b \cdot \vec{J}_1^a \, dv' \tag{3.119}$$

y como la corriente del generador fluye a lo largo de una línea y es constante

$$\int_{Ant2} \vec{E}_2^a \cdot \vec{J}_2^b dv' = \int_{Ant2} \vec{E}_2^a(\ell) \cdot I_2^b \, d\vec{\ell} = -I_2^b V_2^a \tag{3.120}$$

donde V_2^a es la tensión en circuito abierto creada en la región terminal de la antena 2 por la corriente I_1^a. Análogamente

$$\int_{Ant1} \vec{E}_1^b \cdot \vec{J}_1^a \, dv' = -I_1^a V_1^b \tag{3.121}$$

expresiones válidas para cualquier cuadripolo o medio homogéneo, lineal e isótropo, es decir formado por elementos bilaterales, con el resultado

$$V_2^a I_2^b = V_1^b I_1^a \tag{3.122}$$

o equivalentemente

$$\left.\frac{V_2^a}{I_1^a}\right|_{I_2^a=0} = \left.\frac{V_1^b}{I_2^b}\right|_{I_1^b=0} \tag{3.123}$$

en la notación habitual

$$Z_{21} = Z_{12} \tag{3.124}$$

Si hubiéramos aplicado el teorema de reciprocidad con fuentes de corrientes magnéticas, que como hemos visto son equivalentes a generadores de tensión, obtendríamos en un desarrollo similar

$$Y_{21} = Y_{12} \tag{3.125}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3.6.1 Consecuencias del teorema de reciprocidad

Igualdad de impedancias en trasmisión y en recepción

Aplicando el teorema de reciprocidad a dos antenas alejadas se puede representar la interacción entre ellas mediante un cuadripolo, formado por las dos antenas y todo el espacio, con bornes de entrada en las regiones terminales de las antenas. Si suponemos la antena 1 como transmisora tenemos

$$V_1 = Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2 \tag{3.126}$$

donde Z_{11} es su autoimpedancia y Z_{12} la impedancia mutua con la antena receptora, que si está alejada tendrá un acoplo débil, como vimos en la ecuación de transmisión. En consecuencia, en una antena en transmisión tenemos

$$V_1 \approx Z_{11}\, I_1$$

que implica una impedancia en transmisión aproximadamente igual a la autoimpedancia o impedancia de la antena aislada.

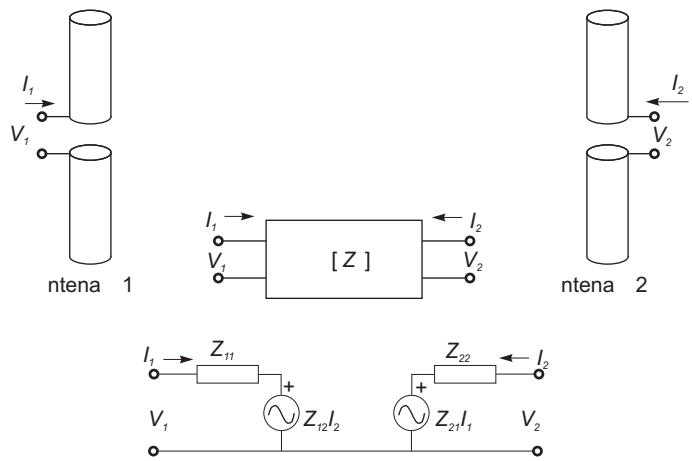


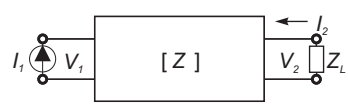
Fig. 3.13 Impedancia en transmisión y recepción de una antena

Si invertimos los papeles y ahora la antena 1 es la receptora y la 2 la transmisora, la ecuación (3.126) sigue siendo válida pero, en este caso, $Z_{12}I_2$ es el producto de la impedancia mutua entre las antenas por la corriente en la antena transmisora y se comporta como un generador ideal de tensión, ya que en general, aunque variásemos la impedancia de carga de la antena 1, no variará I_2.

Vista desde sus bornes (Fig. 3.13), la antena en recepción se comporta como un generador ideal de tensión $Z_{12}I_2$, con impedancia interna Z_{11}. En consecuencia, las impedancias en transmisión y en recepción son iguales.

La prueba anterior vale solamente para el caso de antenas alejadas, pero puede comprobarse que la igualdad de impedancias se cumple en cualquier situación. Si los bornes de 2 están cargados con una impedancia Z_L se tiene, para la antena 1 transmitiendo,

$$V_1 = Z_{11}\, I_1 + Z_{12}\, I_2$$
$$V_2 = Z_{21}\, I_1 + Z_{22}\, I_2 = -Z_L\, I_2$$



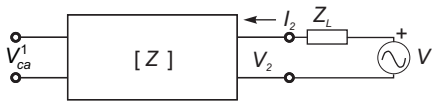
Despejando I_2 en la segunda ecuación y sustituyéndola en la primera se obtiene la impedancia de la antena en transmisión Z_T^1

$$Z_T^1 = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}\, Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \tag{3.127}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Con la antena 1 actuando en recepción, situaremos en los bornes de la antena 2 un generador de tensión V e impedancia interna Z_L y obtendremos la impedancia interna del generador equivalente a la entrada de la antena receptora; para ello habrá que calcular la tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito del puerto 1. Para la tensión en circuito abierto V_{ca}^1, se tiene

$$V_1 = Z_{12} I_2 \qquad (I_1 = 0)$$
$$V_2 = Z_{22} I_2 = V - Z_L I_2$$

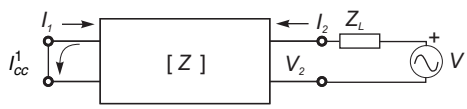


y resulta

$$V_{ca}^1 = Z_{12} I_2 = V \frac{Z_{12}}{Z_{22} + Z_L}$$

y para la corriente en cortocircuito I_{cc}^1

$$0 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \qquad (I_{cc}^1 = -I_1)$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = V - Z_L I_2$$



de donde puede obtenerse

$$I_{cc}^1 = -I_1 = V \frac{Z_{12}}{Z_{11}(Z_{22} + Z_L) - Z_{12}Z_{21}}$$

Finalmente la impedancia en recepción Z_R^1 resulta

$$Z_R^1 = \frac{V_{ca}^1}{I_{cc}^1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \tag{3.128}$$

idéntica a la impedancia en transmisión.

Potencia entregada por una antena receptora a su carga

Supongamos la antena receptora 2 (Fig. 3.13) con una carga Z_L, que vamos a suponer adaptada $Z_L = (Z_{22})^* = R_{22}\text{-}jX_{22}$. La tensión en circuito abierto, o del generador equivalente en dicha antena es $V_{ca} = Z_{21} I_1$ y la potencia entregada a la carga P_{R2} es

$$P_{R2} = \left| \frac{V_{ca}}{Z_{22} + Z_L} \right|^2 R_{22} = \frac{|I_1|^2 |Z_{21}|^2}{4 R_{22}} \tag{3.129}$$

La potencia transmitida por la antena 1 es $P_{T1} = |I_1|^2 R_{11}$ y

$$\frac{P_{R2}}{P_{T1}} = \frac{|Z_{21}|^2}{4 R_{11} R_{22}} \tag{3.130}$$

La ecuación de transmisión (1.45) da una expresión alternativa para esta relación de potencias

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\frac{P_{R2}}{P_{T1}} = \frac{D_1 \, A_{ef\,2}}{4\,\pi\, r^2} \tag{3.131}$$

donde r es la distancia que separa las antenas, D_1 la directividad de la antena transmisora y A_{ef2} el área efectiva de la antena receptora y se han supuesto condiciones de máxima transferencia de potencia.

Si intercambiamos las funciones de transmisión y recepción obtenemos

$$\frac{P_{R1}}{P_{T2}} = \frac{|Z_{12}|^2}{4\,R_{22}\,R_{11}} = \frac{P_{R2}}{P_{T1}} \tag{3.132}$$

Dado que en espacio libre el teorema de reciprocidad implica $Z_{21} = Z_{12}$, el resultado es la igualdad de potencias recibidas a igualdad de potencias transmitidas.

Igualdad de diagramas de radiación y de recepción

Para medir el diagrama de radiación de una antena transmisora (1), mediremos para todas las direcciones del espacio la potencia que capta una sonda o antena receptora (2). Referido a la figura 3.14, si la posición a) es la de máxima radiación, para cada posición b) o dirección (ψ), la relación de potencias recibidas P_2^b / P_2^a es el diagrama de radiación de la antena 1. Este diagrama también podría medirse manteniendo la sonda 2 fija y rotando la antena 1 en sentido opuesto (-ψ).

Si situamos la antena 1 en recepción, obtendremos el diagrama de recepción como la respuesta de la antena al moverla en torno a su centro manteniendo la emisora (antena 2) fija, es decir, P_1^b / P_1^a.

Ambas situaciones están relacionadas por las siguientes expresiones en transmisión

$$\frac{P_2^b}{P_2^a} = \frac{|Z_{21}^b|^2}{|Z_{21}^a|^2}$$

y en recepción

$$\frac{P_1^b}{P_1^a} = \frac{|Z_{12}^b|^2}{|Z_{12}^a|^2} = \frac{|Z_{21}^b|^2}{|Z_{21}^a|^2} = \frac{P_2^b}{P_2^a}$$

por lo que los diagramas de transmisión y de recepción de toda antena son iguales.

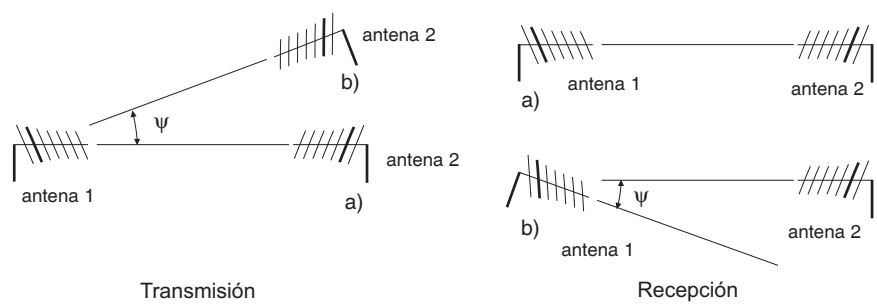


Fig. 3.14 Medida de los diagramas de radiación y de recepción

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3.6.2 Relación entre parámetros de transmisión y de recepción. Longitud efectiva

Una vez establecida la igualdad de diagramas y de impedancias en transmisión y recepción resulta como consecuencia de (3.131) y (3.132) que el producto de la directividad de una antena por el área efectiva de la otra es constante en espacio libre, es decir,

$$D_1 \, A_{ef\,2} \; = \; D_2 \, A_{ef\,1} \tag{3.133}$$

o bien para cualquier par de antenas en ausencia de plano de masa

$$\frac{D_1}{A_{ef\,1}} \; = \; \frac{D_2}{A_{ef\,2}} \; = \; cte \tag{3.134}$$

Antes de poder determinar el valor de la constante vamos a obtener los valores de la corriente y de la tensión en bornes de una antena receptora cuando incide sobre ella una onda, mediante el método conocido como el de la fuerza electromotriz inducida; para ello aplicaremos el teorema de reciprocidad a dos porciones de una misma antena, es decir, abriendo en ella dos puertos, uno en los bornes centrales de la antena y otro en un elemento *dz* a una distancia *z* del centro y analizando dos situaciones, la antena como transmisora y como receptora, tal y como se indica en la figura 3.15 para el caso particular de una antena de hilo recto orientada en $\hat{\ell} = \hat{z}$.

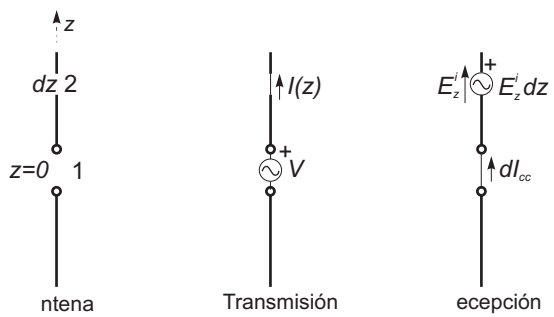


Fig. 3.15 Tensiones y corrientes en una antena

En la situación transmisora aplicamos en el puerto 1 un generador de tensión V y medimos en el puerto 2 cortocircuitado una corriente I que no es más que la distribución de corriente de la antena transmisora. Para la situación receptora, el campo incidente $\vec{E}^i$, definido como el campo que existiría en la posición de la antena si ésta no estuviera presente, equivale a instalar en el puerto 2 un generador de tensión $\vec{E}^i \cdot d\vec{\ell}$, que a su vez produce en el puerto 1 una corriente de cortocircuito dI_{cc}. El teorema de reciprocidad ($Y_{21} = Y_{12}$) permite escribir

$$\frac{V}{I} = \frac{\vec{E}^i \cdot d\vec{\ell}}{dI_{cc}}$$

$$dI_{cc} = \frac{1}{V} I \vec{E}^i \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{V} \vec{I} \cdot \vec{E}^i \, d\ell$$

y si sumamos todas las contribuciones dℓ obtenemos para la corriente en cortocircuito

$$I_{cc} = \frac{1}{V} \int_{ant} \vec{I} \cdot \vec{E}^i \, d\ell \tag{3.135}$$

donde I es la corriente en la antena, que actúa como transmisora al aplicarle un generador de tensión V, e I_{cc} es la corriente en cortocircuito inducida en la antena cuando sobre ella incide un campo $\vec{E}^i$. Como hemos obtenido la igualdad de impedancias en transmisión y recepción, tenemos también, teniendo en cuenta el circuito equivalente de Thevenin de la antena en recepción,

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$Z_{entrada} = \frac{V}{I(0)} = -\frac{V_{ca}}{I_{cc}} \tag{3.136}$$

donde $I(0)$ es la corriente en los terminales de alimentación de la antena. La tensión en circuito abierto V_{ca} inducida en una antena de hilo por una onda incidente $\vec{E}^i$ es, en consecuencia,

$$V_{ca} = -\frac{1}{I(0)}\int_{Ant} \vec{I}\cdot\vec{E}^i d\ell \tag{3.137}$$

que para el caso general de una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ se convierte en

$$\begin{aligned} V_{ca} &= -\frac{1}{I(0)}\int_{Ant} \vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{E}^i(\vec{r})dv \\ I_{cc} &= \frac{1}{V}\int_{Ant} \vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{E}^i(\vec{r})dv \end{aligned} \tag{3.138}$$

que son expresiones completamente generales que han sido derivadas del teorema de reciprocidad para, a partir de un conocimiento de los parámetros de transmisión, I en este caso, obtener la respuesta de una antena I_{cc}, V_{ca}, cuando sobre ella incide un campo E_z^i. Nótese que la tensión en circuito abierto, V_{ca}, está en contrafase con la integral del campo que la induce, $\vec{E}^i(\vec{r})$. Se trata de una "fuerza electromotriz inducida", que tiende a oponerse a la causa que la origina. En términos del teorema de equivalencia, el campo dispersado -debido a las fuentes equivalentes en espacio libre o a la fuente V_{ca} en presencia de la antena- debe cancelar la componente del campo incidente paralela a la antena para que el campo total cumpla las condiciones de contorno sobre la superficie de la misma.

La longitud efectiva es un parámetro de diagrama, proporcional al campo radiado, cuya definición simplifica el cálculo del coeficiente de polarización entre dos antenas. Se define longitud efectiva en transmisión como la longitud vectorial de un hilo recto de corriente constante que a grandes distancias y en la dirección perpendicular al hilo radia el mismo campo que la antena que estamos analizando en una dirección dada, a igualdad de corriente de entrada $I(0)$. Según (3.51), el campo producido a grandes distancias por una antena en la dirección $\hat{r}$ es:

$$\vec{E} = j\omega\mu\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{Ant}\vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv'\right) \tag{3.139}$$

que particularizado en la dirección perpendicular $\hat{r}\cdot\vec{r}\,' = 0$ para un hilo recto de corriente uniforme $I(0)$ y longitud $\vec{\ell}_{ef}$ resulta (3.89):

$$\vec{E} = -j\omega\mu I(0)\vec{\ell}_{ef}\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \tag{3.140}$$

Igualando ambas expresiones del campo se despeja el valor de la longitud efectiva en transmisión:

$$\vec{\ell}_{ef}(\hat{r}) = -\frac{1}{I(0)}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{Ant}\vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv'\right) \tag{3.141}$$

La longitud efectiva en recepción se define como el vector $\vec{\ell}_{ef}$ que para una onda plana incidente desde la dirección $\hat{r}$, $\vec{E}^i = \vec{E}_0^i e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}$, verifica $V_{ca} = -\vec{\ell}_{ef}\cdot\vec{E}_0^i$, que es una generalización de (1.39). Puede

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

comprobarse fácilmente, con ayuda de (3.138), que la longitud efectiva en transmisión (3.141) también verifica la definición de longitud efectiva en recepción:

$$\begin{aligned} V_{ca} &= -\vec{\ell}_{ef}\cdot\vec{E}_0^i = \frac{1}{I(0)}\left[\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{Ant}\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}}\,dv'\right)\right]\cdot\vec{E}_0^i = \\ &= \frac{1}{I(0)}\int_{Ant}\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}}\,dv'\cdot\left(\left(\vec{E}_0^i\times\hat{r}\right)\times\hat{r}\right) = \\ &= -\frac{1}{I(0)}\int_{Ant}\vec{J}(\vec{r}\,')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv'\cdot\vec{E}_0^i = -\frac{1}{I(0)}\int_{Ant}\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\vec{E}_0^i\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}dv' = \\ &= -\frac{1}{I(0)}\int_{Ant}\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\vec{E}^i(\vec{r}\,')dv' \end{aligned} \tag{3.142}$$

con lo que la longitud efectiva es igual en transmisión y en recepción.

Para el caso habitual de una antena de hilo recto y longitud ℓ con corriente $I(z)\hat{z}$ en fase, la longitud efectiva en el máximo de radiación, que se encuentra en el plano perpendicular $\hat{r}\cdot\vec{r}\,'=0$, $\hat{r}\times(\hat{r}\times\hat{z})=\hat{z}$, será

$$\vec{\ell}_{ef} = \hat{z}\frac{1}{I(0)}\int_{\ell}I(z)\,dz = \ell\hat{z}\frac{1}{\ell}\int_{\ell}\frac{I(z)}{I(0)}dz \tag{3.143}$$

que equivale a la longitud física del hilo multiplicada por el valor medio de la distribución de corriente normalizada. Este parámetro indica la eficiencia con la que se aprovecha la longitud del hilo en la radiación: por ejemplo, para una distribución de corriente uniforme la longitud efectiva en la dirección del máximo coincide con la longitud física, $\vec{\ell}_{ef} = \ell\hat{z}$.

Volviendo al cociente D/A_{ef}, estamos en situación de poder calcular su valor. Vamos a hacerlo para un dipolo elemental de longitud ℓ (ver apartado 4.1.1). Como la distribución de corriente es uniforme, ℓ coincide con la longitud efectiva y de (1.38) obtenemos para el área efectiva en condiciones de adaptación de impedancias

$$A_{ef} = \frac{\ell_{ef}^2\,\eta}{4\,R_r} = \frac{\ell^2\,120\,\pi}{320\,\pi^2\,(\ell/\lambda)^2} = \frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{\pi} \tag{3.144}$$

Como para el dipolo elemental $D = 3/2$, por tener un diagrama de radiación $t(\theta,\phi) = \text{sen}^2\theta$, obtenemos en general para todas las antenas que radian en espacio libre -sin plano de masa- y en cualquier dirección del espacio

$$\frac{A_{ef}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \tag{3.145}$$

3.6.3 Coeficiente de desacoplo de polarización

Las expresiones (3.138) de la tensión en circuito abierto y de la corriente en cortocircuito inducidas por una onda incidente sobre una antena contienen en el integrando información sobre la polarización de la antena y de la onda.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Se observa que si las corrientes en la antena $\vec{J}$ y el campo incidente $\vec{E}$ son ortogonales ($\vec{J}\cdot\vec{E}=0$) no se transfiere potencia de la onda a la antena. Por el contrario, si están alineados $\left(\vec{J}\cdot\vec{E}=\left|\vec{J}\right|\left|\vec{E}\right|\right)$ la transferencia de potencia es máxima. Teniendo en cuenta la definición (1.46) del coeficiente de desacoplo de polarización, C_p, diríamos que en el primer caso están totalmente desadaptadas ($C_p = 0$), mientras que en el segundo hay adaptación ($C_p = 1$).

Para analizar en general este coeficiente es necesario tener en cuenta que $\vec{J}$ y $\vec{E}$ son vectores complejos, cuyas amplitudes y fases pueden variar a lo largo de la antena. Se puede obtener la expresión general del coeficiente de desacoplo de polarización suponiendo, como se indica en la figura 3.16, una antena centrada en el origen y una onda plana de polarización arbitraria incidiendo sobre ella en una dirección y sentido ($-\hat{r}$). Esta onda estaría creada por otra antena situada en la lejanía en la dirección $\hat{r}$. Seguiremos denominando I(0) a la corriente en bornes de la antena en transmisión y representaremos el campo incidente $\vec{E}$ mediante su amplitud E_0 y un vector unitario de polarización $\hat{e}_r$

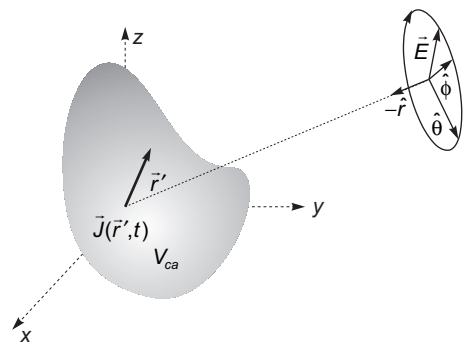


Fig. 3.16 Acoplo de polarización entre una antena y una onda incidente

$$\vec{E}^i = \hat{e}_r\, E_0^i\, e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}} \qquad (3.146)$$

El vector de polarización es ortogonal a la dirección de propagación ($\hat{e}_r\cdot\hat{r}=0$) y toma alguno de los siguientes valores

- polarización lineal: $\hat{e}_r = \hat{\theta}\,;\quad \hat{e}_r = \hat{\phi}\,;\quad \hat{e}_r = \cos\alpha\,\hat{\theta} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\phi}$
- polarización circular: $\hat{e}_r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\theta} + j\,\hat{\phi}\right)$ (derechas)

  $\hat{e}_r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\theta} - j\,\hat{\phi}\right)$ (izquierdas)
- polarización elíptica: $\hat{e}_r = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\,\hat{\theta} + b\,e^{j\alpha}\,\hat{\phi}\right)$

  $a, b > 0, \quad 0 < \alpha < \pi$ (derechas)

  $a, b > 0, \quad 0 > \alpha > -\pi$ (izquierdas)

El coeficiente de desacoplo de polarización C_p se define como la relación entre la potencia recibida por la antena y la potencia que recibiría en condiciones de máximo acoplo de polarización:

$$C_p = \frac{\left|V_{ca}\right|^2}{\left|V_{ca}\right|^2_{\max}} = \frac{\left|\vec{\ell}_{ef}\cdot\vec{E}_0^i\right|^2}{\left|\vec{\ell}_{ef}\right|^2\cdot\left|\vec{E}_0^i\right|^2} = \left|\hat{e}_t\cdot\hat{e}_r\right|^2 \qquad (3.147)$$

donde $\hat{e}_t = \vec{\ell}_{ef}/\left|\vec{\ell}_{ef}\right|$ es la polarización de la antena y $\hat{e}_r = \vec{E}_0^i/\left|\vec{E}_0^i\right|$ es la polarización del campo incidente -o recibido-.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La polarización de una antena puede definirse en transmisión como la polarización del campo que radia y en recepción como la polarización del campo incidente que produce máxima tensión en circuito abierto. Ambas definiciones conducen a un mismo vector de polarización de la antena, $\hat{e}_t$, igual al vector longitud efectiva normalizado.

Como hemos situado el origen de coordenadas sobre la antena receptora, para calcular C_p es muy importante tener en cuenta que el campo que radia la transmisora se propaga en la dirección $-\hat{r}$, y su polarización será igual a la que la antena transmisora radia en esta dirección ($-\hat{r}$).

3.6.4 Impedancia de entrada e impedancias mutuas

Existen varios métodos para calcular la impedancia de entrada de una antena si se conoce la distribución de corrientes y, de ella, los campos radiados. El método más directo es $Z_{in} = P/|I(0)|^2$ donde $P = \iint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s}$ es la generalización de la potencia (1.4) que atraviesa una superficie S que envuelve la antena. Si se toman los campos radiados a grandes distancias (3.58), el resultado de la integral es real y corresponde a la potencia radiada por la antena, de la que se obtiene la parte real de la impedancia de entrada, que es la resistencia de radiación. Para calcular también la reactancia de entrada de la antena es necesario colocar la superficie S cerca de la antena e integrar los campos próximos. El resultado de la integral será ahora un número complejo que permite obtener las partes real e imaginaria de la impedancia de entrada.

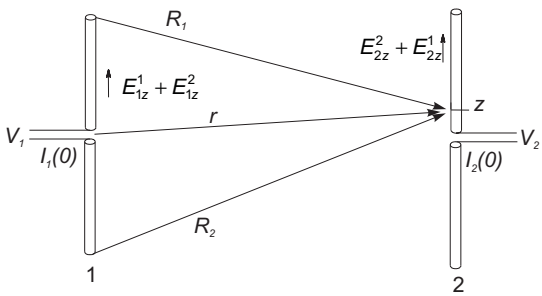


Fig. 3.17 Campos creados sobre los dipolos

Un método alternativo que requiere integrales más simples es el de la fuerza electromotriz inducida (f.e.m.). La figura 3.17 muestra dos antenas que radian simultáneamente, alimentadas por sendos generadores ideales de corriente $I_1(0)$ y $I_2(0)$. En terminales de las antenas aparecen unas tensiones (f.e.m.) inducidas V_1 y V_2. Podemos considerar el sistema como un cuadripolo con los puertos 1 y 2 en los terminales de las antenas.

Como la impedancia interna de los generadores de corriente ideales es infinita, para calcular la tensión que aparece en terminales de la antena 1 podemos aplicar la ecuación (3.138) -obtenida para terminales en circuito abierto- si consideramos que el campo que incide sobre la antena 1 es la suma de la radiación de las corrientes en ambas antenas.

$$V_1 = -\frac{1}{I_1(0)} \int_1 \left(\vec{E}_1^1 + \vec{E}_1^2 \right) \cdot \vec{J}_1 dv \tag{3.148}$$

donde $\vec{J}_1$ es la corriente que circula por la antena 1 cuando actúa como transmisora y la suma $\vec{E}_1^1 + \vec{E}_1^2$ no cumple la condición de contorno sobre la superficie conductora de la antena 1, condición que verifica únicamente el campo total $\vec{E}_1^t + \vec{E}_1^1 + \vec{E}_1^2$.

Análogamente, repitiendo el razonamiento para la antena 2 se obtiene:

$$V_2 = -\frac{1}{I_2(0)} \int_2 \left(\vec{E}_2^1 + \vec{E}_2^2 \right) \cdot \vec{J}_2 dv \tag{3.149}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde ahora $\vec{J}_2$ es la corriente que circula por la antena 2 cuando actúa como transmisora, $\vec{E}_2^1$ el campo producido en espacio libre por la antena 1 sobre la antena 2 y $\vec{E}_2^2$ el campo radiado en espacio libre por las corrientes equivalentes de la antena 2.

Manipulando (3.148) y (3.149) tenemos

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1(0)\left[-\frac{1}{I_1(0)^2}\int_1 \vec{E}_1^1\cdot\vec{J}_1 dv\right] + I_2(0)\left[-\frac{1}{I_1(0)I_2(0)}\int_1 \vec{E}_1^2\cdot\vec{J}_1 dv\right] \\ V_2 &= I_1(0)\left[-\frac{1}{I_1(0)I_2(0)}\int_2 \vec{E}_2^1\cdot\vec{J}_2 dv\right] + I_2(0)\left[-\frac{1}{I_2(0)^2}\int_2 \vec{E}_2^2\cdot\vec{J}_2 dv\right] \end{aligned} \tag{3.150}$$

que se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}\, I_1(0) + Z_{12}\, I_2(0) \\ V_2 &= Z_{21}\, I_1(0) + Z_{22}\, I_2(0) \end{aligned} \tag{3.151}$$

que es la presentación normal cuando se trabaja con cuadripolos. Resultan las siguientes expresiones generales para la autoimpedancia Z_{11} de cualquier antena

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1(0)}\Big|_{I_2(0)=0} = -\frac{1}{I_1(0)^2}\int_1 \vec{E}_1^1\cdot\vec{J}_1 dv \tag{3.152}$$

y para la impedancia mutua Z_{12} entre dos antenas

$$Z_{12} = -\frac{1}{I_1(0)I_2(0)}\int_1 \vec{E}_1^2\cdot\vec{J}_1 dv \tag{3.153}$$

Para calcular la autoimpedancia de una antena es necesario conocer el campo que la corriente que circula sobre la antena en transmisión radia sobre la propia antena en espacio libre; y para la impedancia mutua el que crea sobre ella la otra antena.

En las ecuaciones (3.152) y (3.153) se observa que

$$Z_{11} = \lim_{d\to 0} Z_{12} \tag{3.154}$$

donde d es la distancia entre las antenas.

Las ecuaciones (3.150) y (3.151) son de gran utilidad para analizar la radiación de una antena en presencia de un obstáculo conductor. En este caso el obstáculo juega el papel de la antena 2 y $\vec{E}_1^2$ es el campo que el obstáculo refleja sobre la antena 1.

Cuando se considera la radiación de una antena aislada en el espacio, o la distancia d con otras antenas u obstáculos es suficientemente grande para asumir $Z_{12} \approx 0$, la impedancia de entrada coincide con la autoimpedancia, $Z_{in} = Z_{11}$. Si se conoce la corriente que circula por la antena en transmisión, calculada por ejemplo mediante los métodos numéricos del capítulo 8, la ecuación (3.152) nos proporciona un resultado muy preciso para la impedancia de entrada de la antena aislada. Sin embargo, en muchas ocasiones no se conoce bien el valor de esta corriente. En el capítulo 4 veremos como la utilización de modelos aproximados para la corriente permite obtener estimaciones razonables de la impedancia de entrada.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

3.1 Tomando el rotacional de las ecuaciones de Maxwell se llega a la ecuación de onda para el campo eléctrico, ¿qué expresión es correcta?

a) $\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=-j\omega\mu\vec{J}-\nabla(\rho/\varepsilon)$ b) $\nabla^2\vec{E}-k^2\vec{E}=-j\omega\mu\vec{J}-\nabla(\rho/\varepsilon)$

c) $\nabla^2\vec{E}-k^2\vec{E}=-j\omega\mu\vec{J}+\nabla(\rho/\varepsilon)$ d) $\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=j\omega\mu\vec{J}+\nabla(\rho/\varepsilon)$

3.2 Para una variación temporal arbitraria, ¿qué expresión es incorrecta?

a) $\vec{E}=-\nabla\Phi$ b) $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ c) $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ d) $\nabla\cdot\vec{B}=0$

3.3 Sea una distribución de corriente de densidad $\vec{J}=I_0\,\delta(x)\delta(y)\hat{z}$. ¿Cuál de las siguientes expresiones, para el potencial vector $\vec{A}$, es errónea?

a) $A_x=0$ b) $A_\theta=-A_z\text{sen}\theta$ c) $A_r=0$ d) $A_\phi=0$

3.4 Para una distribución de corriente $\vec{J}$ caracterizada por su potencial vector $\vec{A}(\vec{r})=\hat{z}\,e^{-jkr}/r$ en un medio $\varepsilon_0\,\mu_0$.
¿Cuál de las afirmaciones sobre $\vec{H}$ es correcta, si $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-jkr}}{r}\right)=\dfrac{x}{r}\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{e^{-jkr}}{r}\right)$?

a) $H_y=\dfrac{e^{-jkr}x}{\mu_0 r^2}\left(jk+\dfrac{1}{r}\right)$ b) $H_y=\dfrac{e^{-jkr}x}{\mu_0 r}\left(jk+\dfrac{1}{r}\right)$

c) $H_y=j\dfrac{ke^{-jkr}x}{\mu_0 r^2}$ d) $H_y=0$

3.5 ¿Cuál de las siguientes expresiones para el campo lejano es incorrecta?

a) $E_r=-j\omega A_r$ b) $E_\theta=-j\omega A_\theta$

c) $E_\phi=-j\omega A_\phi$ d) $\vec{E}=-\nabla\Phi-j\omega\vec{A}$

3.6 ¿Qué expresión es correcta para el campo magnético radiado por una corriente $\vec{J}$?

a) $\vec{H}=-j\dfrac{\omega}{\eta}\hat{r}\times\vec{A}$ b) $\vec{H}=j\dfrac{k}{\mu}\hat{r}\times\vec{A}$

c) $\vec{H}=-j\dfrac{\omega}{\eta}\vec{A}$ d) $\vec{H}=\mu(\nabla\times\vec{A})$

3.7 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones para los campos radiados es incorrecta?

a) $\vec{E}=-\eta\hat{r}\times\vec{H}$ b) $\vec{E}=j\omega\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{A})$

c) $\vec{\wp}=\hat{r}\dfrac{\omega^2}{\eta}\left|\vec{A}\right|^2$ d) $\vec{H}=-j\dfrac{\omega}{\eta}\hat{r}\times\vec{A}$

3.8 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones para los campos a gran distancia de las fuentes no es correcta?

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

a) $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son ortogonales entre sí y a la dirección de propagación.
b) $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están en fase.
c) $|\vec{E}|/|\vec{H}|$ es la impedancia de onda del medio.
d) El producto vectorial $\vec{E}\times\vec{H}^*$ es nulo.

3.9 En puntos muy alejados de una antena, ¿cuál de las siguientes ecuaciones es incorrecta?

a) $\nabla\cdot\vec{E}=0$ b) $\nabla\cdot\vec{H}=0$ c) $\vec{E}\cdot\hat{r}=0$ d) $\nabla\times\vec{H}=0$

3.10 Sea una distribución lineal de corriente uniforme de la forma *f*(*x*). Si a esta distribución se le superpone un rizado *g*(*x*), calcular la dirección angular, con respecto al máximo de la uniforme, en la que será mayor el efecto del rizado en el diagrama de radiación:

$$f(x)=1,\quad g(x)=0{,}2\cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right),\quad |x|\le 5\lambda$$

a) 15º b) 30º c) 60º d) 90º

3.11 Para la situación de la cuestión anterior, ¿cuál es la relación entre los máximos del diagrama de radiación de las distribuciones *f*(*x*) y *g*(*x*)?

a) -11 dB b) -14 dB c) -17 dB d) -20 dB

3.12 Para una distribución de corriente de la forma $I(z)=I_0e^{-j\pi z/\lambda}$, se producirá un máximo de radiación para:

a) θ = 0º b) θ = 30º c) θ = 60º d) θ = 90º

3.13 El diagrama de radiación de una antena lineal, orientada según *z*, con distribución uniforme de corriente y longitud 3 λ:

a) Presenta 6 nulos.
b) No posee nulos.
c) No presenta nulos en la dirección del eje *z*.
d) Presenta un nulo en el plano *xy*.

3.14 Si en una antena lineal la distribución de corriente uniforme se convierte en triangular, manteniendo la corriente a la entrada, los campos en la dirección normal varían en un factor:

a) 1 b) 0,75 c) 0,5 d) 0,25

3.15 ¿Cuál es la distancia mínima a partir de la cual el diagrama de radiación de una antena parabólica de 3 m de diámetro, a 10 GHz, puede considerarse invariante?

a) 30 m b) 80 m c) 200 m d) 600 m

3.16 Una antena de dimensiones máximas 5 λ produce, a una distancia de 100 λ, un campo de 1 mV/m. ¿Cuánto valdrá el campo a una distancia de 150 λ?

a) 0,33 mV/m b) 0,5 mV/m c) 0,67 mV/m d) 1 mV/m

3.17 El teorema de reciprocidad no se cumple en:

a) La ionosfera.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) Un medio con pérdidas.
c) Un dieléctrico.
d) Electrostática.

3.18 ¿Qué magnitud produce los mismos campos radiados que $N_\theta = F(\theta,\phi)$?

a) $L_\phi = \eta F(\theta,\phi)$ b) $L_\theta = F(\theta,\phi)$

c) $L_\phi = \frac{1}{\eta} F(\theta,\phi)$ d) $L_\theta = \eta F(\theta,\phi)$

3.19 Sea una distribución de corriente magnética de la forma $\vec{M} = M\hat{z}$; los campos a grandes distancias cumplirán:

a) $\vec{E} = E\hat{z}$ b) $\vec{H} = H\hat{z}$ c) $\vec{E} = E\hat{\phi}$ d) $\vec{E} = E\hat{\theta}$

3.20 En el plano *xy* tenemos una distribución de campos $\vec{E} = E_x\hat{x}, \quad \vec{H} = H_y\hat{y}$. Si al aplicar el teorema de equivalencia se obtiene $\vec{J} = H_y\hat{x}, \quad \vec{M} = E_x\hat{y}$, los campos radiados por las corrientes equivalentes son:

a) Nulos en $z>0$, no nulos en $z<0$.
b) Nulos en $z<0$, no nulos en $z>0$.
c) Nulos en el eje z^-, no nulos en el resto del espacio.
d) Nulos en el eje z^+, no nulos en el resto del espacio.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

3.1 Calcular la densidad de corriente de desplazamiento para los siguientes campos electromagnéticos:
a) Una onda de radiodifusión de 1 MHz que se propaga con un campo eléctrico de 1 μV/m.
b) Una línea de transporte de alta tensión de 50 Hz que soporta un campo eléctrico de 100 kV/m.
c) El haz de un láser de 600 nm, en el espectro visible, que posee un campo eléctrico de $3 \cdot 10^4$ V/m.

3.2 Dibujar la tangente de pérdidas, en función de la frecuencia, en un nivel de la ionosfera donde la concentración de electrones libres es de 10^{11} electrones/m^3 y la frecuencia de colisión es de 10^6 colisiones /segundo (supóngase el campo magnético estacionario nulo).

3.3 Una antena situada en el origen de coordenadas tiene un vector de radiación $\vec{N} = \hat{x} + j\hat{y} + \hat{z}$. Obtener la expresión de los campos lejanos y representar los siguientes cortes de cada una de las componentes del vector campo eléctrico: a) $\phi = 0$; b) $\phi = \pi/2$; c) $\phi = \pi$; d) $\phi = \pi/4$; e) $\theta = \pi/2$; f) $\theta = 3\pi/4$.

3.4 Demostrar que para una corriente arbitraria orientada según el eje *z* la expresión $\mu\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ se reduce a $\mu H_\phi = \text{sen}\ \theta\ \partial A_z/\partial r$ cuando se considera el campo lejano. Comprobar que un elemento de corriente en el caso anterior da correctamente el campo magnético total.

3.5 Una antena está orientada según el eje *z* y tiene un vector de radiación $\vec{N}_1$ cuando su centro coincide con el origen de coordenadas. La antena se traslada manteniendo la misma orientación, pasando su centro a ser el punto $r_c = (x_c, y_c, z_c)$. Hallar el nuevo vector de radiación $\vec{N}_2$.

3.6 Una antena lineal de longitud D=10λ, orientada según el eje *z* y con su centro en el origen de coordenadas, tiene una distribución de corriente con amplitud uniforme y una variación cuadrática de la fase: $I(z) = I_0 \exp(j2\pi(z/D)^2)$. ¿A qué distancia de la antena se tendrá el mismo diagrama de radiación que el que se obtendría a grandes distancias para la misma antena manteniendo la distribución de amplitud pero no existiendo variación de la fase? (En óptica, cuando una onda atraviesa una lente se introduce por ésta un término de fase cuadrático que provoca un enfoque a una distancia finita. Similarmente, se dice en este caso que la antena está enfocada en la región de Fresnel, a diferencia de cuando no existe la variación cuadrática de fase, que está enfocada en el infinito.)

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4
Análisis de antenas básicas

En el capítulo anterior se han encontrado las expresiones que nos permiten hallar los campos radiados por una determinada distribución de corriente. En el presente capítulo se estudiarán las distribuciones de corrientes más sencillas, las lineales.

4.1 Antenas elementales

4.1.1 Dipolo elemental

Vamos a analizar los campos y parámetros de radiación de un elemento de corriente de longitud ℓ, mucho menor que λ, recorrido por una corriente uniforme de valor eficaz I. Este elemento de corriente o dipolo elemental tiene importancia por sí mismo, ya que un gran número de antenas en baja frecuencia poseen estas características y además, por superposición de elementos de corriente, pueden ser analizadas distribuciones de mayor longitud y no uniformes, como veremos posteriormente. Consideremos la situación de la figura 4.1 con un hilo de corriente I, o la densidad correspondiente $\vec{J} = I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z}$.

El potencial vector $\vec{A}$ vendrá dado por la siguiente ecuación (3.28)

$$\vec{A} = \int_{V'} \frac{\mu\,\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{-jkR}}{4\pi R}\,dv' \tag{4.1}$$

que, para una distribución lineal como la dada, toma la forma

$$\vec{A} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\mu\,I\,e^{-jkR}}{4\pi R}\,\hat{z}\,dz' \tag{4.2}$$

Para el dipolo elemental I es constante y dado que $\ell \ll \lambda$, tendremos que para los puntos situados a una distancia r, se verifica $\ell \ll r$, $R \approx r - z'\cos\theta$ y

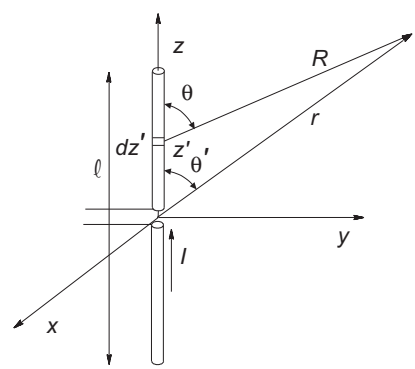


Fig. 4.1 Dipolo elemental

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$A_z = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\mu I e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{jkz'\cos\theta} dz' = \frac{\mu I \ell}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\operatorname{sen}(k\cos\theta\,\ell/2)}{k\cos\theta\,\ell/2} \quad (4.3)$$

Finalmente obtendremos para $r >> \ell$ y $\lambda >> \ell$

$$\vec{A} = \frac{\mu I \ell}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z}, \qquad \vec{N} = I\ell\hat{z} \quad (4.4)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener mediante (3.63)

$$A_\theta = -A_z \operatorname{sen}\theta = -\mu \frac{I\ell}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \operatorname{sen}\theta \quad (4.5)$$

$$A_\phi = 0$$

y los campos de radiación, que de (3.55) resultan ser

$$\vec{E}_{rad} = E_\theta \hat{\theta} = -j\omega A_\theta \hat{\theta} = j\omega\mu \frac{I\ell}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{H}_{rad} = H_\phi \hat{\phi} = \frac{E_\theta}{\eta} \hat{\phi} = jk \frac{I\ell}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi} \quad (4.6)$$

128

donde se ha tenido en cuenta que $\omega\mu = k\eta$ y que $\omega\varepsilon = k/\eta$.

La densidad de potencia radiada viene dada por (1.4)

$$\vec{\wp} = \operatorname{Re}\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right] = \hat{r} \frac{(I\ell)^2}{16\pi^2} \frac{k\omega\mu}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta \quad (4.7)$$

que da como resultado un diagrama de radiación de potencia (1.14) independiente de ϕ y proporcional a $\operatorname{sen}^2\theta$. En la figura 4.2 está representado el diagrama de radiación para todo el espacio (representación tridimensional) y para un plano que contiene el eje del dipolo, que dada la simetría de revolución del diagrama contiene toda la información de radiación. El diagrama de radiación de campo es similar en apariencia al de potencia, pero la función representada sería en este caso $\operatorname{sen}\theta$.

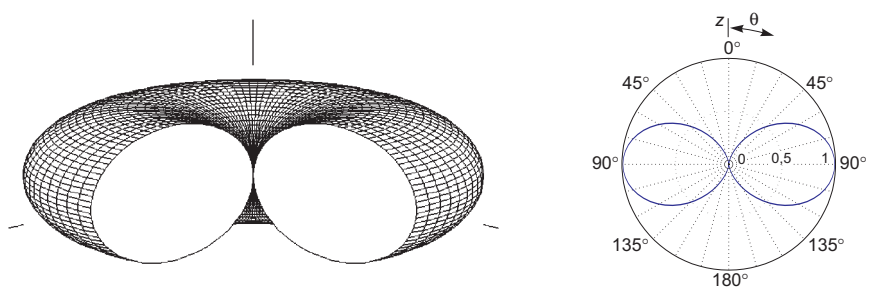


Fig. 4.2 Diagrama de radiación de un dipolo elemental, tridimensional (izquierda) y corte en plano E (derecha)

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La potencia total radiada se obtiene integrando la densidad de potencia creada por la antena sobre una superficie cerrada que la envuelva. Por comodidad se toma una esfera de radio r y resulta ser

$$P_r = \iint_S \vec{\wp}\cdot d\vec{s} = \frac{(I\ell)^2}{16\pi^2}\,\frac{k\,\omega\,\mu}{r^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \\ = \frac{(I\ell)}{16\pi^2}\,k^2\,\eta\,2\,\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = I^2\,\pi\frac{\eta}{2}\,\frac{\ell^2}{\lambda^2}\,\frac{4}{3} \tag{4.8}$$

Conociendo P_r y la intensidad de corriente a la entrada de la antena, la resistencia de radiación resulta ser

$$R_r = \frac{P_r}{I^2} = \frac{2\pi}{3}\,\eta\,\frac{\ell^2}{\lambda^2} = 80\,\pi^2\,\frac{\ell^2}{\lambda^2} \approx 790\,\frac{\ell^2}{\lambda^2} \tag{4.9}$$

La directividad máxima (1.11) vale

$$D = \frac{\wp_{máx}}{\wp_{med}} = \frac{4\pi}{\iint_{4\pi}\frac{\wp}{\wp_{máx}}\,d\Omega} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta\, d\phi} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \tag{4.10}$$

y en cualquier dirección (θ,ϕ) viene dada por (1.17)

$$D(\theta,\phi) = 1{,}5\operatorname{sen}^2\theta \tag{4.11}$$

La expresión (4.4) del potencial vector $\vec{A}$ puede ser aplicada también para calcular los campos en una región más próxima a la antena, ya que es válida para distancias comparables o menores que λ, siempre que se siga cumpliendo $\ell << r$. El potencial $\vec{A}$, además de las componentes dadas A_θ, A_ϕ (4.5), posee una componente radial

$$A_r = A_z\cos\theta = \mu\,\frac{I\ell}{4\pi}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\cos\theta \tag{4.12}$$

que no da origen a campos de radiación (3.55) pero ha de considerarse en el cálculo de los campos próximos.

El campo magnético $\vec{H}$ puede obtenerse de (3.17)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\mu}\,\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\operatorname{sen}\theta\,A_\phi \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

con el resultado de sólo una componente

$$H_\phi = \frac{I\ell}{4\pi}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)e^{-jkr}\operatorname{sen}\theta \tag{4.14}$$

y de $\nabla\times\vec{H} = j\,\omega\varepsilon\,\vec{E}$ obtenemos

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$E_r = \frac{I\ell}{4\pi}\left(\frac{2\eta}{r^2}+\frac{2}{j\omega\varepsilon r^3}\right)e^{-jkr}\cos\theta$$
$$E_\theta = \frac{I\ell}{4\pi}\left(\frac{jk\eta}{r}+\frac{\eta}{r^2}+\frac{1}{j\omega\varepsilon r^3}\right)e^{-jkr}\operatorname{sen}\theta \qquad (4.15)$$

En ambos campos se identifican los términos en e^{-jkr}/r de radiación ya obtenidos. Los campos dominantes en la región inmediata a la antena, campos de inducción o próximos son

$$H_\phi^i = \frac{I\ell}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}e^{-jkr} \qquad (4.16)$$

que es la ley de Biot Savart, con un término de retardo e^{-jkr} aplicada a un elemento de corriente I de longitud ℓ; para $\vec{E}$ obtenemos

$$E_r^i = \frac{I\ell}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{j\omega\varepsilon r^3}e^{-jkr} = Q\ell\frac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3}e^{-jkr}$$
$$E_\theta^i = \frac{I\ell}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{j\omega\varepsilon r^3}e^{-jkr} = Q\ell\frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon r^3}e^{-jkr} \qquad (4.17)$$

con $Q = I/j\omega$, que son los campos eléctricos producidos por un dipolo eléctrico de carga Q y momento dipolar $Q\ell$, con un factor de retardo e^{-jkr}; es decir, son los campos electrostáticos de un dipolo y a veces se les denomina cuasiestáticos.

Los términos del campo eléctrico proporcionales a $1/r^2$ dominan en una región intermedia entre los de inducción y los de radiación. La aparición de un campo eléctrico inducido de tipo dipolar es consecuencia de la hipótesis de corriente uniforme de la que hemos partido. La ecuación de continuidad requiere, para mantener una corriente no nula en los extremos, que se produzca en ellos una acumulación de cargas, que por simetría serán del mismo valor pero de signo opuesto. Dado que la corriente es de forma $Ie^{j\omega t}$, estas cargas variarán también como $Qe^{j\omega t}$ y siguirán a la corriente con un desfase de 90º; ocurre lo mismo con el voltaje entre ellas, lo que produce un comportamiento de tipo capacitivo en esta antena.

La ecuación de continuidad $\nabla'\cdot\vec{J}+\partial\rho/\partial t = 0$, o bien su forma integral

$$\int_{S'}\vec{J}\cdot d\vec{s}' = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{V'}\rho\, dv'$$

nos permite obtener la relación entre carga y corriente. Aplicada a la carga negativa tenemos una corriente saliente

$$I = -j\omega(-Q) = j\omega Q \qquad (4.18)$$

que da origen a un momento dipolar

$$p = Q\ell = \frac{I\ell}{j\omega} \qquad (4.19)$$

En la figura 4.3 están representadas las líneas de campo eléctrico originadas por el dipolo y las de campo magnético debidas al hilo de corriente. Estas líneas de campo sólo existen en la vecindad de la antena y si nos alejamos pasaremos de estas líneas de campo de tipo estático a las originadas por los campos de radiación; en este caso, y dado que son campos variables, las líneas de campo eléctrico

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

podrán cerrarse sobre sí mismas sin necesidad de un soporte de cargas, ya que se mantienen al existir un campo magnético variable; lo mismo sucede con las líneas de campo magnético.

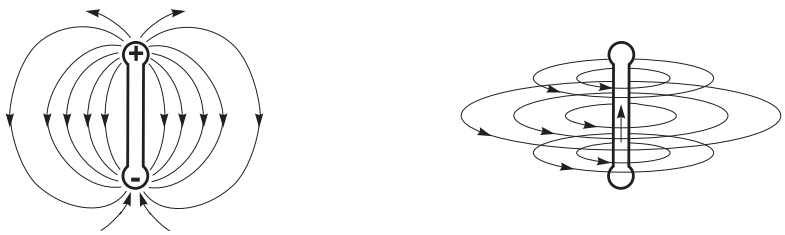


Fig. 4.3 Líneas de campo eléctrico (izquierda) y magnético (derecha)

El cierre de las líneas de campo se justifica a partir de las ecuaciones de Maxwell. La existencia de un campo eléctrico variable produce, por la ley de Ampère, una corriente de desplazamiento que origina un campo magnético variable, y este campo a su vez por la ley de Faraday produce un campo eléctrico, con lo que se cierra el ciclo.

Debido al carácter oscilante de las fuentes ($e^{j\omega t}$), cada medio periodo se invierte el sentido de la corriente y los signos de las cargas, lo que produce una inversión de las líneas de campo; debido al término de retardo de la propagación $e^{j(\omega t - kz)}$, en el diagrama de la figura 4.4, que es una representación en un instante de tiempo fijo de las líneas de campo de un dipolo, se produce una inversión del sentido de las líneas cada $\lambda/2$.

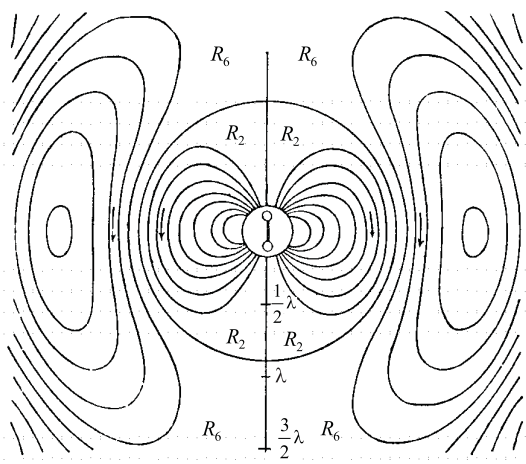


Fig. 4.4 Campos de radiación de un dipolo elemental [Hertz 1889]

Como consecuencia de lo anterior observamos en un dipolo elemental eléctrico un carácter marcadamente capacitivo, unido a una pequeña resistencia de radiación. Por ejemplo, a una frecuencia de 300 kHz (λ=1 km) un hilo de ℓ=100 m es prácticamente un dipolo elemental si colocamos en sus extremos superficies conductoras donde pueda almacenarse carga, lo que produce una corriente prácticamente constante en el hilo. En este caso se tiene que $\ell/\lambda = 0{,}1$ y $R_r = 7{,}9\ \Omega$. Para esta misma frecuencia puede observarse que una antena del orden de 1 m, que es lo habitual en antenas receptoras de radiodifusión de OM, presenta una resistencia diezmil veces menor; puede comprobarse fácilmente que es un valor muy pequeño, incluso en comparación con las pérdidas óhmicas, por lo que la eficiencia de pérdidas de estas antenas es baja. La impedancia de entrada posee una componente reactiva de tipo capacitivo. De hecho esta antena es un condensador abierto, de tal forma que crea campos que se extienden a todo el espacio y que, en recepción, penetran en él produciendo corriente. La figura 4.5 muestra la idea de la antena como condensador abierto.

También podemos interpretar, en términos de la resistencia de radiación de un dipolo, cuándo se pueden producir pérdidas de radiación importantes debido a las dimensiones eléctricas de un circuito. Por ejemplo, si un hilo en un circuito tiene una longitud de 1 m presentará a 1 MHz una

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

resistencia de radiación del orden de 0,008 Ω, que es totalmente despreciable frente a sus pérdidas óhmicas o a las tolerancias del circuito. Pero ese mismo hilo en un circuito a 30 MHz presentará una resistencia de radiación de 7,9 Ω, lo cual implica que se comportará como un elemento radiante, por lo que habrá pérdidas de señal, o bien que se comportará como una antena y captará interferencias del exterior. Ello implica que la longitud de los hilos en los circuitos es muy importante, tanto más cuanto más grandes sean las dimensiones del circuito en relación a la longitud de onda, y que sus longitudes deben ser lo más cortas posibles o deben blindarse.

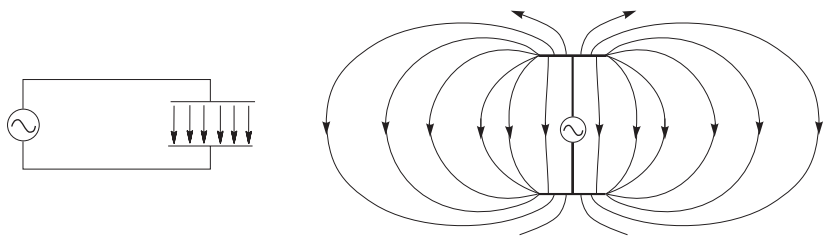


Fig. 4.5 Antena elemental vista como un condensador abierto

Curiosidad: A partir de las expresiones de radiación de un dipolo elemental, podemos seguir la justificación de Lord Rayleigh del motivo de la coloración azul del cielo. Para ello se basó en los efectos producidos en las móleculas gaseosas que constituyen la atmósfera (principalmente N_2, O_2 y H_2O), cuando sobre ellas incide la radiación solar. Al incidir una onda de frecuencia ω sobre una molécula polar se produce una orientación y seguimiento del campo por el dipolo molecular, lo que produce una situación similar al dipolo considerado. Parte de la energía del campo incidente es transferida al dipolo y rerradiada por éste con muy poca direccionalidad, la de un dipolo elemental. La potencia rerradiada será proporcional a la intensidad incidente y dependerá del valor del momento dipolar p y de la longitud de onda λ; se puede ver si sustituimos en (4.8)

$$\left(I\ell\right)^2 = \left(Q\omega\ell\right)^2 = p^2\,\omega^2 \tag{4.20}$$

que se obtiene

$$P_r = \frac{\eta}{6\pi}\,p^2\,\omega^2\,k^2 = \frac{\eta}{6\pi}\,p^2\,c^2k^4 \tag{4.21}$$

de la que se desprende que la potencia rerradiada es proporcional a ω^4 o equivalentemente a $1/\lambda^4$, lo que se conoce como la ley de dispersión de Rayleigh.
La luz visible consta de radiación entre el rojo y el azul (4.000-8.000 Å) con $\lambda_{rojo} \approx 2\lambda_{azul}$, por lo que la potencia radiada en el azul resulta ser 2^4 veces la radiada en el rojo.
Los dipolos moleculares son radiadores mucho más eficientes del azul que del rojo, por lo que al atravesar un rayo de luz la atmósfera se produce una dispersión y rerradiación de energía mucho más eficientemente en el azul. Es por eso que al mirar de la tierra al cielo, o del espacio hacia la tierra, se ve una coloración azul, tanto más intensa cuanto lo sea la radiación incidente (estación del año) y menor sea el contenido de agua y contaminantes atmosféricos.
En la puesta de sol los rayos llegan prácticamente rasantes y han atravesado una gran porción de atmósfera (comparado con el mediodía cuando el sol está alto sobre el

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

horizonte), por lo que han difundido prácticamente toda la coloración espectral del azul y queda únicamente la componente espectral roja (la atmósfera ha actuado como un filtro); de ahí que los rayos presenten una fuerte coloración roja.
La coloración de las nubes es debida a que al condensar el vapor de agua en finas gotas, las moléculas que las forman rerradian coherentemente, por lo que la potencia difundida es proporcional al cuadrado de su número, mientras que cuando estas moléculas se encuentran dispersas radian incoherentemente, como si fueran osciladores independientes, y la potencia rerradiada es proporcional a su número. Por ello el vapor de agua sólo se hace visible al condensarse para formar las nubes.

Ejemplo 4.1 Dos dipolos elementales de igual longitud ℓ se sitúan ortogonalmente y se alimentan con corrientes de igual amplitud, pero en cuadratura de fase $\vec{I} = (\hat{x} + j\hat{y})$.
El vector de radiación valdrá

$$\vec{N} = I\ell(\hat{x} + j\hat{y})$$

que en coordenadas esféricas toma, aplicando (3.63), la forma

$$\vec{N} = I\,\ell[\operatorname{sen}\theta\,(\cos\phi + j\,\operatorname{sen}\phi)\hat{r} + (\cos\phi + j\,\operatorname{sen}\phi)(\cos\theta\,\hat{\theta} + j\,\hat{\phi})]$$

del que se obtiene el campo radiado (3.58)

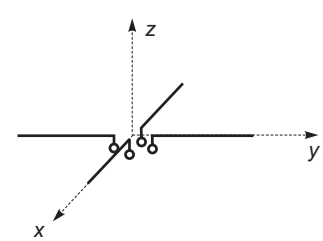
$$\vec{E}_{rad} = -j\,k\,\eta\,I\,\ell\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}e^{j\phi}(\cos\theta\,\hat{\theta} + j\,\hat{\phi})$$

En el semiespacio $z>0$ se tiene un campo polarizado elípticamente a izquierdas, salvo en la dirección del eje z ($\theta = 0$) que se convierte en circular. En el semiespacio $z < 0$ ocurre lo mismo, salvo que el sentido de la polarización es a derechas. En el plano $z = 0$ ($\theta = \pi/2$) la polarización es lineal según $\hat{\phi}$. Los valores del campo en estos casos son

$$|E(\theta)| = \frac{60\pi I\ell}{\lambda r}\left(1+\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

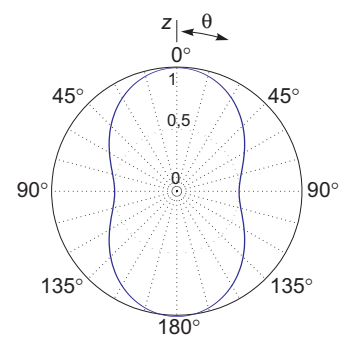
$$E(\theta=0) = \frac{60\pi I\,\ell}{\lambda\,r}\sqrt{2}$$

$$E\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{60\pi I\,\ell}{\lambda\,r}$$



El diagrama de radiación de potencia (1.14) vale

$$t(\theta,\phi) = \frac{1+\cos^2\theta}{2}$$



del que se deriva, según (1.15), una directividad D=1,5, idéntica a la de un dipolo solo, si bien la forma del diagrama y la polarización de los campos son totalmente diferentes.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.1.2 Espira circular elemental

Otro radiador básico es una espira de corriente. Consideraremos primero una espira circular de radio a (a << λ) recorrida por una corriente uniforme *I* y situada en el plano *xy* como se indica en la figura 4.6.

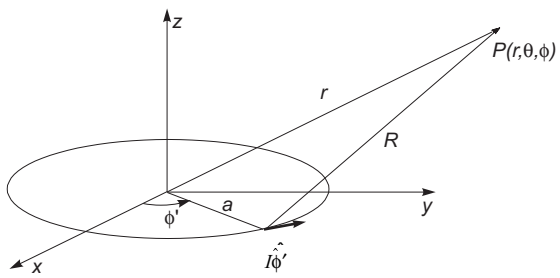


Fig. 4.6 Espira circular elemental

La corriente tiene orientación $\hat{\phi}'$ y el vector de radiación $\vec{N}$ (3.57) vale

$$\vec{N} = \int_0^{2\pi} I\,\hat{\phi}'\, e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\, a\, d\phi' \tag{4.22}$$

Teniendo en cuenta que sobre la espira $r' = a$ y $\theta' = \pi/2$ se obtiene de (3.65)

$$\hat{r}\cdot\vec{r}' = a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(\phi - \phi') \tag{4.23}$$

El vector unitario $\hat{\phi}'$ es función del ángulo ϕ' por lo que para obtener las componentes N_θ y N_ϕ es conveniente representarlo directamente respecto al triedro esférico en el punto de campo (r,θ,ϕ)

$$\hat{\phi}' = (\hat{\phi}'\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{\phi}'\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{\phi}'\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} \tag{4.24}$$

que una vez sustituido (3.63) toma la forma

$$\hat{\phi}' = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(\phi - \phi')\hat{r} + \cos\theta\,\mathrm{sen}(\phi - \phi')\hat{\theta} + \cos(\phi - \phi')\hat{\phi} \tag{4.25}$$

Se obtiene de (4.22)

$$\begin{aligned} N_r &= a\,I\,\mathrm{sen}\,\theta\int_0^{2\pi} e^{jka\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(\phi-\phi')}\,\mathrm{sen}(\phi-\phi')\,d\phi' \\ N_\theta &= a\,I\cos\theta\int_0^{2\pi} e^{jka\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(\phi-\phi')}\,\mathrm{sen}(\phi-\phi')\,d\phi' \\ N_\phi &= a\,I\int_0^{2\pi} e^{jka\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(\phi-\phi')}\cos(\phi-\phi')\,d\phi' \end{aligned} \tag{4.26}$$

con el resultado $N_\theta = 0$, ya que el integrando es una función impar, y análogamente $N_r = 0$, aunque éste último, independientemente de su valor, no da origen a campos de radiación. Las integrales anteriores son una representación de las funciones de Bessel utilizada habitualmente

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{j^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jx\cos\alpha}\cos n\alpha\, d\alpha \\ 0 &= \frac{j^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jx\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,n\alpha\, d\alpha \end{aligned} \tag{4.27}$$

de las que se obtiene lo indicado en (3.68) sin demostración ($N_r = N_\theta = 0$) y

$$N_\phi = j\,2\pi\,a\,I\,J_1(k\,a\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{4.28}$$

que es válida para cualquier espira circular con una corriente uniforme. Para el caso particular a << λ tenemos $|k\,a\,\mathrm{sen}\,\theta| << 1$ y podemos usar el valor asintótico de $J_1(x) \approx x/2$ para $x << 1$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$N_\phi = j k\pi a^2 I \operatorname{sen}\theta \qquad a << \lambda \tag{4.29}$$

La intensidad de radiación (3.61) resulta

$$K = \frac{\eta}{4\lambda^2}\left|N_\phi\right|^2 = \frac{\eta}{4\lambda^2} k^2 \pi^2 a^4 I^2 \operatorname{sen}^2\theta, \qquad t(\theta,\phi) = \operatorname{sen}^2\theta \tag{4.30}$$

cuya representación o diagrama de radiación es idéntica a la del dipolo elemental eléctrico, teniendo en este caso los campos polarización horizontal

$$\begin{aligned} E_\theta &= 0 \\ E_\phi &= -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} N_\phi = k^2 \eta \pi a^2 I \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{4.31}$$

La potencia total radiada se obtiene de forma análoga a como se hizo con el dipolo, resultando ser

$$P_r = \iint_{4\pi} K \, d\Omega = \frac{\pi\eta}{6}(k a)^4 I^2 \tag{4.32}$$

y la resistencia de radiación

$$R_r = \frac{P_r}{I^2} = 20\pi^2 (k a)^4 \tag{4.33}$$

Al ser la forma del diagrama igual a la del dipolo elemental su directividad será la misma, D=1,5.

La resistencia de radiación de la espira es del orden de $(ka)^4$ mientras que la del dipolo es de $(k\ell)^2$ por lo que, a igualdad de dimensiones, es mucho menor la resistencia de radiación de la espira que la del dipolo. Como las pérdidas óhmicas serán del mismo orden de magnitud, la eficiencia de la espira será mucho menor. Valores de $\eta_l \approx 10^{-5}$ son habituales.

Esta gran diferencia en la resistencia de radiación es debida a que la espira es un contorno cerrado y para cada elemento de corriente existe otro en sentido opuesto, lo que produce un efecto cancelante. En la espira no existe acumulación de carga en ningún punto mientras que en el dipolo se acumula en los extremos.

Ejemplo 4.2 Con tubo de cobre de diámetro $2b$ = 2 cm se construye una espira circular de radio a = 25 cm. A una frecuencia de 1 MHz resultarán los siguientes valores de resistencia e inductancia.

La resistencia de radiación se obtiene de (4.33), y vale

$$R_r = 1{,}5 \cdot 10^{-7}\ \Omega$$

La resistencia de pérdidas óhmicas se obtendrá de

$$R_\Omega \approx \frac{1}{\sigma}\frac{2\pi a}{2\pi b\delta} = \frac{a}{b\sigma\delta}$$

Para el cobre $\sigma = 5{,}8\cdot 10^7$ S/m y la profundidad de penetración δ vale a 1 MHz

$$\delta = (\pi f \mu \sigma)^{-\frac{1}{2}} = 0{,}066 \text{ mm}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de lo que resulta una resistencia de pérdidas $R_\Omega = 6{,}5\cdot10^{-3}\ \Omega$ y una eficiencia $\eta_l = 2{,}3\cdot10^{-5}$. La inductancia de la espira vale

$$L \approx \mu a\left[\ln\left(\frac{8a}{b}\right)-2\right] = 1\,\mu\text{H}$$

y la reactancia de entrada $X_e = L\omega = 6{,}5\ \Omega$.

4.1.3 Solenoide cargado con ferrita

Una antena muy usada en receptores de radiodifusión es un solenoide (apilamiento de varias espiras) cargado con un núcleo de ferrita, que actúa como material de alta permeabilidad. Analizaremos primero una espira cargada con ferrita.

Al introducir un material magnético en el interior de una espira se produce un aumento de la intensidad de campo magnético y de flujo a través de ésta y por la ley de Faraday tenemos un correspondiente aumento de la fuerza electromotriz inducida en la espira, que es realmente la tensión que medimos en bornes de la carga que pongamos en la espira

$$V = \int_{C'}\vec{E}\cdot d\vec{l}\,' = -\frac{d}{dt}\iint_{S'}\vec{B}\cdot d\vec{s} = -j\omega\mu_0\mu_e H A \tag{4.34}$$

donde A es el área de la espira, H la amplitud del campo magnético de la onda incidente y μ_e la permeabilidad efectiva de la ferrita. Ésta última es un valor que depende de la permeabilidad intrínseca del material aislado, μ_f, y de su geometría

$$\mu_e = \frac{\mu_f}{1+D\left(\mu_f-1\right)} \tag{4.35}$$

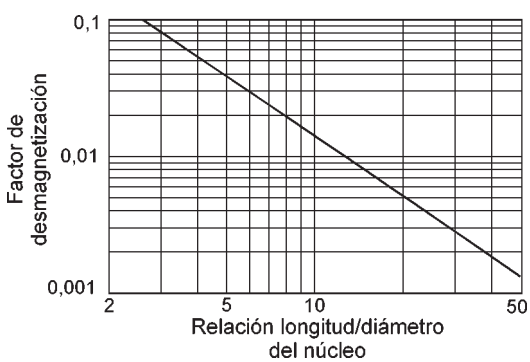


Fig. 4.7 Gráfica de D en función del aspecto del núcleo

donde D es el factor de desmagnetización que depende de la forma del núcleo. La figura 4.7 muestra el valor de D para un núcleo de ferrita cilíndrico en función de la relación entre la longitud y el diámetro del núcleo. Para un núcleo que fuese una aguja fina se tendría D≈ 0, para un disco de poco espesor D ≈ 1. Para los solenoides son habituales valores de D del orden de las centésimas.

La relación entre la fuerza electromotriz inducida en la espira cargada con el núcleo y en la espira sin cargar es

$$\frac{V_{ferrita}}{V_{aire}} = \mu_e \tag{4.36}$$

Es posible obtener valores de μ_e del orden de 10^2-10^3 con materiales comerciales. Si colocamos N espiras sobre el mismo núcleo la relación anterior se verá multiplicada por N.

La directividad de la bobina de N vueltas será la misma que la de la espira sola, pues el hecho de poner N espiras, siendo la antena elemental, equivale a tener una sola espira por la que pasa una corriente N veces mayor, y por lo tanto el diagrama de radiación es el mismo. Por la misma razón el

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

área efectiva es la misma. Al aumentar la tensión inducida, siendo la intensidad del campo eléctrico incidente la misma, la longitud efectiva aumentará en el mismo factor y la resistencia de radiación según el cuadrado

$$\frac{R_{r\ ferrita\ N\ vueltas}}{R_{r\ espira}} = N^2\,\mu_e{}^2 \tag{4.37}$$

Sin embargo, esta mejora en la resistencia de radiación se pierde en parte debido al aumento de las pérdidas en la antena por el aumento de la resistencia óhmica del hilo y las pérdidas en el núcleo de ferrita. Valores típicos a 1 MHz son $\eta_l \approx 10^{-5}$-10^{-6}.

4.1.4 Expresiones generales de $\vec{N}$ para dipolos y espiras

Vamos a analizar un pequeño elemento de corriente $\vec{J}(\vec{r}')$ definido en una región de dimensiones pequeñas comparadas con la longitud de onda. Es decir, si suponemos el sistema de coordenadas con origen en la distribución de corriente, tendremos que $r' << \lambda$. El potencial vector $\vec{A}$ se ha visto (3.56) que se obtiene a partir del vector de radiación, dado por

$$\vec{N} = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}')e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,dv' \tag{4.38}$$

Para el caso de antenas elementales se tiene que $k\,\hat{r}\cdot\vec{r}' << 1\,(r' << \lambda)$ por lo que podemos desarrollar la exponencial del integrando anterior en serie de Taylor y quedarnos sólo con los términos más significativos. Los dos primeros términos de dicho desarrollo son

$$e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} = 1 + j\,k\,\hat{r}\cdot\vec{r}' + \ldots \tag{4.39}$$

Dipolo elemental

Si se toma solamente el primer término del desarrollo se obtiene

$$\vec{N} = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}')\,dv' = -\int_{V'} \vec{r}'\left(\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')\right)dv' \tag{4.40}$$

La última igualdad puede comprobarse para cualquier componente, por ejemplo $\hat{x}$, de la forma siguiente

$$\nabla'\cdot\left(x'\,\vec{J}(\vec{r}')\right) = \nabla' x'\cdot\vec{J}(\vec{r}') + x'\,\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}') = J_x + x'\,\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}') \tag{4.41}$$

que integrada en volumen sobre la fuente resulta

$$-\int_{V'} x'\left(\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')\right)dv' = \int_{V'} J_x\,dv' - \int_{V'}\nabla'\cdot\left(x'\,\vec{J}(\vec{r}')\right)dv' \tag{4.42}$$

La segunda integral de la derecha resulta nula por ser igual a

$$\int_{S'}\nabla'\cdot\left(x'\,\vec{J}(\vec{r}')\right)dv' = \int_{S'} x'\,\vec{J}(\vec{r}')\cdot\hat{n}\,ds' = 0 \tag{4.43}$$

ya que al contener S' todas las fuentes no hay flujo de corriente a través de ella. Finalmente se obtiene

$$-\int_{V'} x'\left(\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')\right)dv' = \int_{V'} J_x\,dv' \tag{4.44}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y de forma análoga para las otras componentes, con (4.40) como resultado. La ecuación de continuidad (3.2) permite escribir (4.40) en la forma siguiente

$$\vec{N} = \int_{V'} j\omega\rho(\vec{r}')\vec{r}'\,dv' = j\omega\vec{p} \tag{4.45}$$

con $\vec{p}$ el momento dipolar eléctrico definido de forma similar a electrostática

$$\vec{p} = \int_{V'} \rho(\vec{r}')\vec{r}'\,dv' \tag{4.46}$$

que ya hemos encontrado al estudiar el hilo de corriente elemental.

Espira elemental

Si realizamos el mismo análisis para una espira o contorno cerrado plano, recorrido por una corriente uniforme (Fig. 4.8) encontramos, debido a que no existe acumulación de carga en ningún punto del circuito, que

$$\vec{p} = 0, \qquad \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}')\,dv' = 0 \tag{4.47}$$

por lo que debe tomarse el segundo término del desarrollo en serie anterior (4.39). De esta forma queda

$$\vec{N} = \int_{V'} jk(\hat{r}\cdot\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')\,dv' \tag{4.48}$$

que resulta ser, para un hilo de corriente (espira plana)

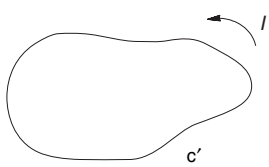


Fig. 4.8 Espira plana general

$$\vec{N} = jk\int_{C'}(\hat{r}\cdot\vec{r}')\,I\,d\vec{l}' \tag{4.49}$$

Si representamos las componentes de $\hat{r}$ y $\vec{r}'$ mediante

$$\hat{r} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \qquad \vec{r}' = (x', y', z') \tag{4.50}$$

la ecuación anterior toma la forma

$$\vec{N} = jk\int_{C'}(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)\,I\,d\vec{l}' \tag{4.51}$$

y mediante la relación

$$\int_{C'} \psi\,d\vec{l}' = \int_S \hat{n}'\times\nabla'\psi\,ds' \tag{4.52}$$

teniendo en cuenta que $\nabla' x' = \hat{x}$, $\nabla' y' = \hat{y}$, $\nabla' z' = \hat{z}$, obtenemos

$$\vec{N} = jkI\iint_{S'} \hat{n}'\times\hat{r}\,ds' = jk\left[\iint_{S'} I\,\hat{n}'\,ds'\right]\times\hat{r} = jk\,\vec{m}\times\hat{r} \tag{4.53}$$

donde $\vec{m}$ es el momento dipolar magnético

$$\vec{m} = \iint_{S'} I\,\hat{n}'\,ds' \tag{4.54}$$

dado por el producto de la corriente por el área de la espira, con orientación normal a ella. Por ejemplo, para una espira circular se tiene que $m = I\pi a^2$. La forma de la espira plana no es relevante, sino únicamente su área, por lo que son válidas las expresiones de la espira circular sustituyendo πa^2 por el área de la espira.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Las expresiones (4.45) y (4.53) son válidas para dipolos y espiras elementales en general, y del desarrollo anterior se puede observar fácilmente la diferencia de comportamiento entre el caso eléctrico y el magnético, siendo estos últimos derivados de un término de orden superior respecto a k (1 para el dipolo eléctrico y $k\,\hat{r}\cdot\vec{r}'$ para el magnético).

Desarrollos para antenas no elementales, aquéllas en las que r' no es mucho menor que λ, podrían realizarse de la misma forma, debiendo tomar en (4.39) términos de orden superior que darían origen a desarrollos en multipolos, de forma similar a como se hace en electrostática y magnetostática.

Ejemplo 4.3 Una espira cuadrada elemental de lado a, recorrida por una corriente uniforme I, se encuentra sobre el plano xy y centrada en el origen de coordenadas. La estructura puede analizarse de dos maneras: directamente como una espira elemental, o descomponiendo la espira en sus cuatro lados que se pueden analizar como dipolos elementales.
Analizándola directamente como espira, el vector de radiación valdrá:

$$\vec{N} = jkIa^2\ \hat{z}\times\hat{r} = jkIa^2\ \mathrm{sen}\theta\ \hat{\phi}$$

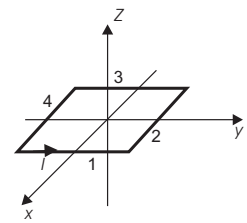
Descomponiendo ahora la espira en sus cuatro lados, el vector de radiación de cada uno de ellos será:

$$\vec{N}_1 = Ia\,e^{jk_x\frac{a}{2}}\ \hat{y}$$

$$\vec{N}_2 = -Ia\,e^{jk_y\frac{a}{2}}\ \hat{x}$$

$$\vec{N}_3 = -Ia\,e^{-jk_x\frac{a}{2}}\ \hat{y}$$

$$\vec{N}_4 = Ia\,e^{-jk_y\frac{a}{2}}\ \hat{x}$$



donde se ha tenido en cuenta el desplazamiento de cada uno de los hilos respecto al origen de coordenadas. Sumando las contribuciones de cada lado:

$$\vec{N} = Ia2j\left(-\mathrm{sen}\left(k_y\frac{a}{2}\right)\hat{x} + \mathrm{sen}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\hat{y}\right)$$

Dado que a <<λ, se puede aproximar la función seno por su argumento, y queda finalmente: que es el mismo resultado que el obtenido anteriormente.

$$\vec{N} = jkIa^2\ \mathrm{sen}\theta\hat{\phi}$$

4.2 Dipolos

Hasta ahora hemos analizado estructuras pequeñas en términos de λ, en las que podemos suponer que la distribución de corriente es uniforme. Si las dimensiones de la antena no son pequeñas en términos de λ, se tendrán interacciones entre sus diferentes elementos así como retardos, con lo que la aproximación de corriente uniforme ya no será cierta.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El modelo de antena más sencillo es el denominado de antena cilíndrica, que consiste en un hilo fino recto conductor, de dimensión 2H y radio a ($a << \lambda$) alimentado con un generador en su centro, como se indica en la figura 4.9. Experimentalmente se ha visto que la distribución de corriente en este tipo de antenas es aproximadamente sinusoidal, con un cero de corriente en los extremos

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z}\, I(z')\,\delta(x')\,\delta(y') \tag{4.55}$$

donde

$$I(z') = I_m \operatorname{sen} k\,(H - |z'|) = \begin{cases} I_m \operatorname{sen} k\,(H - z') & 0 \le z' \le H \\ I_m \operatorname{sen} k\,(H + z') & -H \le z' \le 0 \end{cases} \tag{4.56}$$

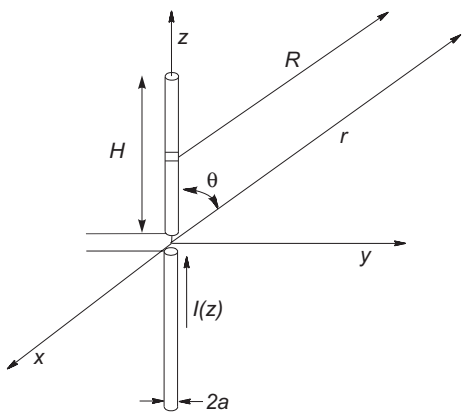


Fig. 4.9 Antena cilíndrica

y $k = 2\pi/\lambda$. I_m es el valor máximo de la distribución de corriente, que no coincide necesariamente con el valor de la corriente en la entrada de la antena o bornes del generador que es

$$I(0) = I_m \operatorname{sen} kH \tag{4.57}$$

Podemos tener una justificación de esta distribución si vemos la antena cilíndrica como una línea de transmisión de hilos paralelos de longitud H, acabada en circuito abierto, que abrimos hasta que los hilos quedan en fila (Fig. 4.10). Al estar la línea acabada en circuito abierto se producirá una onda estacionaria de corriente, con un nulo en el extremo.

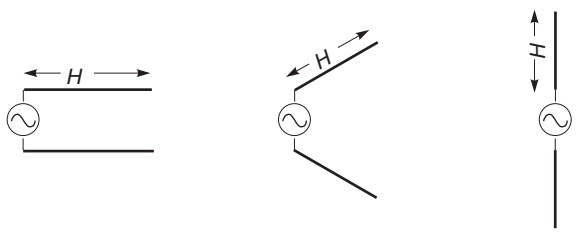


Fig. 4.10 Modelo de antena cilíndrica como línea de transmisión abierta

Una vez conocida la distribución de corriente se halla el vector de radiación (3.57) y a partir de éste los campos radiados

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \int_{-H}^{H} \hat{z}\, I(z') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} dz' = \hat{z} \int_{-H}^{H} I_m \operatorname{sen} k(H - |z'|) e^{jk_z z'} dz' = \\ &= \hat{z}\, 2\, I_m \int_0^H \operatorname{sen} k\,(H - z') \cos k_z z'\, dz' = \hat{z}\, 2\, k\, I_m \frac{\cos(k_z H) - \cos(kH)}{k^2 - k_z^2} \end{aligned} \tag{4.58}$$

cuya expresión en función de θ, teniendo en cuenta que $k_z = k\cos\theta$, es

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{N} = \hat{z}\, 2\, I_m \, \frac{\cos\left(k H \cos\theta\right) - \cos kH}{k \operatorname{sen}^2\theta} \tag{4.59}$$

Del vector de radiación se obtienen los campos radiados (3.58)

$$\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{\eta}{2\pi r} e^{-jkr} I_m \frac{\cos(kH\cos\theta) - \cos kH}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad E_\phi = 0 \\ H_\theta &= 0, \qquad H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta} \end{aligned} \tag{4.60}$$

La densidad de potencia radiada será

$$\wp = \operatorname{Re}\left[E_\theta\, H_\phi^*\right] = \frac{\eta I_m^2}{4\pi^2 r^2}\left(\frac{\cos(kH\cos\theta) - \cos kH}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 \tag{4.61}$$

A partir de la expresión anterior, integrando sobre una superficie esférica cerrada se obtiene la potencia total radiada

$$P_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \wp r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = I_m^2 \frac{\eta}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\cos(kH\cos\theta) - \cos kH)^2}{\operatorname{sen}\theta} d\theta \tag{4.62}$$

Esta integral no tiene una solución analítica, aunque puede escribirse en función de senos y cosenos integrales, por lo que se suele resolver numéricamente para cada valor de H. A partir de la potencia total radiada se pueden obtener la directividad y la resistencia de radiación.

$$D = \frac{\wp_{máx}\, 4\pi r^2}{P_r}, \quad R_r = \frac{P_r}{I(0)^2} \tag{4.63}$$

La figura 4.11 muestra la variación de la directividad de un dipolo en función de su longitud.

La aproximación de corriente sinusoidal en el dipolo es útil porque permite encontrar una expresión exacta para el potencial vector y, por lo tanto, para los campos radiados en cualquier punto del espacio, en especial para puntos muy próximos a la antena. El desarrollo completo se puede encontar en [Jordan '68] y [Weeks '68], con el resultado en coordenadas cilíndricas, referido a la figura 4.12

$$E_z = -j\,30\, I_m \left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2\cos kH \frac{e^{-jkr}}{r}\right)$$

$$\begin{aligned} E_\rho &= j\,30\, I_m \left(\frac{z-H}{\rho}\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{z+H}{\rho}\frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2\frac{z}{\rho}\cos kH \frac{e^{-jkr}}{r}\right) \\ H_\phi &= j\frac{30}{\eta\rho} I_m \left(e^{-jkR_1} + e^{-jkR_2} - 2\cos kH\, e^{-jkr}\right) \end{aligned} \tag{4.64}$$

A continuación particularizaremos las expresiones anteriores para unos casos concretos.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

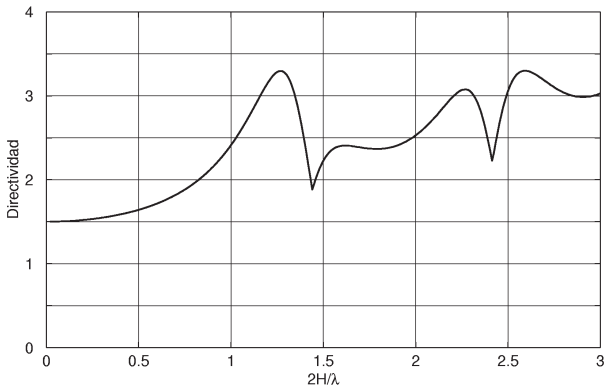


Fig. 4.11 Variación de la directividad en función de *H*

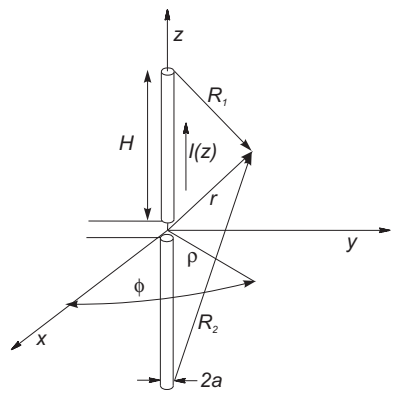


Fig. 4.12 Sistema de coordenadas cilíndricas

Dipolo en λ/2

El caso particular de H = λ/4 es uno de los más habituales recibiendo también el nombre de dipolo de media onda. Para este valor concreto de longitud del dipolo las expresiones anteriores quedan en la siguiente forma

$$\vec{N} = \hat{z}\, I_m\, 2\, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \tag{4.65}$$

$$E_\theta = j\,60\,\frac{e^{-jkr}}{r}\, I_m\, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\mathrm{sen}\,\theta} \tag{4.66}$$

$$\wp = \frac{30\, I_m^2}{\pi\, r^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\mathrm{sen}\,\theta}\right)^2 \tag{4.67}$$

$$R_r = 73\,\Omega \tag{4.68}$$

$$D = 1{,}64 \tag{4.69}$$

El diagrama de radiación es similar al del dipolo elemental, en forma de toroide, con simetría de revolución según el eje *z* y un haz ligeramente más estrecho.

Dipolo corto

Si las dimensiones del dipolo son reducidas en términos de λ y no existen elementos acumuladores de carga en los extremos, la distribución de corriente no será uniforme sino sinusoidal. Designamos en este caso el dipolo como *corto* para diferenciarlo del elemental. Cuando H<0,1λ la distribución se puede aproximar por una triangular.

$$I\,(z') = I_0\left(1 - \frac{|z'|}{H}\right) \tag{4.70}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En las expresiones generales para dipolos eléctricos (4.40) y (4.45) se observa que para antenas pequeñas el vector de radiación no depende de cómo sea la distribución de corriente en la antena sino del valor de su integral sobre el hilo. De esta manera la distribución triangular tendrá un vector de radiación que será la mitad del de una distribución uniforme de igual longitud y corriente a la entrada. Los campos radiados serán la mitad de los producidos por el dipolo elemental, la densidad de potencia la cuarta parte y la resistencia de radiación, consecuentemente, también la cuarta parte. Como la variación angular de los campos radiados es la misma, la directividad será también $D = 1{,}5$.

En la tabla siguiente se puede ver un resumen de los diferentes parámetros para diferentes longitudes de dipolos. En ella se representan las distribuciones de corrientes y los diagramas de radiación en plano E (en plano H todas tienen simetría de revolución por la simetría de la antena) para diversas longitudes del brazo de la antena H. Se dan también los valores numéricos del ancho de haz a -3 dB ($\Delta\theta_{-3dB}$), la directividad (D) y la resistencia de radiación (R_r).

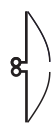
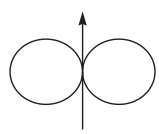
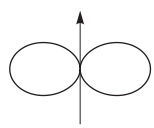
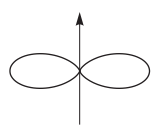
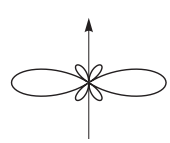
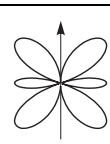
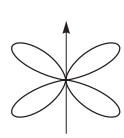
		$H = \lambda/4$ $\Delta\theta_{-3dB} = 78^\circ$	$R_r = 73\ \Omega$ $D = 1{,}64$
		$H = 3\lambda/8$ $\Delta\theta_{-3dB} = 64^\circ$	$R_r = 360\ \Omega$ $D = 1{,}94$
		$H = \lambda/2$ $\Delta\theta_{-3dB} = 48^\circ$	$R_r = \infty\ \Omega$ $D = 2{,}41$
		$H = 5\lambda/8$ $\Delta\theta_{-3dB} = 33^\circ$	$R_r = 210\ \Omega$ $D = 3{,}33$
		$H = 3\lambda/4$ $\Delta\theta_{-3dB} = 33^\circ$ $\theta_{max} = 43^\circ$	$R_r = 99{,}5\ \Omega$ $D = 2{,}17$
		$H = \lambda$ $\Delta\theta_{-3dB} = 27^\circ$ $\theta_{max} = 57^\circ$	$R_r = \infty\ \Omega$ $D = 2{,}52$

Tabla 4.1 Parámetros de dipolos de diferentes longitudes

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En la tabla anterior se ve que, por ejemplo, en el dipolo de onda completa (H=λ/2) la resistencia de radiación es infinita, lo cual es un contrasentido (el dipolo está radiando aunque la corriente de entrada es nula). La explicación está en que el modelo sinusoidal de la distribución de corriente no deja de ser una aproximación. La figura 4.13 muestra las distribuciones reales obtenidas analizando el problema mediante métodos numéricos (método de los momentos). Se puede ver cómo para el dipolo de media onda la aproximación sinusoidal coincide prácticamente con la distribución real. En el dipolo de onda completa la distribución real de corriente sigue en líneas generales la aproximación, excepto en el punto de alimentación, donde la coriente adquiere un valor bajo pero no nulo. Estas pequeñas variaciones respecto al modelo sinusoidal no son significativas a la hora de encontrar los campos radiados ya que dependen de la integral de la distribución de corriente y aquí las diferencias son mínimas, por lo que la forma del diagrama y los valores de directividad son básicamente correctos.

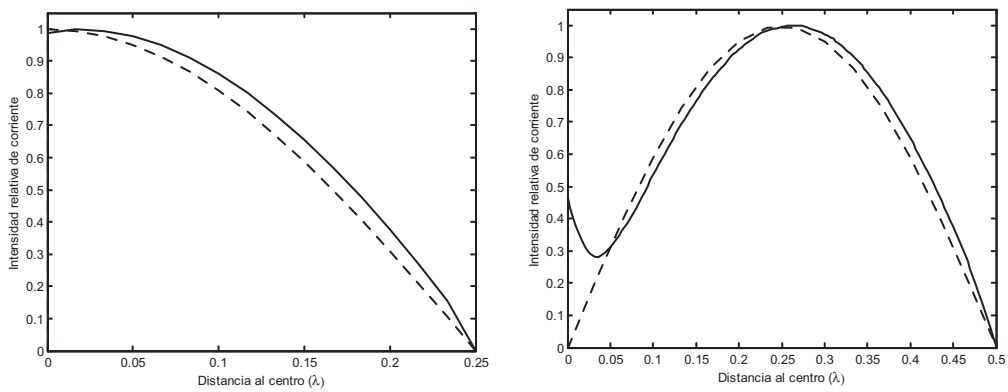


Fig. 4.13 Distribución de corrientes en un dipolo de a) H=λ/4 b) H=λ/2
(- - - - - - - Aproximación sinusoidal ——— Método de los momentos)

La impedancia de entrada del dipolo será en general una magnitud compleja. La parte real de dicha impedancia es la resistencia de radiación calculada anteriormente. En cuanto a la parte imaginaria, asumiendo el modelo de línea de transmisión para las corrientes en el dipolo, será el de una línea de longitud H acabada en circuito abierto:

$$X_e = -j\, Z_0 \operatorname{cotg}(kH) \tag{4.71}$$

donde Z_0 es la impedancia característica de la línea de transmisión formada por los dos brazos del dipolo. El valor de Z_0 no se puede encontrar de manera analítica para el caso del dipolo (brazos cilíndricos), pero basándose en modelos que sí tienen solución (línea de transmisión bicónica) y con algunas aproximaciones se puede hacer una estimación del valor:

$$Z_0 = 120\left(\ln\left(\frac{2H}{a}\right) - 1\right) \tag{4.72}$$

donde a es el radio de la antena. Aunque el resultado es una aproximación, ya que la distribución de corriente como se ha visto no es estrictamente sinusoidal, nos da una idea de cómo varía la reactancia de la antena en función de su longitud y su grosor:

- La reactancia de entrada será más alta cuanto más delgado sea el dipolo.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

- Para una longitud de H=λ/4 (dipolo de media onda) la reactancia de entrada es nula, por lo que la antena es resonante.
- Para longitudes H< λ/4 la reactancia de entrada es negativa, por lo que la antena se puede modelar por un circuito equivalente formado por una resistencia en serie con una capacidad.
- Para longitudes λ/4<H< λ/2 la reactancia de entrada es positiva y el modelo equivalente es una resistencia en serie con un inductor.

4.3 Efecto de la tierra. Monopolos

Hasta ahora hemos considerado la radiación de la antena suponiéndola en un medio totalmente aislada. La presencia de algún obstáculo, especialmente si éste se halla cerca de la antena, puede alterar el diagrama de radiación de la misma. En la práctica, el caso más habitual es la presencia de la misma tierra. La energía radiada por la antena en dirección a ella será reflejada en mayor o menor grado y dependerá de las características físicas de ésta, en especial de la conductividad. El efecto ya se vio al hablar de propagación. Para simplificar el problema supondremos que la tierra es un conductor perfecto plano, y lo analizaremos mediante imágenes.

4.3.1 Teoría de imágenes

Cuando una distribución de carga $\rho(\vec{r})$ o de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ se encuentra en presencia de un conductor se inducen en él cargas y corrientes que contribuyen a la radiación. El efecto del conductor es semejante al que producen distribuciones de imágenes en el volumen ocupado por el conductor. Estas imágenes tienen la misma forma que tenían en los problemas estáticos.

Para ilustrar mejor el método conviene separar inicialmente las distribuciones de carga de las de corriente y representarlas separadamente con sus imágenes, como se indica en la figura 4.14.

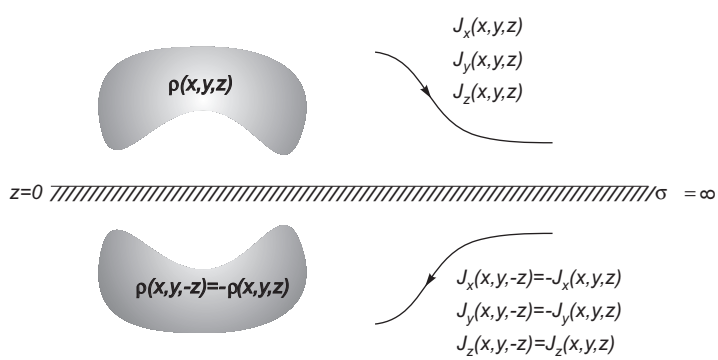


Fig. 4.14 Imágenes de cargas y corrientes

En el plano $z = 0$, que es la superficie del conductor, han de cumplirse las condiciones de contorno (3.14)

$$\hat{z} \times \vec{E}\Big|_{z=0} = 0, \qquad \hat{z} \cdot \vec{B}\Big|_{z=0} = 0 \tag{4.73}$$

que implican

$$E_x\Big|_{z=0} = E_y\Big|_{z=0} = B_z\Big|_{z=0} = 0 \tag{4.74}$$

La comprobación de ello se hace calculando los potenciales $\vec{A}$ y Φ creados por las distribuciones y sus imágenes y particularizándolos para el plano $z = 0$.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Por simetría el potencial escalar se anula en la superficie del conductor, al ser éste equipotencial, de igual manera que lo era en electrostática

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \qquad \nabla\Phi(x, y, 0) = \hat{z}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{4.75}$$

Análogamente, por la inversión de las corrientes paralelas al plano conductor en la imagen, resulta que el potencial vector sobre el plano conductor es ortogonal a él

$$\vec{A}(x, y\ 0) = \hat{z}\,A_z \tag{4.76}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.17) y (3.18) para los campos en función de los potenciales se obtiene

$$\vec{E}\Big|_{z=0} = E_z\,\hat{z}, \qquad \vec{B}\Big|_{z=0} = B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} \tag{4.77}$$

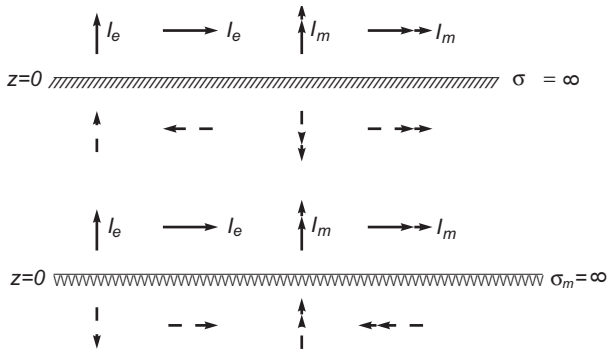


Fig. 4.15 Imágenes de corrientes eléctricas I_e y magnéticas I_m sobre planos conductores eléctricos ($\sigma = \infty$) y magnéticos ($\sigma_m = \infty$)

y se comprueba que se satisfacen automáticamente las condiciones de contorno y que puede sustituirse el plano conductor por las imágenes de las corrientes (la distribución de cargas es dependiente de ellas).

Se puede realizar un análisis semejante para corrientes magnéticas sobre un plano conductor y por dualidad de corrientes eléctricas y magnéticas sobre conductores magnéticos perfectos. En la figura 4.15 se representan esquemáticamente para los casos paralelo y perpendicular. A partir de ellas se pueden obtener las imágenes para cualquier otra situación.

Hay que recordar que las soluciones obtenidas, aunque se extiendan a todo el espacio, solo son válidas en el semiespacio superior, ya que en el problema real en el semiespacio inferior hay un conductor y por lo tanto en su interior los campos son nulos.

Ejemplo 4.4 Un dipolo elemental de longitud ℓ se sitúa perpendicularmente a un plano conductor perfecto con su centro a una altura h del mismo.

La presencia del plano conductor se traduce en la aparición de un dipolo imagen recorrido en fase por la misma corriente. El vector de radiación de un dipolo elemental referido a su centro está dado por (4.4)

$$N_\theta = -I\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad N_\phi = 0$$

Como el centro del dipolo se ha situado ahora en z = h (suponemos el origen de coordenadas sobre el plano conductor z = 0) pasa a valer

$$N_{\theta d} = -e^{jk_z h} I\ell\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y el de su imagen, centrada en z = -h,

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$N_{\theta i} = -e^{-jk_z h} I\ell \operatorname{sen}\theta$$

Para el dipolo frente al plano conductor, con $k_z = k\cos\theta$, resulta

$$N_\theta = N_{\theta d} + N_{\theta i} = -I\ell \operatorname{sen}\theta \, 2\cos(kh\cos\theta)$$

y un campo radiado

$$E_\theta = jk\eta I\ell \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \operatorname{sen}\theta \, 2\cos(kh\cos\theta)$$

El diagrama de radiación normalizado es

$$t(\theta) = \cos^2(k\,h\cos\theta)\operatorname{sen}^2\theta$$

la directividad se obtiene de (1.15)

$$D = \frac{2}{\int_0^{\pi/2} \cos^2(kh\cos\theta)\operatorname{sen}^3\theta \, d\theta} = \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\operatorname{sen}(2kh)}{(2kh)^3}}$$

y la resistencia de radiación vale

$$R_r = 240\,\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{\cos(2\,k\,h)}{(2\,k\,h)^2} + \frac{\operatorname{sen}(2\,k\,h)}{(2\,k\,h)^3}\right]$$

para el caso particular h = λ/4 se obtiene una directividad D = 4,6 y una resistencia de radiación $R_r = 104\,\pi^2\,(\ell/\lambda)^2$.

4.3.2 Monopolos

Como se ha visto se puede sustituir un plano conductor perfecto por unas corrientes equivalentes. Este efecto se aprovecha en las denominadas antenas monopolo. Éstas se usan sobre todo a bajas frecuencias, donde es difícil construir dipolos debido a su gran tamaño. Son antenas de hilo situadas verticalmente sobre la tierra y conectadas en su base a un generador, que tiene el otro terminal conectado a tierra. La configuración se presenta en la figura 4.16.

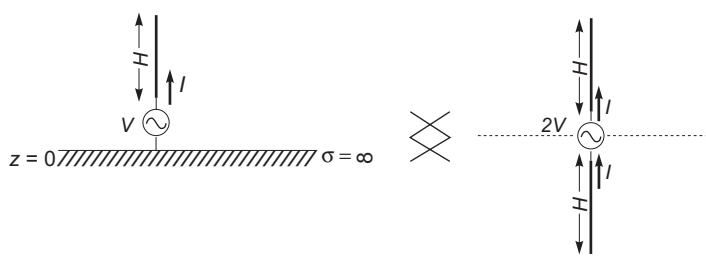


Fig. 4.16 Antena monopolo

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Al analizar el modelo equivalente formado por el monopolo y su imagen el resultado es una antena dipolo. En el semiespacio superior los campos serán los producidos por el monopolo y su imagen, que serán los de un dipolo de brazo igual a la longitud del monopolo. Por lo tanto, la distribución de corriente será la misma que la del dipolo; también lo será el diagrama de radiación. Se tiene entonces que:

- $I(0)_{monopolo} = I(0)_{dipolo}$
- $\wp_{monopolo} = \begin{cases} \wp_{dipolo} & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$
- $P_{r\ monopolo} = 1/2\ P_{r\ dipolo}$, ya que sólo radia en medio espacio
- $R_{r\ monopolo} = P_r / I(0)^2 = 1/2\ R_{r\ dipolo}$
- $V_{monopolo} = 1/2\ V_{dipolo}$
- $D_{monopolo} = 2\ D_{dipolo}$
- $A_{ef\ monopolo} = 1/2\ A_{ef\ dipolo}$
- $\ell_{ef\ monopolo} = 1/2\ \ell_{ef\ dipolo}$

Los campos en el semiespacio superior son los mismos para el monopolo que para el dipolo, pero dado que el primero sólo radia en un semiespacio, su directividad será el doble que la del dipolo equivalente. También resulta que la potencia entregada por el monopolo a una carga adaptada será la mitad de la del dipolo; en consecuencia, el área efectiva es la mitad. Debido a la presencia de la tierra no se cumple la relación entre directividad y área efectiva de una antena en el espacio libre.

4.3.3 Efecto de una tierra imperfecta

Hemos supuesto la tierra como conductor perfecto. Si no lo fuera tendríamos que resolver el problema de contorno para σ finita. El problema fue resuelto para ciertas estructuras, ya que era un problema de gran relevancia en el inicio de las comunicaciones, y nos hemos referido a él indirectamente al hablar de propagación. Para calcular las pérdidas que introduce la conductividad finita del suelo se puede hacer una aproximación para pérdidas bajas. Se calculan los campos radiados para un suelo conductor perfecto, y a partir del campo magnético sobre el conductor, considerando su conductividad real, se calculan las corrientes en el interior de la tierra, que se supone que serán muy similares a las reales. A partir de estas corrientes se pueden calcular las pérdidas en el conductor. El efecto sobre la antena es básicamente, aparte de una disminución de la eficiencia de la antena, una elevación del lóbulo en el diagrama de radiación de la antena. A medida que la conductividad disminuye, el diagrama disminuye en la dirección rasante (Fig. 4.17). El efecto se da en polarización vertical. En polarización horizontal el efecto es menos notable.

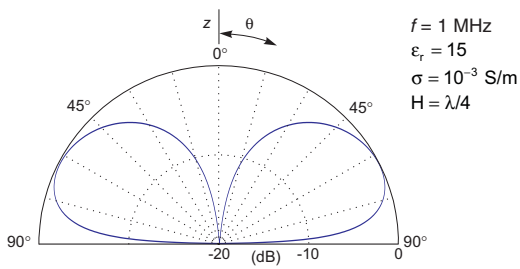


Fig. 4.17 Efecto de la conductividad finita de la tierra en el diagrama de radiación de un monopolo

En los mástiles de radiodifusión de OM, que son antenas de tipo monopolo, para disminuir las pérdidas por la conductividad finita del suelo, se suele aumentar ésta a base de enterrar hilos conductores conectados entre sí en la base de la antena, e incluso humedeciendo el terreno para hacerlo más conductor.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.3.4 Efecto de un plano de tierra finito

Muchas veces se emplean antenas monopolo en las que el plano de masa no es la tierra sino un conductor o una malla de hilos metálicos, como ocurre por ejemplo en las antenas instaladas sobre vehículos. En estos casos el plano conductor se puede suponer de conductividad muy elevada, pero su tamaño no es infinito, aunque nos acercaremos a esta situación cuanto más grande sea el plano en función de λ. El problema se halla resuelto por algunos autores y se puede encontrar en [Wolf '66]. Los efectos más notables son una variación en la resistencia de radiación de la antena, que es pequeña para tamaños de plano de masa medianamente grandes (1-2λ) y sobre todo una variación en el diagrama. El efecto más destacable es que la antena radia por debajo del plano de masa, cosa que no ocurría cuando éste era infinito.

La figura 4.18 muestra el diagrama de radiación en plano E de un monopolo de longitud λ/4 situado sobre un plano conductor perfecto de diámetro 4λ; en su cálculo se ha usado el método de las corrientes equivalentes (8.4.2) para incluir los efectos de difracción en los bordes del plano conductor.

En la práctica, este plano se puede realizar con un conjunto de radiales de longitud λ/4, horizontales o inclinados y el análisis detallado de la antena requiere el cálculo de las corrientes en ellos; los campos radiados se obtienen de la suma de los producidos por todas las corrientes.

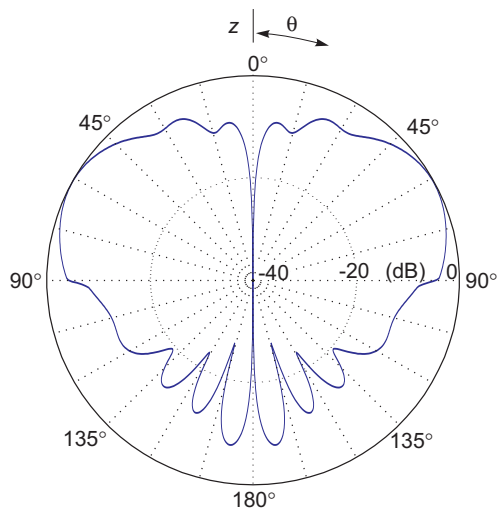


Fig. 4.18 Efecto de un plano de masa finito en el diagrama de radiación de un monopolo en λ/4

4.4 Antenas cargadas

En baja frecuencia es muy habitual no poder realizar antenas grandes, ni tan sólo comparables a λ/4. Uno de los problemas que surge es que la resistencia de radiación de la antena disminuye rápidamente al disminuir la frecuencia, y la reactancia de entrada aumenta rápidamente y presenta un carácter capacitivo, lo cual es un inconveniente para alimentar la antena. Si queremos hacer la antena resonante tendremos que colocar una bobina que cancele el efecto capacitivo de la impedancia de entrada de la antena. Por otro lado, si la longitud de la antena es tal que λ/4<H<λ/2, la impedancia de entrada tendrá carácter inductivo y será necesario colocar un condensador en serie con la antena para hacerla resonante. Este tipo de soluciones, por ser externas a la antena, no modifican su distribución de corriente y, por lo tanto, ninguno de sus parámetros, como resistencia de radiación, directividad, etc.

Otra solución usada en antenas muy cortas, como por ejemplo los monopolos utilizados en radiodifusión a bajas frecuencias, es cargarlas capacitivamente. Esto se realiza mediante un disco o sombrilla de conductores que se pone en el extremo de la antena y donde se puede acumular carga. Ello hace que la distribución de corriente en la antena no se anule en el extremo y aparezca, vista desde la entrada, como la distribución de una antena más larga. Si la antena es pequeña, el diagrama apenas se verá modificado. Los efectos más notables se encuentran en la resistencia de radiación, la longitud efectiva y sobre todo en la parte imaginaria de la impedancia de entrada.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

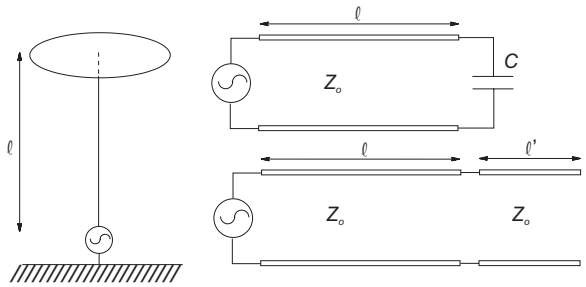
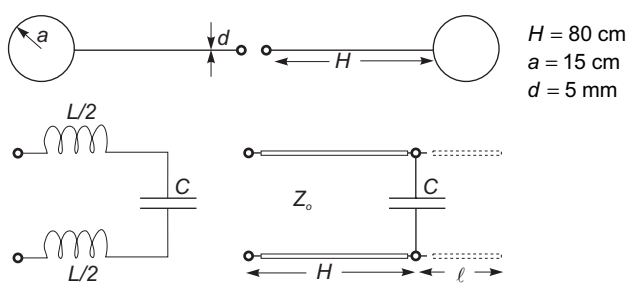


Fig. 4.19 Efecto de una carga capacitiva

Para estudiar el efecto de una carga capacitiva veremos la antena según el modelo de línea de transmisión que ya se comentó en la sección 4.2. El efecto es equivalente a poner un condensador en el extremo de la línea de transmisión. Una línea en circuito abierto presenta, si su longitud es menor que λ/4, una reactancia de entrada negativa, como la de un condensador. Para analizar la influencia del condensador podemos sustituir éste por un trozo de línea de transmisión, de la misma impedancia característica que presenta la línea equivalente de la antena, y de longitud la necesaria para que presente la misma reactancia de entrada que el condensador que forma el disco con la tierra (Fig. 4.19).

De esta manera se ve claramente que el efecto del condensador es el de "alargar" la antena. La reactancia de entrada corresponderá a la de la línea alargada, y la distribución de corriente será la que tendría la antena alargada en su primer tramo. Como generalmente las antenas son eléctricamente pequeñas, el hecho de modificar la distribución de corriente no afecta a su diagrama y, por lo tanto, a su directividad, pero sí a otros parámetros como la ℓ_{ef} y la R_r. Las variaciones, sin embargo, tampoco son muy grandes. Por ejemplo, en la resistencia de radiación podemos pasar de una antena corta, con una distribución de corriente triangular, a una antena en la que gracias a la carga podemos aproximar su distribución por una uniforme, que correspondería a un dipolo elemental. La relación entre las resistencias en uno y otro caso ya se ha visto que es un factor 4. Pero como las antenas son pequeñas, los valores siguen siendo numéricamente bajos. En cuanto a la longitud efectiva la máxima variación, al incluir el alargamiento, es un factor de 2. Donde sí se produce un gran cambio es en el valor de la reactancia de entrada.

Ejemplo 4.5 En su primer experimento para probar la validez de las ecuaciones de Maxwell, Hertz construyó en 1886 un dipolo formado por un hilo recto de cobre de 5 mm de diámetro y dos metros de longitud, terminado en sus extremos por dos esferas de 30 cm de diámetro construidas con chapa de zinc. Las esferas podían desplazarse sobre el hilo acortando o alargando físicamente la longitud del dipolo.



La capacidad de las dos esferas es aproximadamente la mitad de la de una esfera aislada, con el resultado

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$C = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_o a = 8{,}3 \text{ pF}$$

Hertz estimó la frecuencia de resonancia considerando la inductancia del hilo, aproximada por

$$L = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2H\left[\ln\left(8\frac{H}{d}\right) - 0{,}75\right] = 2\mu H$$

y que el hilo y las esferas forman un circuito resonante cuya frecuencia de resonancia vale

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 39 \text{ MHz}$$

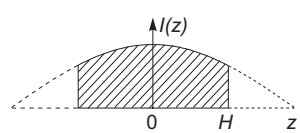
Este mismo valor se obtiene del modelo de línea de transmisión, cuya impedancia característica es (4.72) $Z_0 = 655\ \Omega$ con el resultado, para resonancia, de un alargamiento ℓ, debido a la carga capacitiva, de valor $\ell = 0{,}25\lambda$-H, teniéndose

$$-\frac{1}{C\omega} = -Z_o \operatorname{cotg} k\ell = -Z_o \operatorname{tg} kH$$

La solución de esta ecuación transcendente para la frecuencia ($k = \omega/c$) es el mismo valor anterior.

La corriente en el dipolo, supuesto alineado según z, vale

$$I(z) = I_o \cos kz, \qquad |z| \le H$$



a la que le corresponde una longitud efectiva (3.143)

$$\ell_{ef} = 2\int_0^H \cos kz\, dz = 1{,}5 \text{ m}$$

La forma del diagrama de radiación sigue siendo la misma que la de un dipolo corto

$$t(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta, \qquad D = 1{,}5$$

la resistencia de radiación valdrá

$$R_r \approx 80\pi^2\left(\frac{\ell_{ef}}{\lambda}\right)^2 = 30\ \Omega$$

y será nula la reactancia de entrada.

Si la antena no se hubiera cargado tendríamos a esta frecuencia una longitud efectiva de 80 cm, una resistencia de radiación de 8,5 Ω y aparecería una reactancia de entrada capacitiva de aproximadamente 860 Ω.

Otro sistema de carga consiste en colocar una bobina, no en el extremo de entrada de la antena, sino en medio de la misma. El efecto es también el de modificar la distribución de corriente simulando una antena más larga. El proceso se indica en la figura 4.20.

Según el modelo de línea de transmisión de la antena, el efecto de la bobina, que suponemos de longitud física despreciable, sería una inductancia en serie en medio de la línea. La reactancia vista desde el extremo de la bobina más próximo al trozo de línea ℓ_2 será imaginaria y negativa, por

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

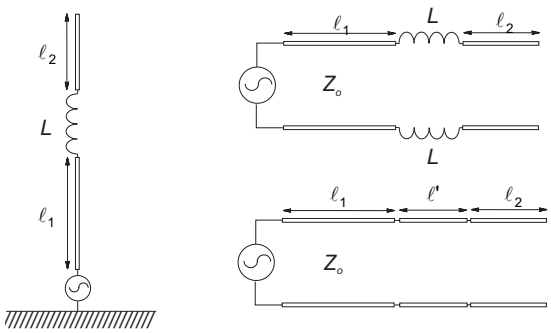


Fig. 4.20 Antena cargada inductivamente

corresponder a un tramo de línea en circuito abierto. En el otro extremo de la bobina la impedancia que se verá será la anterior más la impedancia de la bobina, que es imaginaria y positiva, y por lo tanto "menos negativa", lo que equivaldría a la impedancia de una línea que fuese más larga. El efecto final es también un alargamiento artificial de la antena. La distribución de corriente también queda afectada. En el primer tramo, cerca del generador, correspondería a las de una antena de longitud ($\ell_1+\ell_2+\ell'$)

$$I_1(z) = I_{m1}\,\mathrm{sen}\left(k\left(\left(\ell_1+\ell_2+\ell'\right)-|z|\right)\right) \qquad 0<|z|<\ell_1 \tag{4.78}$$

En el segundo tramo la distribución se corresponde con la distribución en la región terminal de una antena cilíndrica

$$I_2(z) = I_{m2}\,\mathrm{sen}\left(k\left(\left(\ell_1+\ell_2\right)-|z|\right)\right) \qquad \ell_1<|z|<\ell_1+\ell_2 \tag{4.79}$$

En $z = \ell_1$ las dos corrientes deben ser iguales, por la condición de continuidad que impone la bobina, por lo que

$$I_{m1}\,\mathrm{sen}\left(k\left(\ell_2+\ell'\right)\right) = I_{m2}\,\mathrm{sen}\left(k\,\ell_2\right) \tag{4.80}$$

El valor de la inductancia necesaria para conseguir un mismo alargamiento varía con su posición en la antena. Cuanto más cerca está del extremo abierto de la antena mayor tiene que ser la inductancia de la bobina, pero también será mayor la variación en la distribución de corriente respecto a la original y, por lo tanto, será mayor la variación de los parámetros de la antena.

4.5 Cálculo de la matriz de impedancias entre dos dipolos

4.5.1 Impedancia de entrada de un dipolo

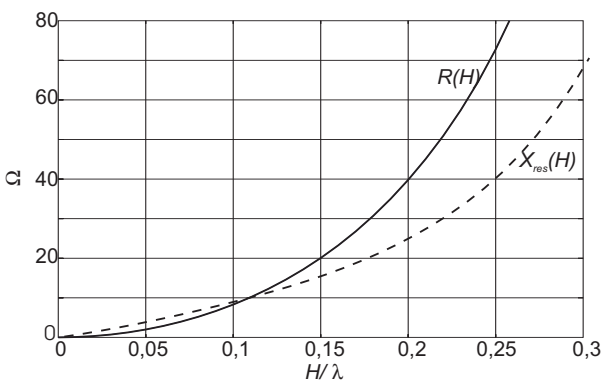


Fig. 4.21 Funciones R(H) y X_{res}(H)

A continuación se presentan los resultados para la impedancia mutua entre dos dipolos obtenida aplicando (3.152), donde para la distribución de corriente en el dipolo se ha tomado la obtenida aplicando el método de los momentos, tal como se hizo en el apartado 4.2. Nótese que para hacer la integral deben calcularse los campos que la antena crea sobre si misma, por lo que las aproximaciones de campo lejano obtenidas anteriormente no sirven, y debe calcularse el campo por métodos numéricos diectamente a partir de la función potencial, sin aproximaciones.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Para antenas con brazo H ≤ λ/4 la impedancia de entrada posee una parte resistiva, R(H), y una parte reactiva, de la que se puede extraer la contribuciónde la línea de transmisión (4.71), quedando un término residual X_{res}(H). Ambos términos se encuentran representados en la figura 4.21. Por ejemplo, para un dipolo en λ/2, H = λ/4, se tiene que la impedancia de entrada es $Z_e = 73+j42{,}5$ ohms. Para que se anule la reactancia de entrada, H debe ser ligeramente inferior a λ/4, dependiendo el acortamiento del radio del conductor. Este acortamiento suele ser de alrededor de un 5% de la longitud del dipolo de media onda. Para dipolos, y en el margen de 30-1000 MHz, la norma UNE 20-523-75 define un valor experimental de acortamiento que se encuentra en la figura 4.23.

En general se observa que cuanto mayor es el radio de la antena más planas se hacen las curvas de reactancia, lo que da origen a una mejor respuesta en frecuencia, es decir, un mayor ancho de banda.

A los valores anteriormente calculados habrá que añadir los efectos de la región terminal de la antena. En la figura 4.22 se presentan los valores de la impedancia de entrada de un dipolo en función de su longitud y para diversas relaciones longitud/diámetro. Han sido obtenidos mediante el método de los momentos (8.3.1) para una alimentación coaxial de Z_o = 50 Ω. Cada curva refleja el comportamiento en función de la frecuencia de un dipolo de dimensiones fijas. En ellas se observa que el ancho de banda es mayor cuanto más grueso es el dipolo.

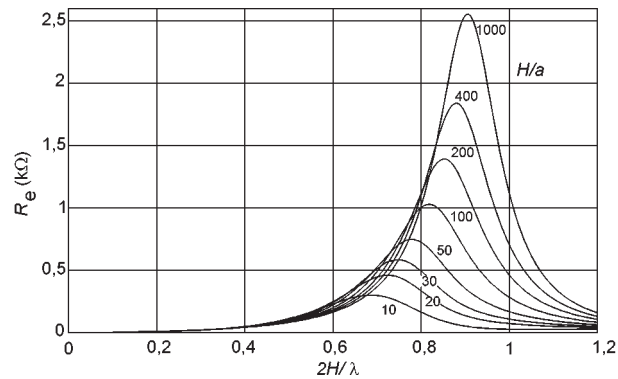


Fig. 4.22 *a* Resistencia de entrada de un dipolo

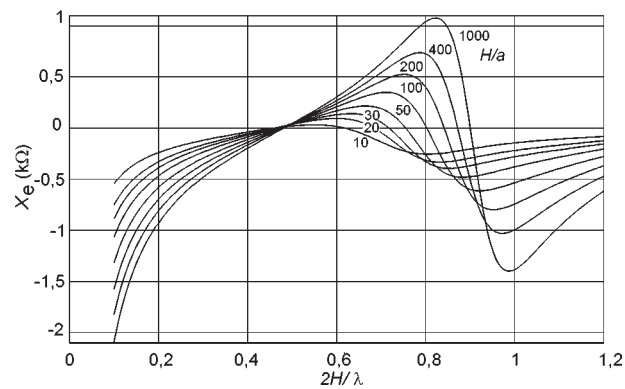


Fig. 4.22 *b* Reactancia de entrada de un dipolo

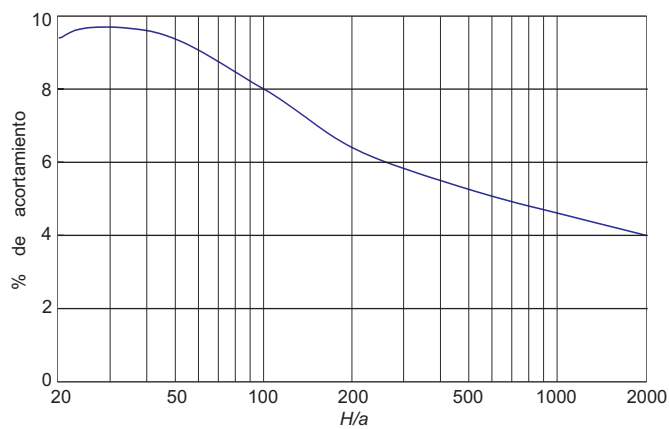


Fig. 4.23 Gráfico de acortamiento de dipolos

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.5.2 Impedancia mutua entre dipolos

A continuación se presenta la impedancia mútua obtenida a partir de (3.153), para el caso particular de que las dos antenas sean dipolos de media onda, en función de la distancia entre las antenas, para el caso en que los dipolos se encuentren paralelos y a la misma altura, y para el caso en que se encuentren colineales (sobre el mismo eje).

Se puede observar que, para el caso de dipolos paralelos, cuando la distancia entre ellos tiende a cero, la impedancia mutua tiende al valor de la autoimpedancia, Z_{11}. Los valores de impedancia mutua son mayores para el caso de dipolos paralelos que en los colineales. Ello es debido a que en el primer caso ambos se están viendo bajo direcciones donde tienen un máximo del diagrama de radiación, mientras que en el segundo caso se ven en direcciones donde tienen un nulo (estricatamente sería un nulo si estuviesen en campo lejano).

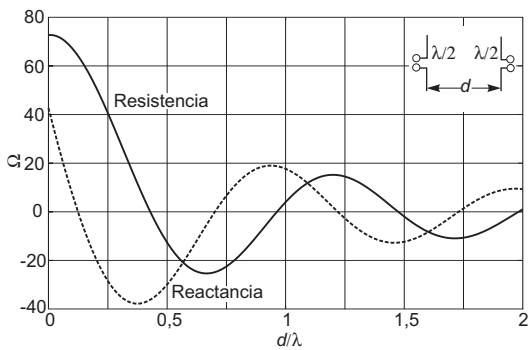


Fig. 4.24 Impedancia mutua entre dipolos λ/2 paralelos

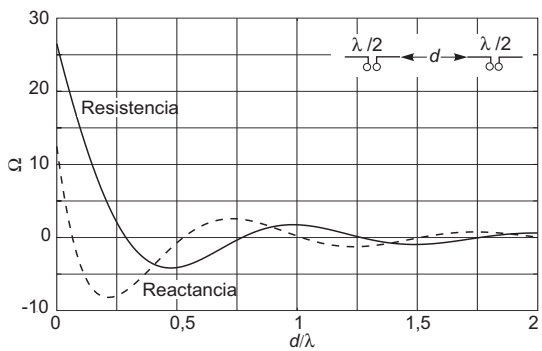
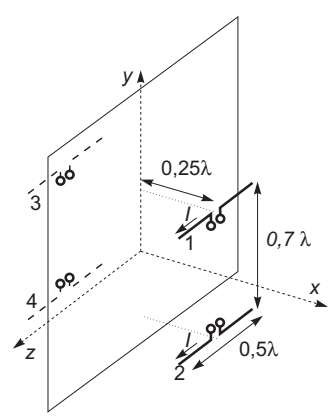


Fig. 4.25 Impedancia mutua entre dipolos λ/2 colineales

Ejemplo 4.6 En sistemas radiantes de TV es común el empleo de paneles de dipolos horizontales situados a λ/4 de un plano conductor. Para el conjunto de dipolos de media onda de la figura se tienen dos imágenes de sentido opuesto, por lo que el campo total radiado resulta valer, en función del campo $\vec{E}_o$ radiado por un dipolo aislado (4.60),

$$\vec{E} = \vec{E}_o \left[e^{j\left(k_x\, 0{,}25\lambda + k_y\, 0{,}35\lambda\right)} + e^{j\left(k_x\, 0{,}25\lambda - k_y\, 0{,}35\lambda\right)} - \right.$$
$$\left. - e^{j\left(-k_x\, 0{,}25\lambda + k_y\, 0{,}35\lambda\right)} - e^{j\left(-k_x\, 0{,}25\lambda - k_y\, 0{,}35\lambda\right)} \right] =$$
$$= \vec{E}_o\; 2\; j\; \mathrm{sen}\left(k_x\; 0{,}25\;\lambda\right) 2\; \cos\left(k_y\; 0{,}35\;\lambda\right)$$

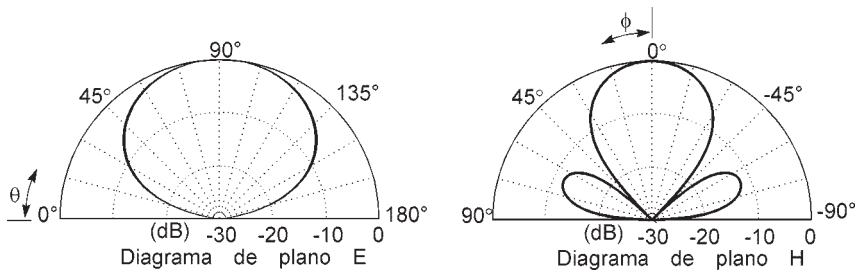
El campo sólo posee componente θ y su módulo es



© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$|E_\theta| = 240\frac{I}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\operatorname{sen}\left(0{,}5\pi\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right)\cdot\cos\left(0{,}7\pi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\right)$$

donde I es la corriente en uno de los dos dipolos.
El máximo de radiación está en la dirección $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, y los diagramas de plano E ($\phi = 0$) y plano H ($\theta = \pi/2$) tienen la forma de la figura.



La impedancia de entrada de un dipolo vale

$$Z_e = Z_{11} + Z_{12} - Z_{13} - Z_{14} \quad (I_3 = I_4 = -I_2 = -I_1)$$

y con las impedancias obtenidas de la figura 4.24

$$Z_{11}\,(d = 0) = 73 + j\,42$$
$$Z_{12}\,(d = 0{,}7\lambda) = -25 - j\,2$$
$$Z_{13}\,(d = 0{,}5\lambda) = -13 - j\,29$$
$$Z_{14}\,(d = 0{,}86\lambda) = -12 + j16$$

resulta $Z_e = 73+j53$. Un acortamiento del dipolo cancelaría la reactancia. La directividad vale

$$D = \frac{\wp_{máx}}{P_r/\left(4\pi r^2\right)} = \frac{\left(240\,I/r\right)^2/\eta}{2\,I^2\;73/(4\pi r^2)} = 13{,}2 = 11{,}2\ \text{dB}$$

4.6 Sistemas de alimentación

En general, entre la antena y el generador o entre la antena y el receptor existe una línea de transmisión, y estos elementos no siempre estarán adaptados entre sí. Es por ello que para obtener el máximo rendimiento y ancho de banda de la antena se deberán disponer dispositivos adicionales para conseguir esa adaptación, realizar algún tipo de modificación o emplear una técnica especial en la antena. A continuación se describen algunas de las técnicas de adaptación.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.6.1 Redes de adaptación

Se suelen introducir entre la antena y la línea de transmisión y entre ésta y el transmisor o el receptor. Aunque en principio con una sola red adaptadora entre la línea y la fuente sería suficiente, no es conveniente que la línea esté muy desadaptada pues las pérdidas en ella entonces son mayores que cuando está adaptada. Para que las redes no introduzcan pérdidas deben ser reactivas.

Las redes de adaptación más simples son redes en L, formadas por una reactancia en serie y una en paralelo (estas reactancias pueden ser cualquier combinación de condensador y bobina, en cualquier orden). Las diferentes configuraciones permiten cubrir diferentes márgenes de impedancias para adaptar. Otras configuraciones muy usadas habitualmente son transformadores y redes en T, en π, en celosía o la conexión en cascada de varias de estas células básicas. Todas estas técnicas se emplean sobre todo en bajas frecuencias, donde el uso de elementos discretos es posible. A más altas frecuencias se pueden realizar las adaptaciones con tramos de línea de transmisión.

4.6.2 Antenas no alimentadas en su centro

En estas antenas, aunque sean asimétricas, se hace la suposición de que la distribución seguirá siendo sinusoidal, como se ve en la figura 4.26, con un cero de corriente en el extremo, por lo que

$$I(z) = \begin{cases} I_1 \operatorname{sen} k(H-z) & z > z_1 \\ I_2 \operatorname{sen} k(H+z) & z < z_1 \end{cases} \tag{4.81}$$

Como en bornes del generador, $z = z_1$, ambas corrientes deben ser iguales, podemos hallar una relación entre I_1 e I_2, y obtener finalmente

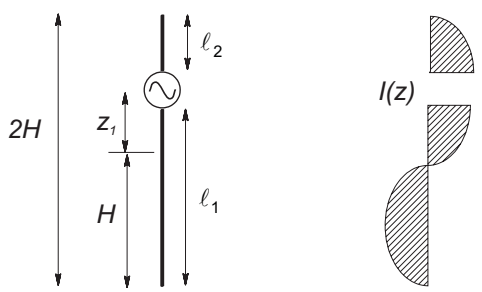


Fig. 4.26 Antenas no alineadas en su centro

$$I(z) = \begin{cases} I_m \operatorname{sen} k(H+z_1) \operatorname{sen} k(H-z) & z > z_1 \\ I_m \operatorname{sen} k(H-z_1) \operatorname{sen} k(H+z) & z < z_1 \end{cases} \tag{4.82}$$

Dado que la distribución de la corriente depende del punto de conexión del generador, la impedancia de entrada también dependerá de dicha posición. Empíricamente se ha encontrado que la impedancia de entrada es aproximadamente el valor medio de la impedancia de dos dipolos, uno de longitud total $2\ell_1$ y otro $2\ell_2$.

4.6.3 Alimentación en paralelo

Una forma de variar la impedancia de entrada de un dipolo es alimentándolo con un generador en paralelo, conectando una línea de transmisión a una antena con sus terminales cortocircuitados. La

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

figura 4.27 muestra una configuración de este tipo, denominada delta, y su correspondiente modelo de línea de transmisión. En primera aproximación podemos decir que la reactancia de entrada será el paralelo de una línea de transmisión terminada en circuito abierto y otra en cortocircuito.

En la figura 4.27 se muestran otras configuraciones de alimentación que responden a la misma filosofía, en las que se realiza la conexión de la malla de un coaxial al punto medio de un dipolo de media onda, aprovechando que el potencial en ese punto es cero.

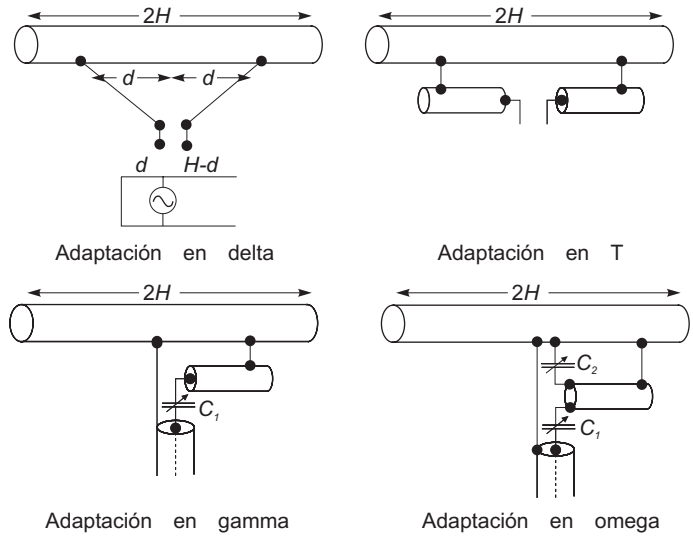


Fig. 4.27 Alimentaciones en paralelo

4.6.4 Dipolo doblado

Hemos visto que un dipolo resonante presenta una impedancia de entrada del orden de 75 Ω, por lo que está, en consecuencia, bien adaptado a los valores de impedancia característica habituales en cables coaxiales (50-75 Ω). Un tipo de línea de transmisión empleado, sobre todo en los primeros tiempos de la TV, es la línea bifilar, cuya impedancia habitual es del orden de 300 Ω, con lo cual se necesitaría un transformador para adaptar la antena a la línea. Para evitar el uso de transformadores se utiliza ampliamente una estructura derivada del dipolo y que realiza ella misma la transformación de impedancias, es decir, presenta una impedancia de entrada cuatro veces mayor que la del dipolo. La figura 4.28 muestra un dipolo doblado, cuyo análisis de corrientes e impedancia puede realizarse por superposición de los modos presentados.

En el primer modo se tienen dos dipolos en λ/2, alimentados con el mismo generador, y situados paralelos y muy próximos. El segundo modo corresponde a las corrientes y las tensiones en una línea de transmisión, por lo que no contribuirá a la radiación pero sí a variar el nivel de impedancia en la entrada debido al valor de la corriente I_2.

Para el modo radiante tenemos

$$\frac{V}{2} = Z_{11} I_1 + Z_{11'} I_1 \qquad (4.83)$$

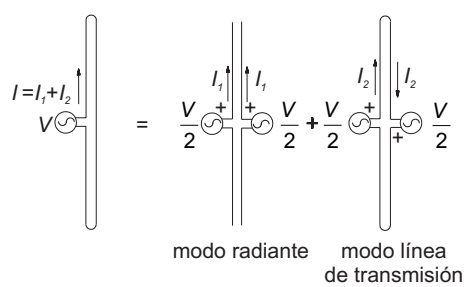


Fig. 4.28 Dipolo doblado

donde Z_{11} es la impedancia de un dipolo en λ/2 aislado y $Z_{11'}$ la impedancia mutua entre dos dipolos en λ/2 muy próximos. Como por simetría las corrientes en los dos dipolos han de ser iguales y $Z_{11'}$ tiende a Z_{11} al tender la separación a cero, se tiene una relación entre tensiones y corrientes

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$V = 2\left(Z_{11}\, I_1 + Z_{11'}\, I_1\right) \approx 4\, Z_{11}\, I_1 \tag{4.84}$$

En el modo equilibrado de línea de transmisión se tiene un generador con una línea de longitud λ/4 acabada en cortocircuito, por lo que la corriente I_2 en bornes del generador valdrá 0. La relación entre V e I en la antena inicial vendrá dada por la suma de los modos, con $I = I_1+I_2$, por lo que la impedancia de entrada del dipolo doblado es cuatro veces la del dipolo simple. Al igual que éste, el dipolo doblado se suele hacer ligeramente más corto para eliminar la componente reactiva de la impedancia de entrada.

Otra ventaja del dipolo doblado es su comportamiento con la frecuencia. A frecuencias inferiores a la de resonancia el dipolo presenta un brazo menor de λ/4, por lo que la reactancia en el modo radiante será capacitiva mientras que en el modo de línea de transmisión será inductiva, y se producirá una compensación. A frecuencias superiores a la de resonancia el comportamiento es el inverso y se produce también esa compensación, por lo que el ancho de banda del dipolo doblado es mayor que el del dipolo simple.

4.6.5 Simetrizadores y transformadores

Hasta ahora nos habíamos preocupado de cómo adaptar la impedancia de la antena a la de la línea o el generador. Pero un problema también muy importante es cómo pasar de una línea que está equilibrada a una no equilibrada.

Una línea equilibrada es aquella en la que los dos conductores que la forman se encuentran al mismo potencial pero con signo cambiado respecto a tierra, como ocurre en la línea bifilar. Una línea no equilibrada es la que tiene los dos conductores a distinto potencial, por ejemplo uno de ellos conectado a tierra, situación que se da en los cables coaxiales. Un dipolo alimentado en su centro es también una estructura equilibrada.

Cuando se conecta un dipolo a un cable coaxial se da la situación representada en la figura 4.29a, con corrientes diferentes en los brazos del dipolo. Esta diferencia de corrientes la provoca la existencia de una corriente circulando a tierra por el exterior de la malla del cable coaxial. El desequilibrio de corrientes en los brazos del dipolo introduce anomalías en el diagrama de radiación y en la impedancia de entrada.

Las corrientes en los brazos pueden descomponerse en una parte simétrica y otra antisimétrica (I_s, I_a) mediante las relaciones

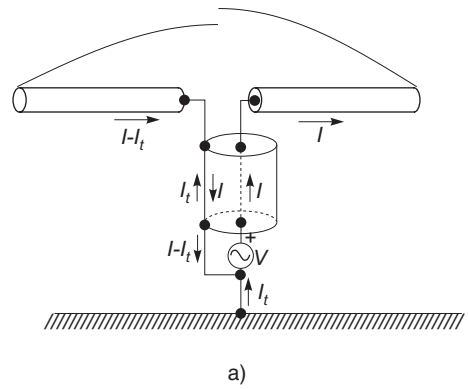
$$I = I_s + I_a$$
$$I - I_t = I_s - I_a$$

de las que resulta que la corriente a tierra I_t es el doble de la parte antisimétrica ($I_t = 2I_a$). En la figura 4.29b se representan estas corrientes y la superposición de generadores equivalentes que las originan. Es de destacar que la distribución de corrientes simétricas en el dipolo es la de un modo radiante, mientras que la de las antisimétricas es la de una línea de transmisión.

En el modo radiante (Fig. 4.29c), no hay corriente a tierra y las líneas de campo se cierran yendo de un brazo del dipolo al otro. Por el contrario, las corrientes antisimétricas se cierran por tierra (Fig. 4.29d). El conocimiento de las impedancias características de las líneas, longitudes e impedancias terminales permitiría en cada caso concreto calcular las corrientes en ambos modos. No obstante, desde el punto de vista de radiación, es evidente que lo deseable es que no exista desequilibrio en las corrientes en el dipolo, es decir $I_a = 0$, lo que es equivalente a exigir que no haya circulación de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

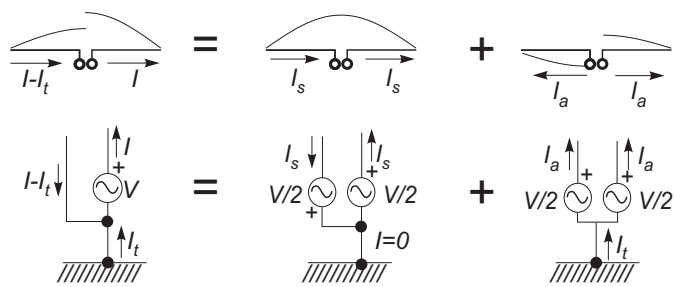
corrientes a tierra. Para lograrlo se realiza la conexión de un dipolo a un cable coaxial utilizando un simetrizador o balun (acrónimo de las siglas inglesas *balanced to unbalanced transformer*), que suele realizar además la transformación de impedancias necesaria para adaptar.



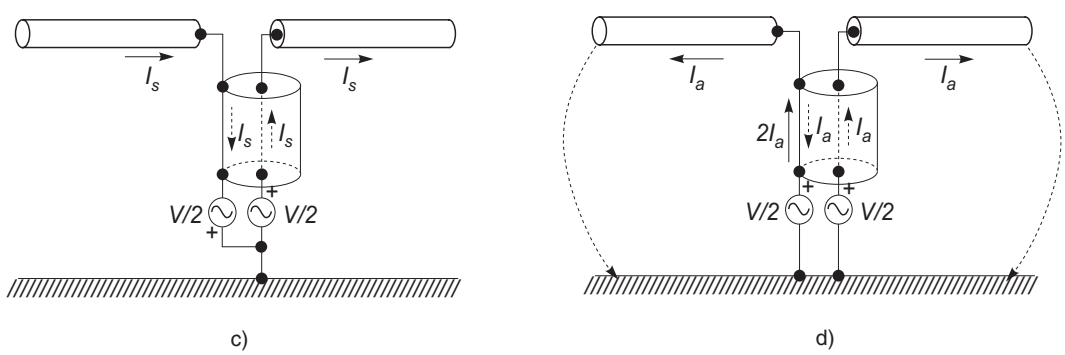
a)

Simetrización mediante estructura

La figura 4.30 muestra, de nuevo simplificado, el modelo de una antena alimentada por una línea



b)



c) d)

Fig. 4.29 Unión de una línea no equilibrada con un dipolo

coaxial conectada a masa. El hecho de que uno de los brazos de la antena tenga una conexión directa a tierra provoca una asimetría en la estructura y una diferencia en las corrientes que circulan por los brazos de la antena. Una solución para simetrizar la estructura es hacer que los caminos a tierra desde ambos brazos sean iguales, tal como indica la figura 4.30b. De esta manera, por la simetría del conjunto, las corrientes en los brazos de la antena deben ser iguales, así como las corrientes que desde los extremos del generador se derivan a masa, pero estamos cortocircuitando la alimentación. En realidad lo que se ha hecho es colocar una línea de transmisión en paralelo con el generador y cortocircuitada en su extremo, con lo que desde el generador se verá una impedancia que será el

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

paralelo de la de la antena y la de la línea de simetrización. Para evitar cortocircuitar el generador, si se hace que la línea sea de longitud λ/4, en su extremo se tendrá un circuito abierto y las corrientes se anularán. Hay que hacer notar que, aunque la longitud de la línea de simetrización no sea λ/4 (Fig. 4.30c), la estructura sigue siendo simétrica, por lo que las corrientes en los brazos de la antena seguirán siendo iguales. El problema es que entonces las corrientes en la línea varían la impedancia vista desde el extremo del cable coaxial.

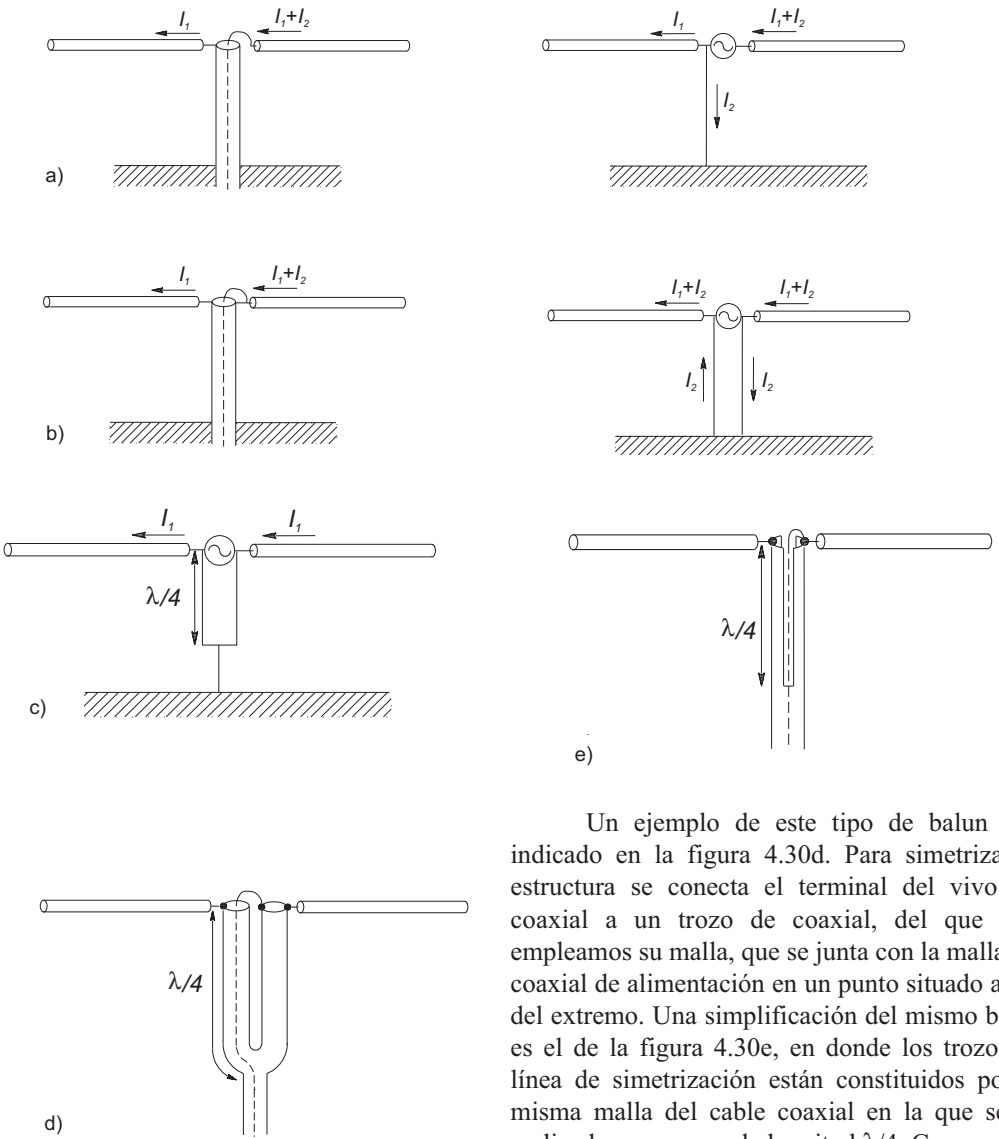


Fig. 4.30 Simetrización mediante estructura

Un ejemplo de este tipo de balun está indicado en la figura 4.30d. Para simetrizar la estructura se conecta el terminal del vivo del coaxial a un trozo de coaxial, del que sólo empleamos su malla, que se junta con la malla del coaxial de alimentación en un punto situado a λ/4 del extremo. Una simplificación del mismo balun es el de la figura 4.30e, en donde los trozos de línea de simetrización están constituidos por la misma malla del cable coaxial en la que se ha realizado una ranura de longitud λ/4. Como antes, los caminos desde los puntos de alimentación de la antena a tierra son idénticos.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Balun de alta impedancia

Otra manera de evitar estas corrientes por el exterior de la malla es hacer que por el camino a masa se encuentren algún obstáculo, un elemento de alta impedancia en serie con la línea, que impida su circulación o la aminore. Una manera sencilla de realizarlo es colocar una bobina en serie en la línea, que a la frecuencia de trabajo presente una impedancia elevada. La manera de realizarla es enrollar el cable coaxial formando una serie de espiras. De cara a la corriente que circula por el interior del coaxial las vueltas no representan ningún obstáculo, pero para las que circulan por el exterior las espiras constituyen una bobina. Para aumentar la inductancia de la bobina se pueda realizar el arrollamiento sobre un núcleo de ferrita (Fig. 4.31a); aunque es una estructura de poco interés práctico, ilustra bien el concepto de bloqueo del flujo de la corriente a tierra.

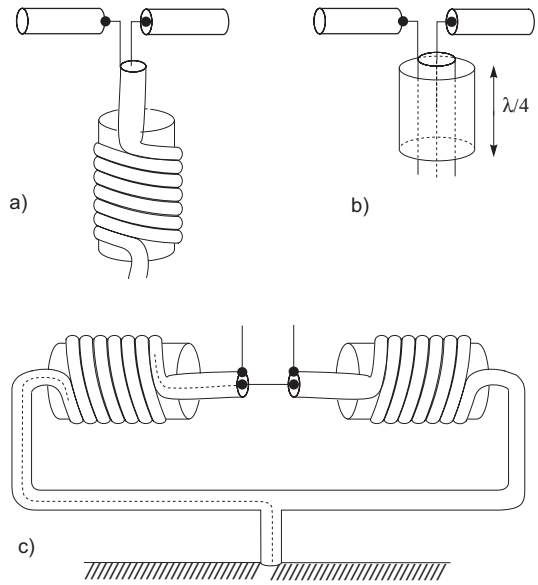


Fig. 4.31 Simetrizadores de alta impedancia

Otro sistema es el empleado en el balun denominado bazooka (Fig. 4.31b). Éste consiste en un manguito conductor superpuesto al cable coaxial y cortocircuitado en el extremo, de longitud λ/4. Las corrientes se encuentran con un elemento de muy alta impedancia por lo que tienden a cero.

La estructura anterior es de banda estrecha, ya que estrictamente sólo simetrizará las corrientes cuando la longitud del manguito sea λ/4. Para obtener baluns de banda ancha se suelen realizar estructuras que son combinación de los tipos vistos hasta ahora. Ya se vio que los baluns por simetrización de estructura equilibraban las corrientes en el dipolo para cualquier frecuencia de trabajo. El problema eran las corrientes que aparecían, que modificaban la impedancia vista desde el coaxial. Para eliminar estas corrientes se pone un camino de alta impedancia como los descritos en este apartado. Un ejemplo es el balun de la figura 4.31c, en donde las líneas de simetrización de la estructura pueden tener cualquier longitud y para evitar las corrientes por ellas se bobinan sobre sí mismas.

Simetrización por desfase

Ya se ha comentado que el origen de los desequilibrios en las corrientes está en que ambos bornes de la antena se encuentran a diferente potencial respecto a tierra. Para solventarlo se trata de conseguir, a partir de un mismo punto, dos puntos de alimentación que se encuentren al mismo potencial respecto a masa y desfasados entre sí 180º. Un método es mediante la red en celosía de la figura 4.32. Con este circuito, además de conseguir el desfase deseado, es posible realizar también una transformación de impedancias.

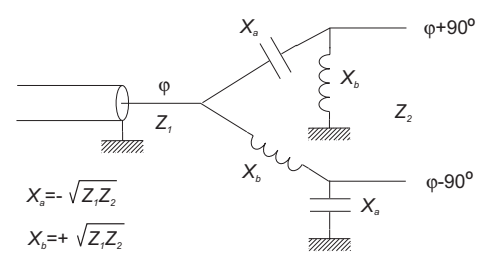


Fig. 4.32 Red en celosía

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

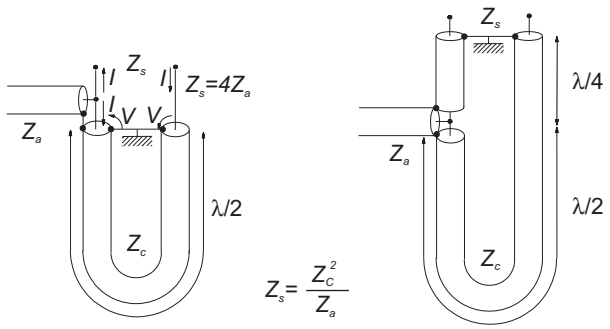


Fig. 4.33 Simetrización mediante línea desfasadora

Otra manera de conseguir el desfase es mediante líneas de transmisión (Fig. 4.33). En efecto, las tensiones y corrientes en una línea de longitud λ/2 están desfasadas 180º entre la entrada y la salida. A partir de la figura se puede ver que la tensión en los extremos de la línea equilibrada es simétrica respecto a masa y de valor el doble que en la línea no equilibrada, mientras que la corriente es la mitad en la una que en la otra, por lo que la impedancia que se verá desde la línea equilibrada será 4 veces la de la no equilibrada. En principio la impedancia de la línea equilibrada de λ/2 no es relevante. Si se quiere que la relación de impedancias entre la antena y el coaxial sea distinta, se pueden colocar líneas en λ/4 entre el balun y la antena, que actúan como transformadores de impedancia. Eligiendo adecuadamente el valor de la impedancia de estos trozos de línea se puede conseguir cualquier relación de transformación de impedancias. Por ejemplo, en el segundo esquema de la figura 4.33, si las impedancias de todas las líneas son iguales, e iguales a la del coaxial de alimentación, la relación será 1:1.

Transformadores

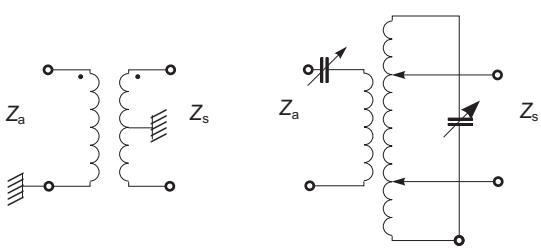


Fig. 4.34 Transformadores utilizados como simetrizadores

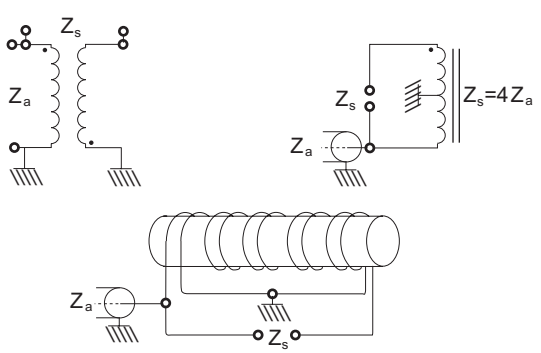


Fig. 4.35 Simetrizador 4:1 realizado mediante transformador y ejemplo de realización práctica sobre una barra de ferrita

Hasta frecuencias de VHF se utilizan habitualmente transformadores que realizan también la simetrización. Conviene tener presente que si bien todos los conceptos se aplican por igual en transmisión que en recepción, los niveles de potencia son muy diferentes y, en consecuencia, los simetrizadores han de soportar en el primer caso potencias elevadas, y no así en el segundo.

Un primer ejemplo es el transformador de la figura 4.34, al que se pueden añadir diversos elementos variables de sintonía, como por ejemplo los indicados. Variando el número de vueltas de los devanados se logran diversas relaciones de transformación. En la conexión de un coaxial a un dipolo se utilizan transformadores 1:1, mientras que en el caso de un dipolo doblado ésta es de 1:4.

Una forma sencilla de lograr esta última relación de transformación es mediante una combinación serie-paralelo, como la utilizada en el simetrizador de la figura 4.33. Esta misma configuración puede realizarse con un transformador, conectándolo de la forma indicada en la figura 4.35, donde también se muestra un

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

ejemplo de construcción mediante un devanado bifilar sobre una barra de ferrita.

Utilizando transformadores trifilares pueden obtenerse diversas relaciones de transformación, según se combinen los devanados. En la figura 4.36 se muestra un esquema autotransformador con las conexiones para realizar una simetrización 1:1 de una línea no equilibrada. Puede conseguirse también una transformación 1:9 conectando una línea a un devanado y la otra a los tres, permitiendo todas los posibles combinaciones equilibrado-no equilibrado; se pueden obtener también relaciones de transformación 4:9. En la misma figura se incluye un ejemplo de realización sobre un núcleo toroidal de ferrita. Por último, variando el número de vueltas de uno de los devanados pueden lograrse otras adaptaciones, por ejemplo de 50 a 75Ω.

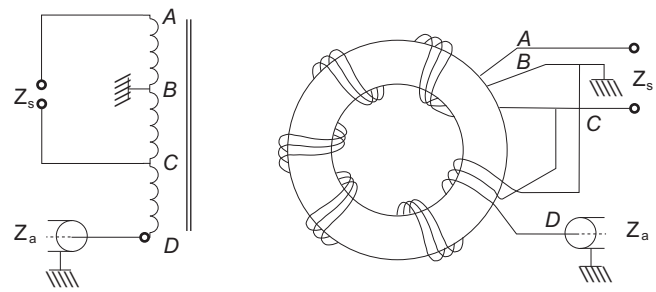


Fig. 4.36 Simetrizador trifilar conectado para una transformación de impedancias 1:1

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

4.1 A un dipolo de 10 cm de longitud se le cambia su frecuencia de funcionamiento de 3 MHz a 6 MHz. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
a) La directividad se duplica.
b) El área efectiva se divide por 4.
c) La resistencia de radiación se divide por 4.
d) La longitud efectiva se duplica.

4.2 Se tienen 10 m de hilo de cobre para construir una antena solenoidal a 1 MHz. La antena de mayor eficiencia será la que, empleando todo el hilo, tenga:
a) 1 espira. b) 10 espiras.
c) 100 espiras. d) no depende del número de espiras.

4.3 Para un dipolo elemental, disminuir sus dimensiones manteniendo la frecuencia de trabajo significa disminuir:
a) La directividad.
b) El área efectiva.
c) La longitud efectiva.
d) El ancho de haz.

4.4 Un dipolo en $\lambda/2$ (H/a = 1.000) tiene una impedancia de entrada $Z_e = 73 + j42{,}5\ \Omega$. Al aumentar ligeramente la frecuencia de funcionamiento, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?
a) La parte real de la impedancia de entrada aumentará.
b) La parte imaginaria de la impedancia de entrada disminuirá.
c) La directividad aumentará.
d) El ancho de haz disminuirá.

4.5 La impedancia de entrada, a 300 MHz, de un dipolo delgado de longitud total 2H = 42,5 cm, vale:
a) $45 + j80\ \Omega$ b) $45 - j80\ \Omega$ c) $80 + j45\ \Omega$ d) $80 - j45\ \Omega$

4.6 Un dipolo de longitud total 1 m, tiene a 300 MHz una directividad de:
a) 1,5 b) 1,64 c) 2,41 d) 3,33

4.7 Al cargar un monopolo corto de longitud ℓ fija con una cierta inductancia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
a) Para hacer resonante la antena es necesaria una inductancia menor si se coloca cerca del extremo que cerca de la base.
b) Si la inductancia se coloca cerca de la base la longitud efectiva es mayor que si se coloca cerca del extremo.
c) El área efectiva aumenta debido al efecto de la inductancia.
d) Ninguna de las anteriores.

4.8 Para hacer resonante un monopolo de 1 m de longitud trabajando a 100 MHz se debe colocar:
a) Un disco capacitivo en el extremo. b) Un condensador en serie con la entrada.
c) Una bobina en serie con la entrada. d) Una bobina en el extremo de la antena.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.9 Al cargar capacitivamente un monopolo corto con un disco en el extremo:

a) La directividad aumenta. b) La directividad disminuye.
c) La longitud efectiva aumenta. d) La longitud efectiva disminuye.

4.10 Al acercar un dipolo a un plano conductor paralelo a él, su impedancia de entrada

a) Tiende a Z_{11}. b) Tiende a $2Z_{11}$.
c) Tiende a cero. d) No varía.

4.11 El valor de $|Z_{21}|$ para dos dipolos cortos de brazo $H = \lambda/60$ paralelos y separados una distancia de $10\,\lambda$ es:

a) $5\cdot10^{-3}\ \Omega$ b) $10^{-2}\ \Omega$ c) $27\cdot10^{-6}\ \Omega$ d) $55\cdot10^{-6}\ \Omega$

4.12 Paralelo a un dipolo de media onda se sitúa a una distancia de $0{,}1\lambda$ otro dipolo igual cortocircuitado.

a) La resistencia de radiación disminuye.
b) La resistencia de radiación aumenta.
c) La resistencia de radiación permanece constante.
d) No existen suficientes datos para saber que pasa con la resistencia de radiación.

4.13 ¿Cuál es el desacoplo de polarización entre la onda $(\hat{x} + j3\hat{y})e^{j(\omega t+kz)}$ y una antena que produce campos con polarización circular a izquierdas en la dirección $\hat{z}$?

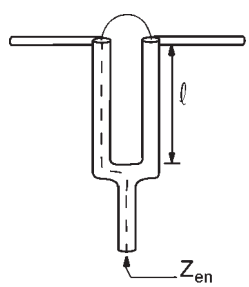
a) 0,2 b) 1/3 c) 0,5 d) 0,8

4.14 Dos dipolos presentan una cierta impedancia mutua. Si uno de ellos se sustituye por uno doblado, la impedancia mutua resultante es:

a) Cuatro veces mayor. b) Dos veces mayor.
c) Igual. d) La mitad.

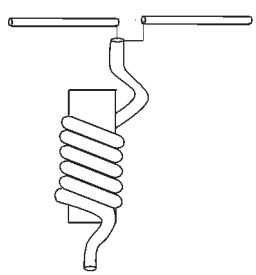
4.15 En el balun de la figura, si su longitud ℓ deja de ser igual a $\lambda/4$.

a) La impedancia de entrada varía.
b) La impedancia de entrada no varía.
c) Las tensiones en los brazos dejan de ser simétricas.
d) Las corrientes en los brazos dejan de ser simétricas.



4.16 En la figura se conectan un dipolo y un coaxial de impedancias Z_D y Z_C respectivamente. El efecto del arrollamiento del cable coaxial sobre el núcleo de ferrita es:

a) Adaptar impedancias si $Z_D = 4Z_C$.
b) Adaptar impedancias si $4\,Z_D = Z_C$.
c) Simetrizar la corriente en los dos brazos del dipolo.
d) Simetrizar y adaptar con relación 4:1.

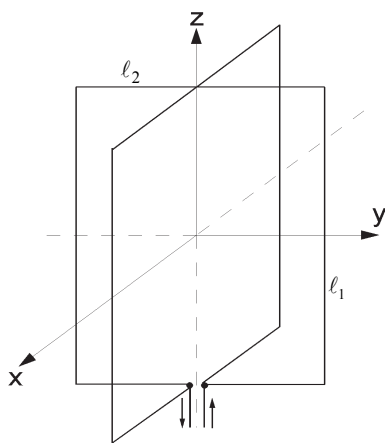


© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

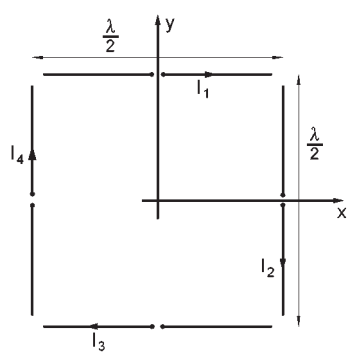
Problemas

4.1 Un radiogoniómetro es una de las ayudas a la navegación más antiguas y permite conocer la dirección de llegada de una señal emitida por una radiobaliza. La antena de la figura está formada por dos espiras ortogonales. Combinando las señales de las dos espiras se logra el mismo efecto que produciría una rotación mecánica de la antena y se conoce la dirección de llegada mediante la detección de un paso por cero.
El sistema funciona a 300 kHz. Las dos espiras son iguales y tienen lados ℓ_1=1,1 m y ℓ_2=0,8 m. Se pide analizarlas cuando sus bornes están conectados como se indica en la figura, para obtener:

a) El diagrama de radiación de la antena y representarlo en los planos z=0 e y=0.
b) La polarización de la antena en la dirección de los ejes coordenados.
c) La directividad de la antena.



4.2 Si la antena de cuadro de la figura, cuando actúa como transmisora, tiene la distribución de corriente:



$$\vec{I}_1 = \hat{x}\cos kx$$
$$\vec{I}_2 = -\hat{y}\cos ky$$
$$\vec{I}_3 = -\hat{x}\cos kx$$
$$\vec{I}_4 = \hat{y}\cos ky$$

a) Obtener el vector de radiación.
b) Obtener los campos radiados en el plano xy, indicando la polarización.
c) ¿Cuál es la directividad de la antena, sabiendo que la resistencia de radiación de cada dipolo vale 86 Ω?

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.3 Una antena formada por dos dipolos ortogonales, como la indicada en la figura, está situada en el origen de coordenadas. La longitud de cada uno de los brazos es H=0,2λ. La impedancia para el dipolo sin carga es de 75- j75 Ω. La carga inductiva situada a la entrada de cada uno de los brazos del dipolo vale $L\omega$ = 75 Ω. Suponer que no hay efectos mutuos entre los dipolos.

a) Calcular la tensión en circuito abierto cuando incide una onda de la forma

$$\vec{E} = \hat{x}\, e^{j(\omega t + kz)}$$

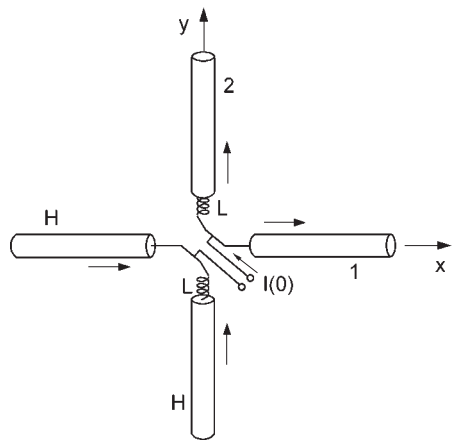
b) Repetir el apartado anterior para la onda

$$\vec{E} = \hat{y}\, e^{j(\omega t + kz)}$$

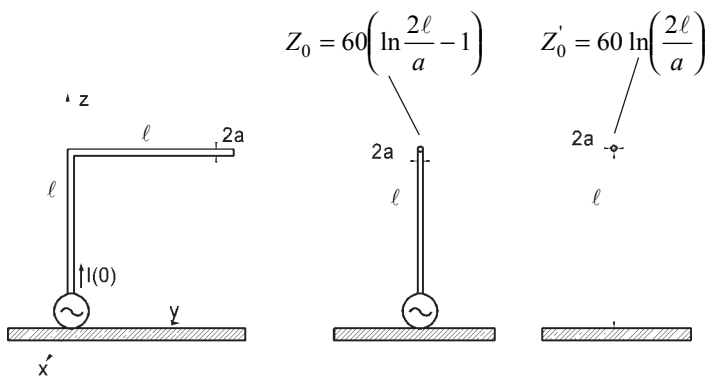
c) ¿Qué polarización tendrán los campos radiados por esa antena, en la dirección z, cuando actúe como transmisora?

d) Diseñar un balun basado en líneas de transmisión que adapte la impedancia de la antena a un cable coaxial de 75 Ω.

e) En campo lejano, centrado en el eje z, se sitúa a una distancia z_0 una segunda antena, que es un dipolo de brazos H = λ/4, orientado según $\hat{y}$. Representar gráficamente la variación de la impedancia mutua, R_{12} y X_{12}, cuando la separación entre las dos antenas varía entre 8λ y 10λ.



4.4 A una frecuencia de 100 kHz se utiliza como antena transmisora un monopolo en L invertida. Se alimenta en su base respecto a tierra, que puede considerarse conductora perfecta y plana, con una corriente I(0) de 100 A. Si cada rama de la L tiene 25 m de longitud (ℓ) y se ha construido con conductores de 25 cm de diámetro (2a), obtener:



a) La distribución de corriente, considerando que tiene la forma de un dipolo sin doblar.

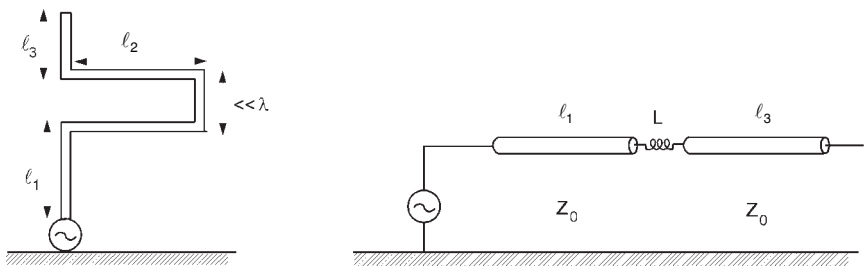
b) El vector de radiación. Particularícese para los planos *xz, xy*. ¿Qué polarización resulta?

c) El valor de los campos a una distancia de 100 km en las direcciones de los tres ejes. ¿Cuál es el efecto desde el punto de vista de radiación de la parte superior de la L?

d) La directividad y la impedancia de entrada; compararlas con las que se obtendrían para un monopolo vertical simple de longitud ℓ, alimentado en idénticas condiciones.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.5 La figura muestra el esquema de una antena diseñada para trabajar en dos bandas de frecuencia; está formada por dos tramos de longitudes ℓ_1 y ℓ_3, unidos por un tramo de longitud ℓ_2, que constituye una línea de transmisión acabada en cortocircuito, equivalente a una carga concentrada. A su derecha se muestra su modelo equivalente en líneas de transmisión. Se desea que la antena sea un monopolo resonante en $\lambda/4$ a las frecuencias de f_1 = 150 MHz y f_2 = 450 MHz.

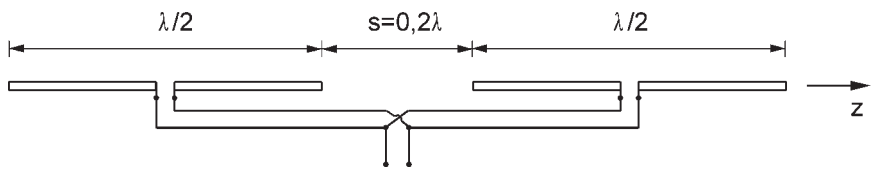


Calcular:

a) La longitud del tramo ℓ_1.
b) La longitud del tramo de línea de transmisión en cortocircuito (*stub*) ℓ_2.
c) La longitud del tramo ℓ_3.
d) La longitud efectiva y la resistencia de radiación a 450 MHz.
e) Aproximando la distribución de corriente por dos tramos lineales, hallar la longitud efectiva y la resistencia de radiación a 150 MHz.

Datos: Z_0 monopolo vertical = 250 Ω $\quad$ Z_0 *stub* = 300 Ω,
X_{IN}(c.c.) = Z_0 tan $k\ell$ $\quad$ X_{IN}(c.a.) = $-Z_0$ cot $k\ell$

4.6 Una antena está formada por dos dipolos colineales de media onda, orientados según $\hat{z}$, con sus dos extremos separados $s = 0{,}2\lambda$, y conectados mediante líneas de transmisión de igual longitud, tal y como se representa en la figura.

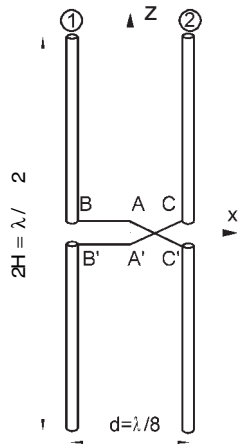


a) Para cada uno de los dipolos, representar las corrientes y obtener la impedancia de entrada.
b) Calcular los campos radiados por la antena y representar el corte de plano *E* del diagrama de campo, indicando el ancho de haz a -3 dB.
c) Calcular la directividad de la antena de forma exacta, y de forma aproximada a partir del ángulo sólido equivalente, comparando ambos resultados.

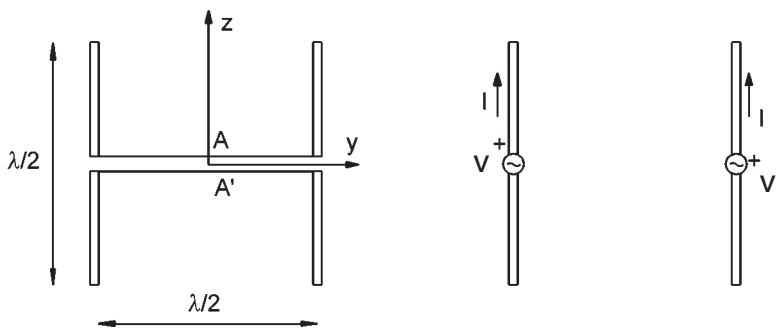
4.7 Una antena conocida por los radioaficionados como W8JK, que es el indicativo de John Kraus (profesor de la Universidad de Ohio y autor de varios libros de antenas, radioastronomía y electromagnetismo) consta, en su configuración más simple, de dos dipolos muy próximos de longitud $\lambda/2$. Para la antena de la figura, donde *A-A'* son los puntos de alimentación, obtener:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

a) La impedancia de entrada de cada dipolo (*B*-*B*' y *C*-*C*').
b) El campo radiado y la directividad de la antena.
c) Representar el diagrama normalizado de plano *E* de la antena.
d) Si los dipolos tuvieran unas pérdidas de 2 Ω cada uno, ¿cuánto valdría la ganancia de la antena?



4.8 Dos dipolos de media onda ($H = \lambda/4$) se sitúan paralelos y separados una distancia $\lambda/2$. Se conectan en fase a los terminales de entrada (*A*-*A*') mediante dos secciones idénticas de línea de transmisión en $\lambda/4$ e impedancia característica Z_0.

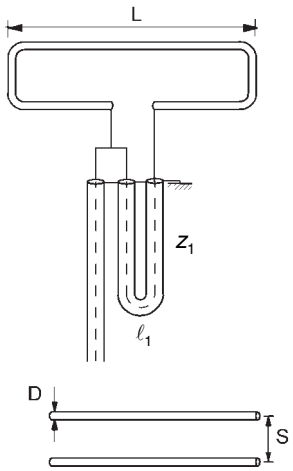


a) Obtener la impedancia de cada dipolo, para el modelo de la figura, indicando los procedimientos que podrían aplicarse para hacerla resonante. Calcular, para el diseño resonante, la impedancia característica de la línea que adaptaría a una impedancia de entrada (*A*-*A*') de 50 Ω.
b) Calcular los campos radiados si la corriente a la entrada es 1,55 A.
c) Representar los cortes de plano *E* y de plano *H* del diagrama de radiación.
d) Obtener la directividad.
e) Si la antena actúa como receptora y sobre ella incide una onda $\vec{E} = \hat{z}e^{j(\omega t + kx)}$ mV / m de frecuencia 100 MHz, calcular la tensión inducida en circuito abierto y la potencia transferida a una carga adaptada, conectada en los terminales (*A*-*A*').

4.9 Se desea analizar el comportamiento de un dipolo doblado cuando se conecta a un simetrizador.
a) Obtener una expresión para la impedancia de entrada de un dipolo doblado, como el indicado en la figura, incluyendo el efecto de la línea de transmisión.
b) La impedancia de entrada de un dipolo de longitud $L \approx 0{,}5\lambda$ se puede aproximar por la expresión

$$Z_{11} = \left(73 + j43\frac{L/\lambda - 0{,}45}{0{,}05}\right)\Omega$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



Calcular la impedancia de entrada del dipolo doblado para $L = 0{,}4\lambda$, $L=0{,}45\lambda$ y $L = 0{,}5\lambda$. Indicar gráficamente la longitud para la que es resonante.

c) Calcular la impedancia característica del coaxial simetrizador (Z_1) y su longitud (ℓ_1) para conseguir adaptación.

d) Dibujar el diagrama de radiación del dipolo doblado en los planos *E* y *H*.

$$Z_0 = 120\text{argch}(S/D) = 120\ln(2S/D)$$
$$(S/D) = 5$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5
Agrupaciones de antenas

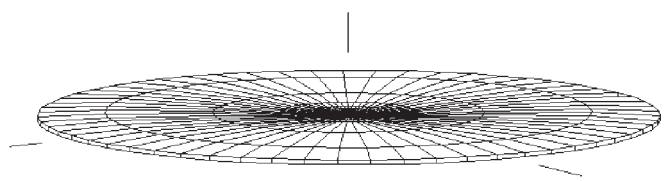
5.1 Introducción

Las antenas básicas estudiadas en el capítulo anterior proporcionan grandes anchos de haz y, consecuentemente, valores de directividad reducidos. Ello es debido a que sus dimensiones eléctricas son, como máximo, del orden de la longitud de onda. En aquellas aplicaciones en las que son necesarias directividades elevadas, deben utilizarse antenas de grandes dimensiones eléctricas con distribuciones de corriente lo más uniformes posible, tal como se refleja en la tabla 3.1.

Si bien en teoría, como se ha visto en el capítulo 3, puede obtenerse cualquier diagrama de radiación diseñando una distribución de corriente cuya transformada de Fourier sea el diagrama deseado, en la práctica no es posible lograr cualquier distribución de corrientes sobre una antena determinada. Por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell más las condiciones de contorno imponen a un dipolo una distribución de corriente aproximadamente sinusoidal. Si para aplicaciones de radiodifusión se deseara obtener un haz omnidireccional de ancho a -3 dB igual a 6º, sería necesaria una distribución lineal uniforme de longitud del orden de 10λ, la cual no es posible en un dipolo.

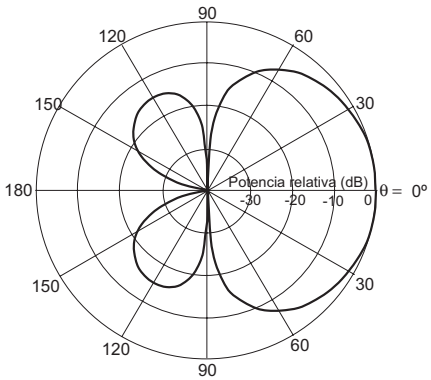
Este problema puede solucionarse con ayuda de una agrupación de antenas (*array*), alimentadas con amplitudes y fases tales que la interferencia de los campos radiados por todas las antenas nos proporcione el diagrama deseado. En el ejemplo anterior, podríamos obtener de forma aproximada la distribución de corriente uniforme de longitud 10λ con una agrupación de 21 dipolos pequeños separados λ/2. En este caso, la longitud total de la agrupación es 10λ y corresponde a un muestreo discreto cada λ/2 de una distribución uniforme de corriente.

En la figura de la derecha se muestra el diagrama de radiación en el espacio real de la agrupación de 21 dipolos colineales. Obsérvese que es similar al del dipolo en λ/2, pero presenta un ancho de haz principal muy inferior.

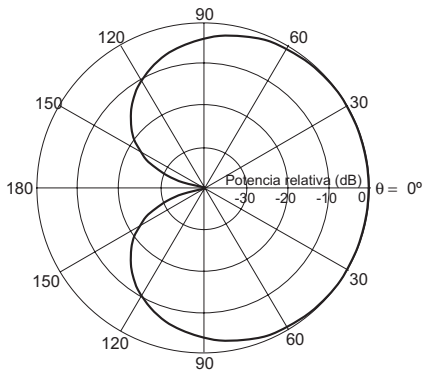


Otro ejemplo de aplicación de las agrupaciones de antenas se obtiene con dos dipolos separados λ/4 y alimentados con corrientes de entrada de igual amplitud y en cuadratura de fase. La interferencia de los campos radiados por los dos dipolos da lugar a un diagrama unidireccional, en lugar del diagrama omnidireccional correspondiente a un dipolo aislado. A continuación se muestran los cortes en planos E y H del diagrama de radiación.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



Corte en el plano *E*



Corte en el plano *H*

En este capítulo se demostrará que es posible sintetizar diagramas arbitrarios de radiación con ayuda de una agrupación de antenas: puede obtenerse una distribución de corrientes discreta que corresponda a muestras de una cierta distribución de corriente continua. El diagrama de radiación resultante será igual al deseado, más un cierto solapamiento entre periodos (*aliasing*) debido al muestreo.

Las agrupaciones de antenas se utilizan en multitud de aplicaciones que precisan la síntesis de un diagrama con especificaciones muy precisas de directividad, ancho de haz o nivel de lóbulo principal a secundario y, además, permiten variar electrónicamente la forma del diagrama de radiación modificando la amplitud y la fase de las alimentaciones de las antenas básicas (agrupaciones de barrido electrónico o *phased-arrays*).

5.2 Campos radiados por agrupaciones

Se define una agrupación como un conjunto de N antenas iguales que radian o reciben simultáneamente. El diagrama de radiación del conjunto se obtiene como la interferencia de los campos radiados por cada una de las antenas, mientras que en recepción la señal recibida es una combinación lineal de las señales que capta cada antena. Por reciprocidad, si los pesos y desfases de la combinación lineal en recepción son iguales a los de la alimentación en transmisión, los diagramas de radiación en transmisión y recepción son iguales.

En este apartado se van a considerar únicamente las agrupaciones lineales rectilíneas con espaciado constante entre las antenas. A continuación se obtendrá el diagrama de radiación del conjunto a partir de la transformada de Fourier de la distribución de corrientes, y se comprobará que coincide con la interferencia de los campos radiados por los elementos de la agrupación.

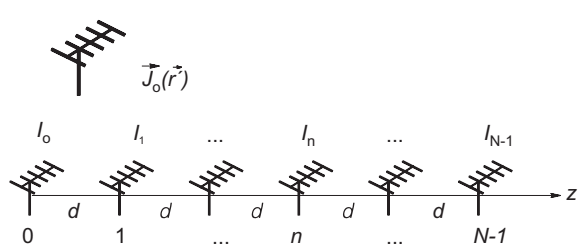


Fig. 5.1 Distribución de corrientes en una agrupación lineal sobre el eje z

Sean N antenas iguales equiespaciadas una distancia d sobre el eje z, situadas en las posiciones $z'_n = nd$ y alimentadas con corrientes I_n, donde $n = 0, 1, ..., N\text{-}1$ (Fig. 5.1).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si la distribución de corrientes con fasor de alimentación unitario sobre la antena básica situada en $z = 0$ es $\vec{J}_0(\vec{r}')$, y si cada antena se excita con un fasor de corriente I_n, la distribución de corrientes sobre el conjunto de la agrupación puede escribirse como

$$\vec{J}(\vec{r}') = \sum_{n=0}^{N-1} I_n \, \vec{J}_0(\vec{r}' - n\,d\,\hat{z})$$

Expresando el sumatorio anterior como la convolución de la corriente en la antena básica con un tren de funciones delta de pesos I_n, equivalente a la secuencia discreta $I(n)$, tenemos

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}_0(\vec{r}') * \sum_{n=0}^{N-1} I_n \, \delta(\vec{r}' - n\,d\,\hat{z}) = \vec{J}_0(\vec{r}') * I(n)$$

El vector de radiación es la transformada de Fourier tridimensional de la distribución de corrientes. Aplicando el teorema de convolución a la ecuación anterior resulta

$$\vec{N}(\hat{r}) = TF_{3D}\left[\vec{J}(\vec{r}')\right] = \vec{N}_0(\hat{r}) \cdot TF_{3D}\left[I(n)\right]$$

donde $\vec{N}_0(\hat{r})$ es el vector de radiación de la antena básica situada en el origen, cuando el fasor de alimentación es la unidad.

Como la secuencia unidimensional $I(n)$ es separable, su transformada de Fourier 3-D es el producto de transformadas en cada dirección

$$TF_{3D}\left[I(n)\right] = TF_x\left[I(n)\right] \cdot TF_y\left[I(n)\right] \cdot TF_z\left[I(n)\right] = 1 \cdot 1 \cdot TF_z\left[I(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} I_n \, e^{j\omega_z n}$$

La frecuencia digital ω_z en la dirección z es el producto de la frecuencia espacial analógica k_z por el periodo de muestreo en la dirección z, que es igual a d

$$\omega_z = k_z \, d = k \, d \cos\theta$$

donde θ es el ángulo respecto al eje de la agrupación (Fig. 5.2). La expresión final para el vector de radiación es

$$\vec{N}(\hat{r}) = \vec{N}_0(\hat{r}) \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jnkd\cos\theta} \tag{5.1}$$

Normalmente los fasores de alimentación I_n presentan una fase progresiva entre cada par de antenas consecutivas, de forma que suele escribirse

$$I_n = a_n \, e^{jn\alpha} \tag{5.2}$$

donde los coeficientes a_n son en general números complejos, que toman valores reales en el caso más habitual en que la fase de la alimentación sea progresiva.

Combinando las dos ecuaciones anteriores resulta, finalmente

$$\vec{N}(\hat{r}) = \vec{N}_0(\hat{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{jn(kd\cos\theta+\alpha)} \tag{5.3}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Del valor del vector de radiación pueden obtenerse, según se ha indicado en el capítulo 3, todas las características de radiación de la antena. Por ejemplo, el campo eléctrico radiado por la agrupación será

$$\vec{E}(\hat{r}) = \vec{E}_0(\hat{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{jn(kd\cos\theta+\alpha)} \tag{5.4}$$

donde $\vec{E}_0(\vec{r})$ es el campo radiado por la antena básica con alimentación unitaria. La ecuación (5.4) puede interpretarse como la interferencia de los campos radiados por cada una de las antenas que componen la agrupación. Para comprobarlo, calculamos primero el potencial vector radiado por una cualquiera de las antenas

$$\vec{A}_n(\vec{r}) = \mu \frac{e^{-jkr_n}}{4\pi r_n} \vec{N}_n(\hat{r}) = \mu \frac{e^{-jkr_0}}{4\pi r_n} \vec{N}_0(\hat{r}) I_n \, e^{-jk(r_n - r_0)} = \vec{A}_0(\vec{r}) I_n \, e^{-jk(r_n - r_0)}$$

expresión que se interpreta como el potencial vector radiado por la antena básica, $\vec{A}_0(\vec{r})$, ponderado con la alimentación I_n y con el desfase por diferencia de caminos $k\,(r_n - r_0)$.

En la figura 5.2 se representa la diferencia de caminos en campo lejano para cada una de las antenas. Puede observarse que, en la hipótesis de rayos paralelos, la diferencia de caminos entre la antena situada en el origen y la *n*-ésima es

$$r_n - r_0 = -n\,d\cos\theta$$

de forma que el potencial vector radiado por toda la agrupación será

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{N-1} \vec{A}_n(\vec{r}) = \vec{A}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} I_n \, e^{jknd\cos\theta}$$

que es equivalente a la expresión (5.1). Para alimentaciones con fase progresiva de la forma (5.2) tenemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{jn(kd\cos\theta+\alpha)}$$

Para simplificar los cálculos, la expresión anterior suele escribirse en función de un ángulo eléctrico ψ

$$\psi = k\,d\cos\theta + \alpha \tag{5.5}$$

que representa la diferencia de fase entre las contribuciones en campo lejano de dos antenas consecutivas. Esta diferencia de fase es igual a la suma del desfase por diferencia de caminos, $kd\cos\theta$, más la fase progresiva de la alimentación α. Utilizando esta notación, la expresión del campo eléctrico radiado por la agrupación es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{jn\psi} \tag{5.6}$$

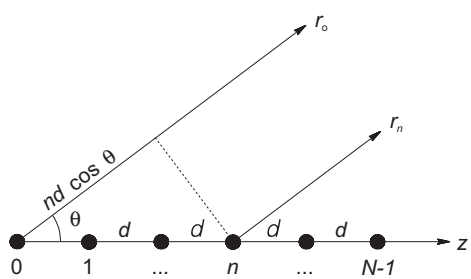


Fig. 5.2 Interferencia de los campos radiados por las antenas de la agrupación

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.3 Diagrama de radiación de agrupaciones

En la ecuación (5.6) puede observarse que el diagrama de campo radiado por la agrupación es igual al producto del diagrama de la antena básica, $\vec{E}_0(\vec{r})$, multiplicado por un factor que tiene en cuenta la interferencia de las N ondas generadas por las N antenas. Este factor depende únicamente de la separación entre los elementos de la agrupación, de la alimentación y de la frecuencia de trabajo, y se denomina *factor de la agrupación* (*FA*)

$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{j n \psi} \tag{5.7}$$

El interés de la expresión (5.6) reside en que el diagrama de radiación depende por separado de la antena básica y del factor de la agrupación. Para estudiar la influencia de los parámetros de la agrupación en el diagrama de radiación, independientemente de la antena básica, se analizará a continuación el factor de la agrupación, que correspondería al diagrama de radiación de una agrupación formada por antenas básicas isótropas.

5.3.1 Factor de la agrupación

El factor de la agrupación definido en (5.7) y expresado en función del ángulo ψ es una función que depende únicamente de los coeficientes de la alimentación a_n. Para obtener el diagrama de radiación en función de las direcciones del espacio real θ, se sustituye ψ por su valor según (5.5), con lo que se incluye la dependencia con el espaciado, la fase progresiva y la frecuencia de trabajo.

El factor de la agrupación FA(ψ) presenta las siguientes propiedades:

- Es una función periódica del ángulo ψ, de periodo 2π, tal que los coeficientes de su serie de Fourier son los coeficientes de la alimentación a_n.
  Esta propiedad permite sintetizar diagramas de radiación de agrupaciones, pues basta escoger unos coeficientes de la alimentación iguales a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier del factor de la agrupación deseado. La síntesis de agrupaciones se tratará más adelante en este capítulo.
- Por tanto, el factor de la agrupación es la transformada de Fourier de la secuencia discreta de los coeficientes de la alimentación, a_n.
  Ello es coherente con el hecho de que el diagrama de radiación de una antena es la transformada de Fourier de su distribución de corriente, y de que el factor de la agrupación puede interpretarse como el diagrama de radiación de una agrupación de antenas isótropas.
- Si los coeficientes de la alimentación a_n son reales y positivos, el máximo del factor de la agrupación se encuentra en el origen ψ = 0.
  La interpretación física de esta afirmación radica en que el máximo del diagrama se encuentra en la dirección en que los campos radiados por cada antena se suman en fase, la cual corresponde a un desfase nulo (ψ = 0) en la interferencia cuando los coeficientes a_n son reales y positivos.

$$FA(\psi) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{jn\psi} \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{N-1} a_n = FA(0) \qquad \text{si } a_n \in \Re^+$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

- Como el ángulo θ, que indica la dirección de radiación en el espacio, sólo toma valores reales entre 0 y π, los cuales según (5.5) corresponden a un intervalo de variación de ψ

$$\psi \in [-k\,d + \alpha\,,\, k\,d + \alpha] \tag{5.8}$$

resulta que solamente la parte de FA(ψ) comprendida en el intervalo (5.8) pertenece al diagrama de radiación. A este intervalo se le llama el *margen visible*.
La longitud del margen visible es 2*kd* y está centrado en ψ = α, de forma que su tamaño es proporcional al espaciado de la agrupación, normalizado con respecto a la longitud de onda, y su posición en el eje ψ varía con la fase progresiva.

- Para coeficientes de alimentación reales y positivos, cuando el margen visible incluye el origen ψ = 0, según (5.8) $|\alpha| \le kd$, el máximo del diagrama de radiación se encuentra en la dirección del espacio

$$\psi = k\,d\cos\theta_{máx} + \alpha = 0$$
$$\theta_{máx} = \arccos\left(-\frac{\alpha}{k\,d}\right), \quad |\alpha| \le k\,d \tag{5.9}$$

Según (5.9), puede controlarse la dirección del máximo de radiación variando la fase progresiva α. Ello es debido al hecho de que una fase lineal en las corrientes provoca un desplazamiento en su transformada de Fourier, que es el diagrama de radiación.
Este es el principio de funcionamiento de las agrupaciones con barrido de fase (*phased arrays*), en las que la dirección del máximo se varía de forma electrónica mediante un control -por medios analógicos o digitales- de la fase progresiva. Este tipo de agrupaciones tiene aplicaciones importantes en radar y comunicaciones.

- Como el factor de la agrupación es periódico con periodo 2π, si el máximo está en $\psi_{máx}$ existen máximos periódicos en los múltiplos enteros de 2π, $\psi = 2m\pi + \psi_{máx}$. Cuando estos máximos periódicos se encuentran dentro del margen visible, si $k\,d + \alpha \ge 2\pi$ o si $-k\,d + \alpha \le 2\pi$, aparecen múltiples máximos de radiación en el espacio real, denominados *lóbulos de difracción* (*grating lobes*). Este fenómeno sucede, en general, cuando el espaciado es de una o más longitudes de onda, si bien en ciertos casos (por ejemplo α = π) pueden aparecer para espaciados comprendidos entre λ/2 y λ.

5.3.2 Representación gráfica del factor de la agrupación

A partir de la gráfica de FA(ψ) en coordenadas cartesianas, puede obtenerse el factor de la agrupación en el espacio real FA(θ) en coordenadas polares con el método gráfico de la figura 5.3.

Para ello se realiza el cambio de variable ψ = *kd*cosθ + α con ayuda de un círculo de radio *kd* centrado en ψ = α. Las direcciones del espacio real θ se representan sobre este círculo en coordenadas polares. La proyección de un punto de la circunferencia sobre el eje horizontal dista del centro del círculo *kd*cosθ. Como la circunferencia está centrada en ψ = α, la proyección de un punto de la circunferencia dista del origen de coordenadas ψ = *kd*cosθ + α, con lo que se realiza el cambio de variable deseado.

El método gráfico se suele llevar a cabo en los siguientes pasos:

1) Representar gráficamente en coordenadas cartesianas |FA(ψ)| para obtener un diagrama de campo, o bien $|FA(\psi)|^2$ para un diagrama de potencia.
2) Trazar bajo la gráfica anterior una circunferencia de radio *kd* centrada en ψ = α.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3) Obtener en primer lugar las direcciones de los nulos. Para ello se trazan rectas verticales desde los nulos de la gráfica superior, en coordenadas cartesianas, hasta su intersección con la circunferencia. Las direcciones de los nulos corresponden a rectas en la gráfica polar desde el centro del círculo hasta la intersección entre las rectas verticales y la circunferencia.
4) Obtener de forma análoga las direcciones de los máximos relativos de cada lóbulo. Marcar sobre estas direcciones la amplitud relativa de los lóbulos, considerando que la amplitud del lóbulo principal es igual al radio de la circunferencia. Este paso se ha omitido, por claridad, en la figura 5.3.

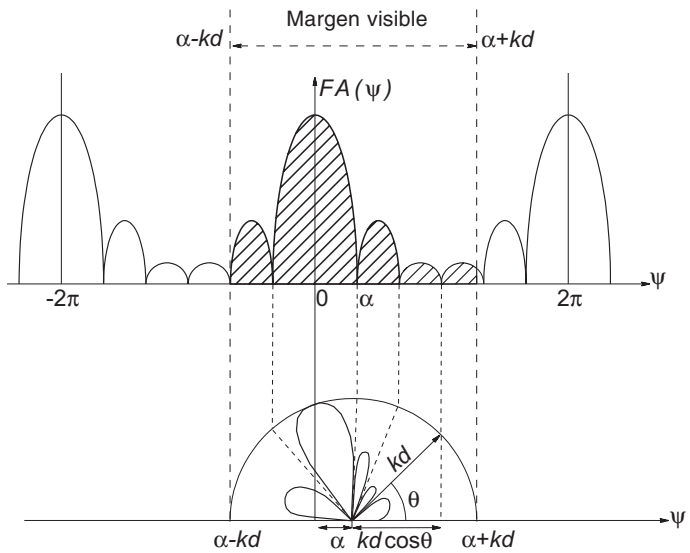


Fig. 5.3 Método gráfico para la representación del factor de la agrupación en el espacio real en coordenadas polares

5) Dibujar los lóbulos en la gráfica polar, de forma aproximada, con ayuda de las rectas que definen las direcciones de los nulos y de los puntos que indican el máximo relativo de cada lóbulo.

No debe olvidarse que el factor de una agrupación lineal sobre el eje *z*, expresado en coordenadas esféricas en el espacio real, depende únicamente del ángulo θ y no de ϕ, por presentar simetría de revolución alrededor del eje *z*, coincidente con el eje de la agrupación. Por este motivo, suele trazarse únicamente el semicírculo superior de la gráfica en coordenadas polares, al ser el semicírculo inferior simétrico.

El método gráfico permite observar fácilmente la variación del diagrama en el espacio real en función de los parámetros de la agrupación. Por ejemplo, la figura 5.4 presenta en coordenadas cartesianas el factor de una agrupación de 4 elementos alimentados con igual amplitud, que se conoce como agrupación uniforme. En la figura 5.5 puede observarse el efecto que produce en el espacio real la variación del espaciado, y en la figura 5.6 la variación de la fase progresiva. Los diagramas de las figuras 5.5 y 5.6 pueden obtenerse a partir de la figura 5.4 utilizando el método gráfico, si se considera que el factor de la agrupación es periódico de periodo 2π.

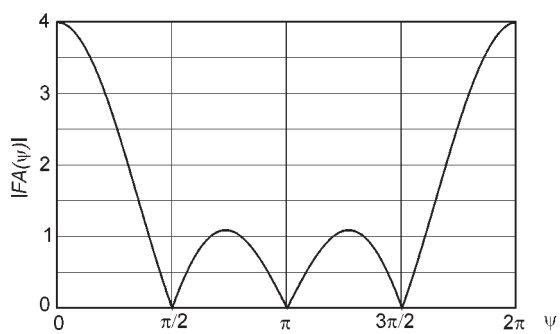


Fig. 5.4 Factor de una agrupación uniforme de 4 elementos

Del análisis realizado en las figuras 5.5 y 5.6 pueden extraerse unas primeras conclusiones:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

- Si aumenta el espaciado normalizado con la longitud de onda, d/λ, aumenta el margen visible $2kd$ y por tanto el tamaño del círculo, con lo que aparece un mayor número de lóbulos (más estrechos) en el diagrama de radiación (Fig. 5.5). Si el espaciado aumenta suficientemente para que los máximos periódicos entren en el margen visible, aparecen lóbulos de difracción. En general, un aumento del espaciado o de la frecuencia implica un mayor número de lóbulos secundarios y un menor ancho de haz, pero no modifica el nivel de lóbulo principal a secundario.

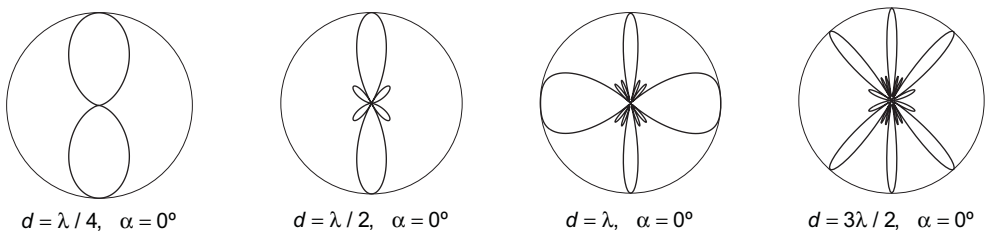


Fig. 5.5 Diagrama en coordenadas polares de una agrupación uniforme de 4 elementos con fase progresiva nula para distintos espaciados. Obsérvese que para $d \geq \lambda$ aparecen lóbulos de difracción

- Si varía la fase progresiva α, se desplaza el círculo sobre el eje ψ, de forma que el diagrama en el espacio real, en coordenadas polares, rota alrededor del centro del círculo, lo cual produce un desplazamiento de la dirección del máximo de radiación (Fig. 5.6). En general, una fase progresiva positiva desplaza el lóbulo principal hacia la izquierda de la perpendicular ($90º < \theta_{máx} < 180º$) y una fase negativa hacia la derecha ($0º < \theta_{máx} < 90º$).

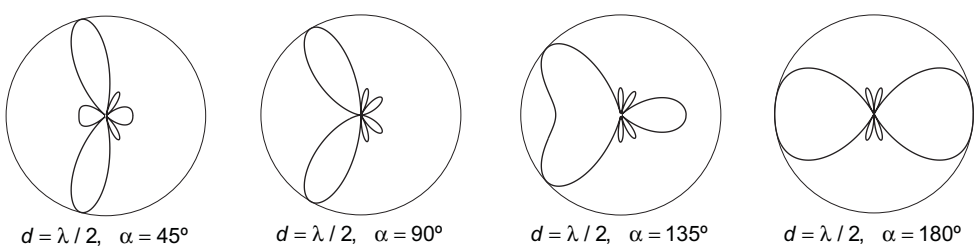


Fig. 5.6 Variación del diagrama de radiación al aumentar la fase progresiva, para una agrupación uniforme de 4 elementos con espaciado d=0,5λ. Obsérvese el desplazamiento y el ensanchamiento del haz principal

- El cambio de variable (5.5) distorsiona el ancho de los lóbulos de la siguiente forma: a igualdad de ancho en el eje ψ, los lóbulos en direcciones próximas al plano perpendicular al eje de la agrupación, $\theta = 90º$, son más estrechos que los lóbulos en direcciones próximas al eje, $\theta = 0º$, (Fig. 5.6).
- Como resumen de los puntos anteriores, puede observarse que para una fase progresiva nula, $\alpha = 0$, el máximo se encuentra en la dirección transversal, mientras que para $\alpha = \pm kd$ está en la del eje. Ello puede comprobarse fácilmente mediante la expresión (5.9). Al aumentar la fase progresiva, el máximo se desplaza de la dirección transversal hacia el eje y el ancho de haz aumenta de forma muy apreciable.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.3.3 Diagrama de una agrupación de dos elementos

Un caso particular de agrupación lineal es el doblete o agrupación de dos elementos. El estudio de la interferencia de dos fuentes radiantes presenta gran importancia tanto para el caso de radiación electromagnética (antenas) como acústica (altavoces, sonar, etc.).

Si los fasores de alimentación de las fuentes radiantes son $a_0 = 1$ y $a_1 = A$, el factor de la agrupación será, según (5.7)

$$\left|FA\left(\psi\right)\right| = \left|1 + A\,e^{j\,\psi}\right| = \left|1 + A^2 + 2\,A\cos\psi\right|^{\frac{1}{2}}$$

que en el caso más habitual en el que las dos fuentes radian con igual amplitud, $A = 1$, se simplifica a

$$\left|FA\left(\psi\right)\right| = 2\left|\cos\frac{\psi}{2}\right| = 2\left|\cos\frac{k\,d\cos\theta + \alpha}{2}\right| \tag{5.10}$$

La figura 5.7 muestra el factor de la agrupación en función de ψ en coordenadas cartesianas, mientras que la figura 5.8 presenta los diagramas de radiación en el espacio real para varios casos típicos de espaciado y fase progresiva.

En la ecuación (5.10) y en la figura 5.8 puede observarse que las interferencias constructivas (en fase) o máximos de radiación se producen para $\psi = 0$ o un número entero de 2π radianes, lo cual implica direcciones en el espacio real (Fig. 5.8)

$$\theta_{máx} = \arccos\left(\frac{2\,m\,\pi - \alpha}{k\,d}\right)$$

mientras que las interferencias destructivas (en contrafase) o nulos de radiación se producen para ψ igual a un número impar de π radianes, es decir,

$$\theta_{cero} = \arccos\left(\frac{(2\,m+1)\,\pi - \alpha}{k\,d}\right)$$

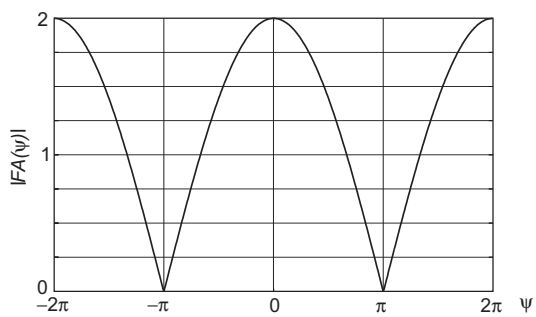


Fig. 5.7 Factor de una agrupación uniforme de 2 elementos

El diagrama que aparece con $d = \lambda/4$ y $\alpha = 90^\circ$, es de tipo unidireccional: radia en la dirección del eje de la agrupación únicamente en un sentido ($\theta = 180^\circ$), y presenta un nulo en el sentido contrario ($\theta = 0^\circ$).

5.3.4 Polinomio de la agrupación

Hemos visto el concepto de factor de la agrupación FA(ψ), que se interpreta matemáticamente como la transformada de Fourier de la secuencia de alimentaciones a_n. Análogamente se define el *polinomio de la agrupación* P(z) como la transformada Z de dicha secuencia

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n\,z^n = a_0 + a_1\,z + a_2\,z^2 + \ldots + a_{N-1}\,z^{N-1} \tag{5.11}$$

donde z es una variable compleja.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

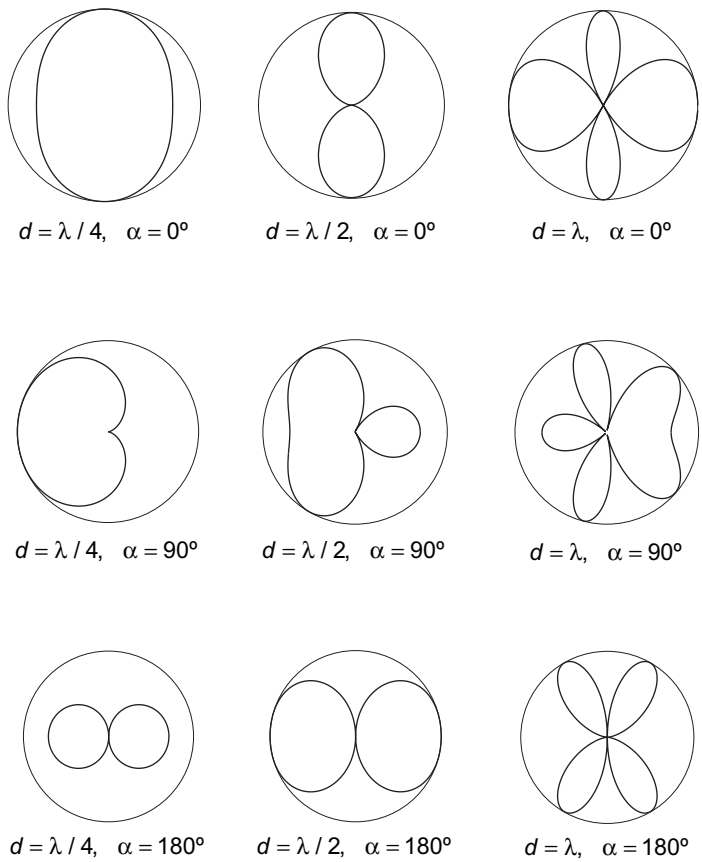


Fig. 5.8 Diagramas de radiación de una agrupación uniforme de dos elementos, para distintos espaciados y desfases

Obsérvese que la transformada Z se ha definido en (5.11) con signo cambiado respecto a la notación habitual en teoría de la señal, de forma similar a como ha ocurrido para la transformada de Fourier. De las ecuaciones (5.7) y (5.11) se deduce que

$$FA(\psi) = P(z)\Big|_{z=e^{j\psi}} \qquad (5.12)$$

por lo que el factor de una agrupación corresponde al polinomio de la misma muestreado sobre la circunferencia del círculo unidad (a partir de ahora círculo unidad), lo cual es coherente con la relación entre las transformadas de Fourier y Z de una secuencia. Cada periodo 2π en ψ del factor de la agrupación corresponde a una vuelta sobre el círculo unidad en el plano Z.

Como el polinomio de la agrupación se puede factorizar en función de sus ceros z_n, en general complejos, de la forma

$$P(z) \;\; a_{N-1}\prod_{n=1}^{N-1}(z - z_n) \qquad (5.13)$$

podemos obtener el factor de la agrupación en un punto del círculo unidad a partir del producto de las distancias de cada cero del polinomio a este punto (Fig. 5.9).

El diagrama de radiación está asociado al intervalo del círculo unidad definido por el margen visible (5.8). Como los ceros del polinomio que están situados sobre el círculo unidad y dentro del margen visible corresponden a nulos del diagrama de radiación, podemos intuir aproximadamente la forma del diagrama a partir de la situación de los ceros en el plano Z.

Como el polinomio de una agrupación de N elementos tiene N-1 ceros complejos, cuando todos ellos se encuentran sobre el círculo unidad el factor de la agrupación presenta el máximo número posible de ceros en un periodo 2π. Como ésta es la situación más habitual, en general se considera que una agrupación de N antenas presenta N-1 ceros, de los cuales sólo los que se encuentren dentro del margen visible corresponden a nulos del diagrama de radiación. Nótese que, cuando el espaciado es mayor que $\lambda/2$, el margen visible es mayor que 2π y al cubrir un intervalo del factor de la agrupación mayor que un periodo pueden aparecer más de N-1 nulos en el diagrama del espacio real.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.4 Distribuciones de corrientes típicas

A continuación se analizará el factor de la agrupación correspondiente a algunas distribuciones de corrientes típicas: uniforme, triangular y binómica. Si bien éstas no son las únicas distribuciones utilizadas en la práctica, la uniforme y la binómica son casos extremos con características opuestas, mientras que la triangular es un caso con características intermedias. Por ello, el conocimiento del diagrama en estos casos típicos permite deducir fácilmente las características del diagrama asociado a otras distribuciones. Finalmente, se considerará el análisis de ciertas alimentaciones que pueden descomponerse en suma o convolución de distribuciones conocidas.

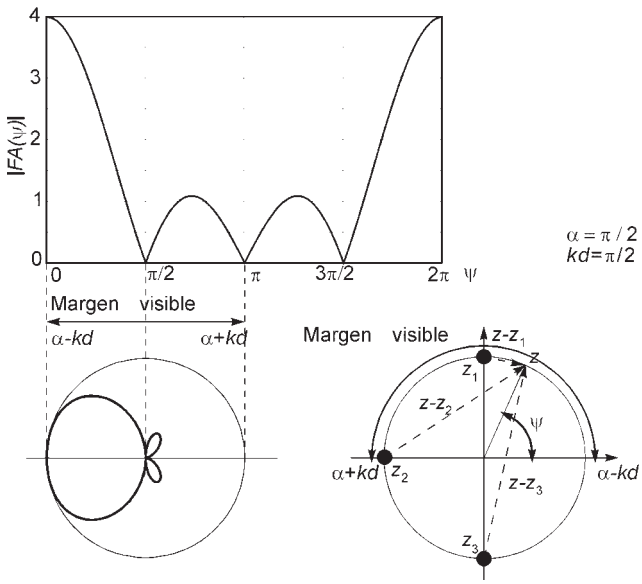


Fig. 5.9 Agrupación uniforme de 4 elementos. Ceros del polinomio P(z), factor de la agrupación en el círculo unidad FA(ψ) y diagrama de radiación en el espacio real

5.4.1 Uniforme

La distribución uniforme es aquella en la que se alimentan todas las antenas con igual amplitud. Es, por su sencillez, una de las más utilizadas en la práctica. El polinomio de la agrupación es

$$a_n = 1$$

$$P(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{N-1} = \frac{z^N - 1}{z - 1}$$

donde se ha utilizado la fórmula de la suma de una progresión geométrica. De la expresión anterior se deduce que los ceros del polinomio en el plano Z son las raíces *N*-ésimas de la unidad, salvo $z = 1$, y por tanto se encuentran equiespaciados sobre el círculo unidad (Figs. 5.9 y 5.10). Lógicamente, el número de ceros del polinomio es uno menos que el número de raíces *N*-ésimas de la unidad y, por tanto, *N*-1.

$$P(z_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_c = \sqrt[N]{1}, \; z_c \neq 1$$

$$\psi_{c_n} = n\frac{2\pi}{N}, \quad n = 1, 2, \ldots N-1$$

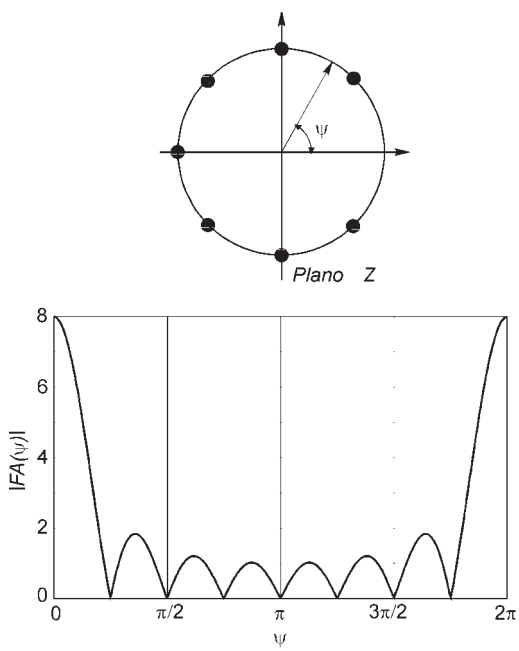


Fig. 5.10 Ceros en el plano *Z* de una agrupación uniforme de 8 elementos y módulo del factor de agrupación correspondiente

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Como las raíces *N*-ésimas de la unidad se encuentran equiespaciadas sobre el círculo unidad en el plano Z, el ancho del haz principal entre ceros en ψ es

$$\Delta\psi_c = \frac{4\pi}{N}$$

Nótese que, como sucede con las antenas continuas, el ancho de haz es inversamente proporcional al número de elementos, y, al transformar al espacio real (5.5), a la longitud de la distribución de corrientes.

El factor de la agrupación se obtiene según la ecuación (5.12) particularizando el polinomio P(z) sobre el círculo unidad

$$\left|FA(\psi)\right| = \frac{\left|e^{jN\psi} - 1\right|}{\left|e^{j\psi} - 1\right|} = \frac{\left|\operatorname{sen} N\frac{\psi}{2}\right|}{\left|\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}\right|} \tag{5.14}$$

Obsérvese que el factor de la agrupación uniforme es una función sinc periódica, igual a la transformada de Fourier discreta de un pulso muestreado. Corresponde a la función sinc, transformada de Fourier de un pulso continuo, repetida con periodo 2π y sumando en cada punto los infinitos *alias* o colas de todas las funciones sinc. La principal diferencia entre ambas funciones reside en que, debido al solapamiento, en la sinc periódica los lóbulos secundarios no decaen de forma inversa a la distancia, sino que para *N* impar el último lóbulo secundario en ψ = π vale siempre 1, mientras que existe un nulo si *N* es par. Solamente cuando el número de antenas es elevado, las dos funciones son similares en la zona del lóbulo principal y primeros lóbulos secundarios, con lo que en esta zona podría aproximarse el factor de una agrupación uniforme por una función sinc.

El factor de la agrupación en el origen vale FA(0) = *N*. Como los coeficientes de alimentación a_n son reales y positivos, el máximo está en el origen, y corresponde al lóbulo principal si entra dentro del margen visible. El valor FA(0) = *N* para el lóbulo principal se interpreta como la suma en fase de los campos radiados por cada una de las *N* antenas, pues el campo total es el campo radiado por la antena básica multiplicado por el valor del factor de agrupación, igual a *N*.

Como el primer lóbulo secundario está situado aproximadamente en $\psi = \frac{3}{2}\frac{2\pi}{N} = \frac{3\pi}{N}$, el nivel de lóbulo principal a secundario es

$$FA(0) = N; \qquad \left|FA\left(\frac{3\pi}{N}\right)\right| \approx \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|}; \qquad NLPS \approx N\left|\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|$$

y para un número elevado de antenas vale

$$\underset{N\to\infty}{NLPS} = \frac{1}{0{,}217} = 13{,}2 \text{ dB}$$

que es el *NLPS* de la transformada de Fourier de un pulso continuo y no depende del número de antenas.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.4.2 Triangular

La distribución de corrientes triangular se define para un número impar de antenas

$$a_n = \begin{cases} n+1 & n < \dfrac{N}{2} \\ N-n & n > \dfrac{N}{2} \end{cases}$$

$$P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + 3z^{N-3} + 2z^{N-2} + z^{N-1}$$

Si tenemos en cuenta que la función triangular puede descomponerse en la convolución de dos pulsos iguales de longitud mitad que la del triángulo, lo cual se traduce en un producto de transformadas en el dominio espectral (plano Z), el polinomio de una distribución triangular es igual al de una uniforme de (*N*+1)/2 antenas elevado al cuadrado

$$P(z)\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} z^n\right]^2 = \left[\frac{z^{\frac{N+1}{2}} - 1}{z-1}\right]^2$$

Por tanto, los ceros de la distribución triangular son los de la uniforme de (*N*+1)/2 antenas, pero dobles (ver la figura 5.11 para la triangular de *N* = 7 y la figura 5.9 para la uniforme de *N* = 4). Hay, por tanto, (*N*-1)/2 raíces dobles. El ancho de haz principal entre ceros es el que corresponde a una agrupación uniforme de (*N*+1)/2 antenas

$$\Delta\psi_c = \frac{8\pi}{N+1}$$

y, por tanto, es aproximadamente el doble que el de una distribución uniforme del mismo número de antenas *N*.

El factor de la agrupación triangular es también el de la uniforme de longitud (*N*+1)/2 elevado al cuadrado

$$\left|FA(\psi)\right| = \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\dfrac{N+1}{4}\psi\right)\right|^2}{\left|\operatorname{sen}\dfrac{\psi}{2}\right|^2}$$

En la figura 5.11 puede apreciarse que, por ser los ceros dobles, el factor de la agrupación es tangente al eje de abscisas en los ceros y los nulos de radiación son más anchos que los de la distribución uniforme.

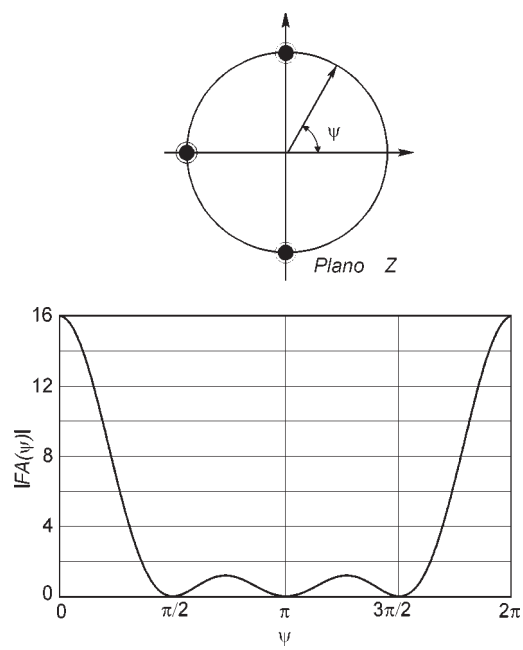


Fig. 5.11 Ceros en el plano *Z* de una agrupación triangular de 7 elementos y módulo del factor de agrupación

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El valor del factor de la agrupación en el origen (máximo de radiación) es igual a la suma en fase de los pesos a_n de todas las antenas, y vale

$$FA(0) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

Como el primer lóbulo secundario se encuentra en $\frac{3}{2}\frac{4\pi}{N+1}$, el nivel de lóbulo principal a secundario es

$$NLPS \approx \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \left|\text{sen}\left(\frac{3\pi}{N+1}\right)\right|^2$$

$$\underset{N\to\infty}{NLPS} = \left(\frac{1}{0{,}217}\right)^2 = 26{,}4 \text{ dB}$$

Obsérvese que el nivel de lóbulo principal a secundario es el doble, expresado en dB, que el de la distribución uniforme, independientemente del número de antenas si éste es grande.

Una característica de las distribuciones triangulares, tal como se han definido en este apartado, reside en que el número de antenas debe ser impar. Esta restricción puede eliminarse si se define la distribución triangular de N (par) antenas como la convolución de dos uniformes de $N/2$ y $(N/2)+1$ antenas. La expresión general de los coeficientes a_n es la misma que para N impar

$$a_n = \begin{cases} n+1 & n < \frac{N}{2} \\ N-n & n \geq \frac{N}{2} \end{cases}$$

pero ahora el polinomio tiene la forma

$$P(z) = 1 + 2z + \ldots + \frac{N}{2} z^{\frac{N}{2}-1} + \frac{N}{2} z^{\frac{N}{2}} + \ldots + 2z^{N-2} + z^{N-1} = \left[\frac{z^{\frac{N}{2}} - 1}{z-1}\right]\left[\frac{z^{\frac{N}{2}+1} - 1}{z-1}\right]$$

La diferencia principal en el factor de la agrupación respecto al caso con N impar es debida a que, al tener las dos agrupaciones uniformes distinto número de antenas, la posición de los ceros de ambas agrupaciones no coincide exactamente, aunque la diferencia es pequeña si N es grande. Ello implica que los ceros de la agrupación triangular con número par de antenas no son dobles, sino que se agrupan por parejas de ceros simples muy próximos.

5.4.3 Binómica

La distribución de corrientes binómica toma su nombre al definir el polinomio como un binomio elevado a una potencia y desarrollarlo según la fórmula de Newton, con el resultado

$$P(z) = (z+1)^{N-1} = \binom{N-1}{0} + \binom{N-1}{1} z + \binom{N-1}{2} z^2 + \ldots + \binom{N-1}{N-1} z^{N-1}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Los coeficientes del polinomio pueden obtenerse a través de la expresión de los números combinatorios

$$a_n = \binom{N-1}{n} = \frac{(N-1)!}{n!(N-1-n)!}$$

o bien con ayuda del triángulo de Tartaglia.

El polinomio de la distribución binómica sólo presenta un cero, situado en $\psi = \pi$, pero con multiplicidad N-1 (Fig. 5.12). Por tanto, el ancho de haz entre ceros en ψ es 2π y no existen lóbulos secundarios. Sin embargo, en el diagrama de radiación del espacio real puede aparecer un lóbulo debido a un lóbulo principal periódico (o lóbulo de difracción) que entra en el margen visible. Si la amplitud de este lóbulo es inferior a la del principal, puede definirse en este caso un nivel de lóbulo principal a secundario.

El factor de la agrupación se obtiene sustituyendo (5.12) en el polinomio P(z), y resulta

$$\left|FA(\psi)\right| = \left|2\cos\frac{\psi}{2}\right|^{N-1}$$

cuya gráfica para $N = 8$ se presenta en la figura 5.12. Obsérvese que el valor en el origen, o máximo de radiación, es $FA(0) = 2^{N-1}$.

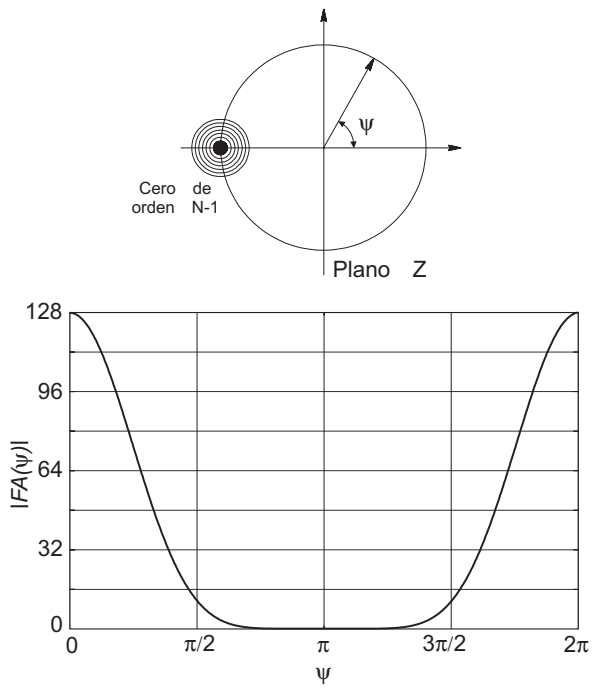


Fig. 5.12 Ceros en el plano Z de una agrupación binómica de 8 elementos y módulo del factor de agrupación

5.4.4 Comparación de características

Como resumen del análisis realizado para las distribuciones uniforme, triangular y binómica, pueden resaltarse en primer lugar los siguientes aspectos. Más adelante, tras el estudio de la directividad de agrupaciones, se justificarán cualitativamente estas afirmaciones y se indicarán los criterios para conocer la forma del diagrama de otras alimentaciones.

- A igualdad de máximo de la distribución de corrientes, la uniforme es la que radia el mayor campo en la dirección del haz principal, mientras que la que radia el menor campo es la binómica.
- La distribución uniforme presenta el mínimo ancho de haz. El de la triangular es aproximadamente doble que el de la uniforme (en ψ) y el de la binómica mucho mayor.
- La distribución uniforme presenta el peor nivel de lóbulo principal a secundario. El de la triangular es el doble en escala logarítmica (dB) que el de la uniforme para un número grande de antenas. La distribución binómica sólo tiene haz principal, aunque en el espacio real pueden aparecer lóbulos de difracción asociados a un lóbulo principal periódico.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.4.5 Descomposición en suma o convolución

Algunas distribuciones de corrientes, cuyo factor de la agrupación no es directamente conocido, pueden descomponerse en suma o convolución de distribuciones conocidas. Por ejemplo, una situación típica es la descomposición de una distribución triangular sobre pedestal en la suma de una triangular y una uniforme, o bien la descomposición en convolución de distribuciones de una agrupación lineal cuya antena básica es a su vez otra agrupación lineal en la misma dirección.

Como el factor de la agrupación y el polinomio son respectivamente las transformadas de Fourier y Z de los coeficientes de la alimentación, por linealidad de dichas transformadas la descomposición en suma de distribuciones es

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n_1} + a_{n_2} \\ FA(\psi) &= FA_1(\psi) + FA_2(\psi) \\ P(z) &= P_1(z) + P_2(z) \end{aligned}$$

mientras que para la descomposición en convolución tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n_1} * a_{n_2} \\ FA(\psi) &= FA_1(\psi) \cdot FA_2(\psi) \\ P(z) &= P_1(z) \cdot P_2(z) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1 Se desea analizar una agrupación uniforme de 9 elementos excitados en fase y espaciados $\lambda/2$, en la que por un fallo de montaje se ha desconectado el elemento central. Obtener:

1) los ceros en el plano Z;
2) la expresión y las gráficas del factor de la agrupación: FA(ψ) en cartesianas y FA(θ) en polares;
3) el nivel de lóbulo principal a secundario;

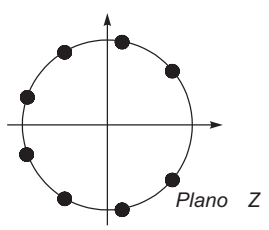
para los siguientes casos:

a) *La agrupación uniforme de 9 elementos antes de desconectar el elemento central.*

1) Los ceros de la agrupación uniforme son las raíces *N*-ésimas de la unidad, salvo z = 1, y por tanto se encuentran sobre el círculo unidad separados $\psi = 2\pi/N = 40^\circ$;

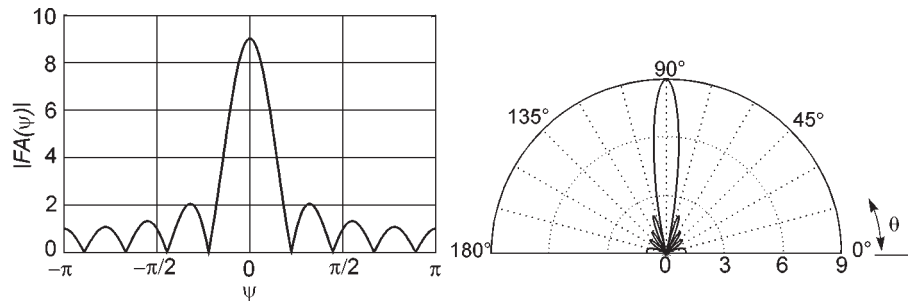
2) Para una agrupación uniforme de 9 elementos el factor de la agrupación es

$$\left|FA(\psi)\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} N\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} 9\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}}\right|$$



Su representación gráfica puede obtenerse a partir de la posición de los ceros, cada 40º, teniendo en cuenta que el máximo es FA(0) = 9.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



3) El nivel de lóbulo principal a secundario de una agrupación uniforme de 9 elementos es

$$NLPS \approx N\left|\text{sen}\frac{3\pi}{2N}\right| = 4{,}5 = 13\ \text{dB}$$

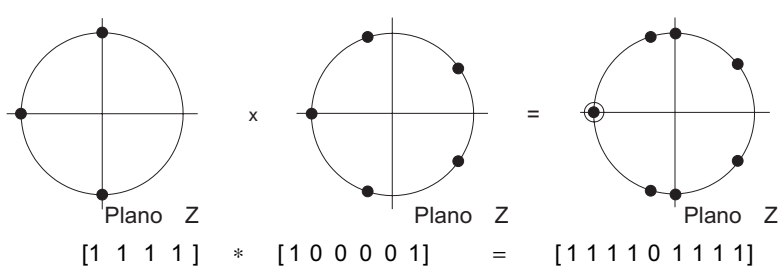
valor que es ligeramente inferior al NLPS de una distribución uniforme continua (13,2 dB).

b) La agrupación con el elemento central desconectado.

La distribución de corrientes a_{n_1} =[1 1 1 1 0 1 1 1 1] puede descomponerse en:

- La convolución de las secuencias a_{n_2} = [1 1 1 1] y a_{n_3} =[1 0 0 0 0 1]
- La suma de las secuencias $a_{n_4} = \left[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\right]$ y $a_{n_5} = \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\right]$

1) Como el polinomio de a_{n_1} es el producto de los de a_{n_2} y a_{n_3} , $P_1(z) = P_2(z)\cdot P_3(z)$, los ceros de $P_1(z)$ son los de $P_2(z)$ junto con los de $P_3(z)$. Los ceros de $P_2(z)$ son los de una distribución uniforme de 4 elementos, mientras que los de $P_3(z) = 1+z^5$ son las raíces quintas de -1, simétricas, respecto del origen, de las raíces quintas de la unidad



2) La expresión del factor de la agrupación puede obtenerse a partir de la descomposición en suma o en convolución.

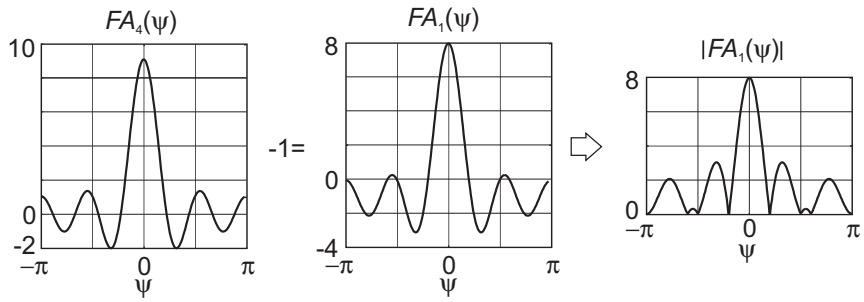
Para la descomposición en suma tomamos el origen de coordenadas en el centro de la agrupación, con objeto de evitar la fase lineal que aparece en la transformada de Fourier de un pulso no centrado en el origen. En la ecuación (5.14) se ha evitado esta fase lineal tomando el módulo del factor de la agrupación. Sin embargo, para la descomposición en suma no pueden utilizarse los módulos de los factores de la agrupación, pues el módulo de la suma no es la suma de módulos. Con el origen en

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

el centro se soluciona este problema: el factor de la agrupación es directamente igual a la función sinc periódica, sin fase lineal

$$FA_1(\psi) = FA_4(\psi) + FA_5(\psi) = \frac{\operatorname{sen} 9\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} - 1$$

La gráfica del factor de la agrupación se obtiene restando uno del factor de la agrupación uniforme de nueve elementos (representado sin extraer el módulo para realizar la resta correctamente).

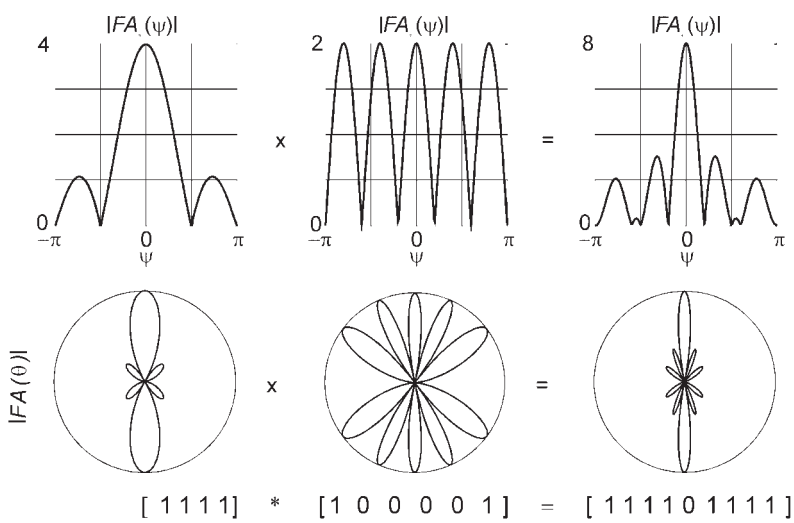


[1 1 1 1 1 1 1 1 1] − [0 0 0 0 1 0 0 0 0] = [1 1 1 1 0 1 1 1 1]

Para la descomposición en convolución no es necesario el desplazamiento del origen (pues el módulo del producto es el producto de módulos)

$$\left|FA_1(\psi)\right| = \left|FA_2(\psi)\right| \cdot \left|FA_3(\psi)\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} 4\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}}\right| \left|2\cos 5\frac{\psi}{2}\right|$$

La gráfica del módulo del factor de la agrupación puede obtenerse también mediante el producto de los módulos de $FA_2(\psi)$ y $FA_3(\psi)$



[1 1 1 1] * [1 0 0 0 0 1] = [1 1 1 1 0 1 1 1 1]

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3) El nivel de lóbulo principal a secundario puede obtenerse a partir de la gráfica del factor de la agrupación con descomposición en suma: el máximo es 8 y el valor del primer lóbulo secundario es igual al primer lóbulo de la uniforme de 9 elementos menos 1, es decir,

$$\left.\frac{\operatorname{sen} 9\,\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}}\right|_{\psi=\frac{3}{2}\frac{2\pi}{9}} - 1 = -3$$

y, por tanto, *NLPS* = 8/3 = 8,5 dB.

El efecto que produce sobre el diagrama la desconexión del elemento central se observa en la representación de $FA_1(\psi)$ con descomposición en suma:

-El campo radiado en el máximo disminuye en un factor 8/9.

-El ancho de haz principal entre ceros y a -3 dB disminuye ligeramente.

-El primer lóbulo lateral aumenta apreciablemente, el segundo prácticamente desaparece.

-El lóbulo trasero se transforma en un cero doble.

5.5 Agrupación lineal uniforme

La agrupación lineal uniforme ha sido ampliamente estudiada y utilizada en aplicaciones prácticas. Dada su importancia, en este apartado se proporcionan algunas fórmulas para el cálculo del ancho de haz principal que completan el análisis de la sección 5.4.1.

La fase progresiva que produce un máximo en la dirección $\theta_{máx}$ es, según la ecuación (5.9),

$$\alpha = -k\,d\cos\theta_{\text{máx}}$$

y, por tanto, el desfase eléctrico ψ puede escribirse en la forma

$$\psi = k\,d\,(\cos\theta - \cos\theta_{\text{máx}})$$

Si tenemos en cuenta que los ceros de $FA(\psi)$ adyacentes al máximo están situados en

$$\psi_c = \pm\frac{2\pi}{N}$$

el ancho de haz entre nulos en el espacio real es

$$\Delta\theta_c = \arccos\left(\cos\theta_{máx} - \frac{\lambda}{N\,d}\right) - \arccos\left(\cos\theta_{máx} + \frac{\lambda}{N\,d}\right) \qquad (5.15)$$

expresión que no es válida para el caso $\theta_{máx} = 0$, en el que uno de los ceros que limitan el lóbulo principal queda fuera del margen visible y es el otro cero el que enmarca el haz principal, que es de tipo cónico. Esta fórmula también puede aplicarse a la distribución triangular, pues sus ceros son los de una uniforme de (N+1)/2 elementos.

Para obtener el ancho de haz a -3 dB aproximamos el lóbulo principal de la sinc periódica (factor de una agrupación uniforme) por el de una sinc. Esta aproximación es correcta en el lóbulo principal incluso para valores de N no muy elevados. Como la caída a -3 dB de la función sinc(x) se

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

produce en el argumento $x = \pm 0{,}44\pi$, la caída a -3 dB del factor de una agrupación uniforme (5.14) se produce en

$$\psi_{-3\,\mathrm{dB}} = \pm \frac{0{,}88\,\pi}{N}$$

y el ancho de haz a -3 dB en el espacio real es

$$\Delta\theta_{-3\,\mathrm{dB}} = \arccos\left(\cos\theta_{máx} - 0{,}44\frac{\lambda}{N\,d}\right) - \arccos\left(\cos\theta_{máx} + 0{,}44\frac{\lambda}{N\,d}\right) \qquad (5.16)$$

Nótese que esta expresión tampoco es válida cuando uno de los dos puntos de caída a -3 dB se encuentra fuera del margen visible, como sucede cuando el máximo de radiación está en la dirección axial o próximo a ella.

5.5.1 Agrupaciones transversales y longitudinales

Las expresiones anteriores, obtenidas para direcciones arbitrarias del máximo, se simplifican en los casos particulares en los que el máximo de radiación sea transversal (*broadside*) o longitudinal (*endfire*) respecto al eje de la agrupación.

Agrupación transversal (*broadside*)

La agrupación transversal tiene el máximo de radiación en el plano perpendicular al eje, $\theta_{máx} = 90^\circ$. Ello implica que todos los elementos radian en fase y, por tanto, la fase progresiva es $\alpha = 0^\circ$, suponiendo que los coeficientes de la alimentación sean reales y positivos.

En estas condiciones, el ancho de haz entre nulos se obtiene sustituyendo $\theta_{máx} = 90^\circ$ en (5.15) y operando resulta

$$\Delta\theta_c = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{\lambda}{N\,d}\right) \approx \frac{2\,\lambda}{N\,d} \approx 2\,\frac{\lambda}{L}$$

donde L es la longitud física de la agrupación. Nótese que el ancho de haz es inversamente proporcional al tamaño de la antena, lo que sucede siempre en antenas eléctricamente grandes alimentadas con una distribución de corrientes real y positiva.

El ancho de haz a -3 dB se obtiene a partir de (5.16) y vale

$$\Delta\theta_{-3\,\mathrm{dB}} = 2\,\mathrm{arcsen}\left(0{,}44\frac{\lambda}{N\,d}\right) \approx 0{,}88\,\frac{\lambda}{N\,d} \approx 0{,}88\,\frac{\lambda}{L}$$

Obsérvese que el ancho de haz a -3 dB es ligeramente inferior al inverso de la longitud eléctrica de la antena. En general, las distribuciones de corrientes uniformes o casi uniformes alimentadas en fase poseen esta propiedad, independientemente de su tipo (agrupación, reflector parabólico, lente, etc.). Si la antena no es unidimensional (por ejemplo, una apertura o una agrupación plana), esta regla se aplica por separado al ancho de haz en cada plano, tomando la dimensión de la antena en ese plano.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Agrupación longitudinal (*Endfire*)

Las agrupaciones de tipo longitudinal tienen el máximo de radiación en la dirección del eje de la agrupación, lo cual implica una fase progresiva $\alpha = \pm k\,d$ que cancela el desfase por diferencia de caminos en la dirección del eje y permite una interferencia en fase de los campos radiados por cada antena.

Como uno de los ceros que limitan el lóbulo principal en ψ se encuentra fuera del margen visible, el ancho de haz entre ceros se obtiene como el doble de la distancia en ψ entre el máximo en el eje y el primer nulo de radiación

$$\Delta\theta_c = 4\,\mathrm{arcsen}\sqrt{\frac{\lambda}{2\,N\,d}} \approx \sqrt{8\frac{\lambda}{N\,d}}$$

mientras que el ancho de haz a -3 dB es, análogamente,

$$\Delta\theta_{-3\,\mathrm{dB}} = 4\,\mathrm{arcsen}\sqrt{0{,}22\,\frac{\lambda}{N\,d}} \approx \sqrt{3{,}5\frac{\lambda}{N\,d}}$$

En las expresiones anteriores puede observarse que el ancho de haz es considerablemente mayor que el de las transversales y disminuye más lentamente al aumentar la longitud eléctrica de la agrupación. Sin embargo, como una es unidireccional y la otra es omnidireccional, el ángulo sólido equivalente es menor en la longitudinal, a pesar del mayor ancho de haz y, por tanto, tiene una directividad mayor. Este último aspecto se estudiará con detalle en el apartado siguiente dedicado a la directividad de agrupaciones.

5.6 Directividad de agrupaciones lineales

La directividad de una agrupación de antenas es uno de sus parámetros más importantes, pues proporciona una medida de la capacidad de la agrupación para concentrar el haz principal en una o varias direcciones del espacio. Con objeto de estudiar la mejora de directividad debida a la agrupación, independientemente de la antena básica, se va a considerar que ésta es isótropa.

En este apartado se obtendrá una fórmula general de la directividad en función de los parámetros de la agrupación: distribución de corrientes, espaciado, frecuencia y fase progresiva. Por otra parte, en el Anexo B se presenta un método gráfico para obtener una aproximación lineal de la directividad y el valor exacto de la misma en algunos casos particulares. Esta aproximación lineal de la directividad se utiliza para realizar una estimación del ancho de haz, basada en el concepto de ángulo sólido equivalente.

Finalmente, en ese anexo se estudia exhaustivamente la relación cualitativa entre la distribución de corrientes de una agrupación y su diagrama de radiación y directividad, lo cual permite estimar las características de diversos tipos de alimentaciones. Las conclusiones más relevantes se comentan también al final de este apartado.

5.6.1 Expresión general de la directividad para agrupaciones ordinarias

Consideremos el tipo de agrupación más habitual, en el que las alimentaciones son reales y positivas, de forma que el máximo del factor de la agrupación FA(ψ) se encuentra en el origen, $\psi = 0$, con un desfase progresivo tal que el máximo se encuentre dentro del margen visible.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La directividad en la dirección de máxima radiación está definida como el cociente entre la densidad de potencia por unidad de ángulo sólido radiada en la dirección del máximo y la que produciría una antena isótropa que radiase la misma potencia total (1.9)

$$D = \frac{K_{MÁX}}{P_r / 4\pi}$$

La potencia total radiada es la integral, en coordenadas esféricas, de la intensidad de radiación $K(\theta, \phi)$ en todas las direcciones del espacio

$$P_r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

Con objeto de analizar la mejora de directividad debida a la agrupación, se supone que la antena básica es isótropa, de forma que la intensidad de radiación es igual al factor de la agrupación elevado al cuadrado,

$$K(\theta, \phi) = |FA(\psi)|^2$$

y sustituyendo en la expresión de la directividad, obtenemos

$$D = 4\pi \frac{\left|FA_{MÁX}\right|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |FA(\theta)|^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi} = \frac{2\left|FA_{MÁX}\right|^2}{\int_0^{\pi} |FA(\theta)|^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta}$$

La integral del denominador, que representa la potencia total radiada, se simplifica si se expresa el factor de la agrupación en función del espaciado d y el desfase progresivo α, con el cambio de variable (5.5)

$$\psi = k d \cos\theta + \alpha$$
$$d\psi = -k d \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

de forma que la expresión de la directividad se reduce a

$$D = \frac{2 k d \left|FA_{MÁX}\right|^2}{\int_{\alpha - kd}^{\alpha + kd} |FA(\psi)|^2 \, d\psi} \tag{5.17}$$

Obsérvese que los límites de la integral son los mismos que los del margen visible, por lo que la integración se extiende únicamente sobre el margen visible, que es la parte del factor de la agrupación asociada con el diagrama de radiación en el espacio real.

Sea la integral del módulo al cuadrado del factor de la agrupación en el margen visible

$$I = \frac{1}{k d} \int_{\alpha - kd}^{\alpha + kd} |FA(\psi)|^2 \, d\psi$$

como las alimentaciones de la agrupación a_n son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de FA(ψ), por ser reales se cumple $a_q^* = a_q$, y resulta

$$|FA(\psi)|^2 = FA(\psi) FA^*(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi} \sum_{n=0}^{N-1} a_q e^{-jq\psi}$$

por tanto, el valor de la integral es

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$I = \frac{1}{k\,d}\int_{\alpha-kd}^{\alpha+kd}\sum_{n=0}^{N-1}a_n\,e^{jn\psi}\sum_{q=0}^{N-1}a_q\,e^{-jq\psi}\,d\psi = \frac{1}{k\,d}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}a_n\,a_q\int_{\alpha-kd}^{\alpha+kd}e^{j(n-q)\psi}\,d\psi =$$

$$= \frac{1}{k\,d}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}\frac{a_n\,a_q}{j(n-q)}\left(e^{j(n-q)(\alpha+kd)}-e^{j(n-q)(\alpha-kd)}\right) = 2\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}a_n\,a_q\,e^{j(n-q)\alpha}\,\frac{\operatorname{sen} kd(n-q)}{kd(n-q)}$$

Si en el sumatorio doble agrupamos los términos $a_n a_q$ con $a_q a_n$

$$e^{j(n-q)\alpha}+e^{j(q-n)\alpha} = 2\cos(n-q)\alpha$$

basta sumar sólo para $q > n$, pues incluye el caso $q < n$. Esto no incluye los términos con $n = q$, que valen

$$\lim_{n\to q}a_n\,a_q\,\frac{\operatorname{sen} kd(n-q)}{kd(n-d)}\,e^{j(n-q)\alpha} = a_n^2$$

Sustituyendo en el sumatorio doble resulta

$$I = 2\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2+\sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1}4\,a_n\,a_q\,\frac{\operatorname{sen} kd(n-q)}{kd(n-q)}\cos(n-q)\alpha$$

En el caso de agrupaciones ordinarias, con alimentaciones reales y positivas, para el máximo del factor de agrupación, que se supone dentro del margen visible, se tiene

$$a_n\in\Re^+,\quad a_n\geq 0\quad\Rightarrow\quad FA_{MÁX} = FA(0) = \sum_{n=0}^{N-1}a_n$$

Sustituyendo el numerador y el denominador en la expresión de la directividad (5.17), obtenemos la fórmula general

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2+\sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1}2\,a_n\,a_q\,\frac{\operatorname{sen} kd(n-q)}{kd(n-q)}\cos(n-q)\alpha} \qquad (5.18)$$

que es válida para alimentaciones reales y positivas con el máximo dentro del margen visible

$$a_n\in\Re^+,\quad a_n\geq 0,\quad [\psi = 0]\in[-kd+\alpha, kd+\alpha]\quad\Rightarrow\quad |\alpha|\leq kd$$

La fórmula general (5.18) se simplifica en algunos casos particulares de espaciado o fase progresiva, tomando valores especialmente significativos.

Espaciado igual a un número entero de semilongitudes de onda

Esta situación es especialmente importante, pues son muy habituales las agrupaciones con espaciado igual a media longitud de onda. En general, si el espaciado entre los elementos es un múltiplo entero m de semilongitudes de onda

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$d = m\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad kd = m\pi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} kd(n-q) = 0$$

sustituyendo en (5.18) se obtiene

$$D = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2 \Bigg/ \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 \tag{5.19}$$

Obsérvese en (5.19) que la directividad de todas las agrupaciones con espaciado $m\lambda/2$ depende sólo de la alimentación a_n y del número de elementos, y es independiente de la fase progresiva y, por tanto, de la dirección del máximo de radiación, como se ve en la figura 5.13.

Espaciado infinito

Si el espaciado entre elementos es muy grande en términos de la longitud de onda, $kd \to \infty$, la función sinc de (5.18) tiende a cero y la contribución del doble sumatorio en el denominador se hace nula. Por tanto, la directividad resulta ser la misma que con un espaciado de media longitud de onda

$$D = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2 \Bigg/ \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2$$

Esto significa que al aumentar el espaciado o la frecuencia, es decir, la dimensión eléctrica de la agrupación, la gráfica de la directividad oscila con amplitud decreciente alrededor del valor para un espaciado igual a media longitud de onda, al que tiende en el infinito independientemente de la fase progresiva. La gráfica cruza este valor límite en todos los espaciados múltiplos de media longitud de onda (Fig. 5.13).

El numerador de la expresión de la directividad (5.19), o la densidad de potencia máxima, es proporcional a la suma escalar de amplitudes de campos (interferencia constructiva en el máximo) mientras que el denominador, o la potencia total radiada, lo es a la suma de potencias radiadas por cada elemento. Esto equivale a calcular la potencia total como la suma incoherente de las contribuciones de los N elementos, lo cual concuerda con el hecho de que, al ser el espaciado infinito, la fase de las contribuciones de los distintos elementos en campo lejano varía muy rápidamente con la dirección de observación y su interferencia proporciona un resultado similar a la interferencia de fuentes de ruido aleatorio.

Espaciado mucho menor que la longitud de onda

Cuando $kd \to 0$, también lo hace α, pues para que el máximo se encuentre dentro del margen visible debe ser $|\alpha| \leq kd$. Al sustituir en (5.18) las expresiones asintóticas de la función sinc y el coseno por su valor en el origen, la expresión general de la directividad se simplifica

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{q=n+1}^{N-1} 2\, a_n\, a_q} = 1$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Este resultado implica un diagrama de radiación isótropo, y se explica fácilmente teniendo en cuenta que toda la agrupación se colapsa en una zona del espacio mucho menor que la longitud de onda: el espaciado eléctrico entre las antenas tiende a cero y, por tanto, la interferencia de los campos radiados por todas las antenas es constructiva en todas las direcciones. Esto implica que el diagrama de radiación de la agrupación coincide con el de la antena básica que la forma, que se supone isótropa, y la directividad es la misma en ambos casos.

Agrupación transversal

Para tener el máximo de radiación en el plano perpendicular a la agrupación, el desfase progresivo debe ser $\alpha = 0$ y, sustituyendo en (5.18), la directividad resulta

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1} 2\,a_n a_q \dfrac{\operatorname{sen} kd(n-q)}{kd(n-q)}}$$

En la figura 5.13 puede observarse que la función sinc del denominador produce una oscilación de la directividad al aumentar el espaciado, cuya amplitud es decreciente y tiende al límite (5.19) en el infinito. El valor límite se cruza en los ceros de la función sinc, correspondientes al espaciado $d = m\lambda/2$.

Agrupación longitudinal

Para que el máximo de radiación se encuentre en la dirección del eje de la agrupación, el desfase progresivo debe ser $\alpha = \pm kd$, y sustituyendo la identidad

$$\operatorname{sen} kd(n-q)\cos kd(n-q) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2kd(n-q)$$

en la expresión general de la directividad (5.18), se obtiene

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1} a_n\, a_q \dfrac{\operatorname{sen} 2kd(n-q)}{kd(n-q)}}$$

Obsérvese en la figura 5.13 que, al ser doble el argumento de la función sinc en el caso longitudinal que en el transversal, la variación de la directividad con el producto *kd* tendrá doble frecuencia de oscilación alrededor del valor límite al que tiende para espaciado infinito. Por tanto, si la gráfica de ésta cruza el valor límite cada vez que el espaciado es un múltiplo entero de media longitud de onda, la gráfica de la otra lo hará cada cuarto de longitud de onda.

Otro efecto que puede observarse en la figura 5.13 es que para espaciados pequeños la agrupación longitudinal tiene doble directividad que la transversal. Ello es debido a que el doble sumatorio del

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

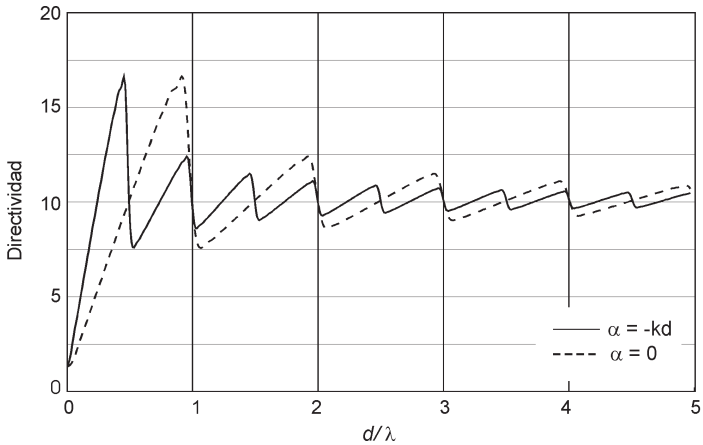


Fig. 5.13 Directividad de agrupaciones uniformes de 10 elementos, transversal y longitudinal

denominador domina sobre Σa_n^2 para espaciados pequeños (menores que λ/2 y no muy próximos a 0) y, al desaparecer el coeficiente 2 en el caso longitudinal, la directividad para pequeños espaciados será aproximadamente doble que en el transversal. Esto es evidente si tenemos en cuenta que la frecuencia de oscilación es doble y, por tanto, también lo es la pendiente de la gráfica en la zona en la que domine el término sinusoidal, es decir, en los pequeños espaciados. Como al espaciado nulo le corresponde una directividad muy pequeña (la unidad), la función es casi lineal y la doble pendiente de la gráfica significará aproximadamente el doble de directividad.

La interpretación física de esta mayor directividad se basa en que se concentra el haz en la dirección del eje (unidireccional), mientras que la transversal lo dispersa en el plano perpendicular (omnidireccional). La directividad deja de crecer cuando aparecen lóbulos de difracción, al aproximarse el espaciado a λ en el caso transversal o λ/2 en el longitudinal. Como el intervalo en que la directividad varía linealmente es doble en un caso que en el otro, y la pendiente es la mitad, resulta que la máxima directividad que se alcanza es aproximadamente igual en ambos casos (Fig. 5.13).

Agrupación uniforme

Dado que todos los coeficientes de alimentación son iguales a la unidad, en (5.18) los términos del sumatorio doble en *n* y *q* dependen sólo de *n-q* y podemos utilizar como índice del sumatorio externo la variable *m* = *n-q* para que el sumatorio interno tenga argumento constante. De esta forma, su valor es igual al número de términos (*N-m*) multiplicado por el término constante. Como la variable *m* = *n-q* varía entre 1 y *N*-1, la expresión de la directividad se transforma en

$$D = \frac{N^2}{N + \sum_{m=1}^{N-1} 2\,(N-m)\,\frac{\operatorname{sen} mkd}{mkd}\cos m\alpha}$$

Cuando el espaciado es media longitud de onda, $kd = \pi$, la directividad es igual al número de elementos, $D = N$. Este resultado coincide con el cuadrado de la suma de las alimentaciones dividido por la suma de los cuadrados, según la ecuación (5.19). En la figura 5.13 se muestran las directividades de sendas agrupaciones uniformes de 10 elementos transversales y longitudinales, en función del espaciado eléctrico *d*/λ.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Agrupación de Hansen-Woodyard

En los apartados anteriores hemos visto que el ancho de haz y la directividad de una agrupación uniforme varían de forma muy importante con la fase progresiva. A pesar de presentar un mayor ancho de haz, el carácter unidireccional de la agrupación longitudinal le proporciona una directividad aproximadamente doble que la de la agrupación transversal.

La directividad de la agrupación longitudinal anterior, que denominaremos ordinaria, puede mejorarse considerablemente si se escoge una fase progresiva que reduzca apreciablemente el ancho de haz y no disminuya mucho el campo máximo radiado. Ello puede conseguirse desplazando el límite derecho del margen visible hacia la izquierda, hasta aproximadamente la mitad del lóbulo principal, como se indica en la figura 5.14. Con este método, se reduce el ancho de haz en ψ y la potencia total radiada a la mitad, con una disminución del máximo de radiación en el margen visible. El resultado es que la directividad aumenta hasta algo menos del doble que la de la longitudinal ordinaria.

En 1938 Hansen y Woodyard calcularon el valor exacto de la fase progresiva que maximiza en (5.18) la directividad de la agrupación uniforme, y obtuvieron

$$\alpha = -kd - \frac{2{,}94}{N} \approx -kd - \frac{\pi}{N}$$

lo que significa que el límite derecho del margen visible se encuentra en $\psi \approx -\pi/N$, aproximadamente en la mitad del lóbulo principal. Cuando la fase progresiva toma este valor se dice que se cumple la *condición de Hansen-Woodyard*.

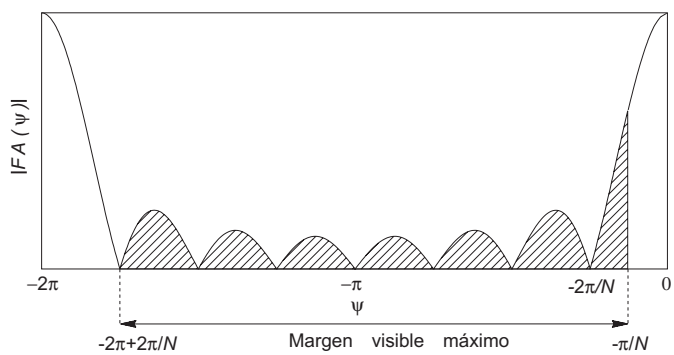


Fig. 5.14 Factor y margen visible de la agrupación de *Hansen-Woodyard*

La condición de Hansen-Woodyard de máxima directividad es válida únicamente cuando el diagrama de radiación es unidireccional, es decir, cuando no aparece un lóbulo de difracción trasero, lo cual implica para este caso un espaciado

$$d < \frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{3}{2N}\right)$$

En la práctica, es muy común utilizar un espaciado d = λ/4. El ancho de haz entre ceros en ψ de la agrupación de Hansen-Woodyard es la mitad que el de la ordinaria. Por tanto, en el espacio real es

$$\Delta\theta_c = 2\,\text{arcsen}\sqrt{\frac{\lambda}{Nd}} \approx 2\sqrt{\frac{\lambda}{Nd}}$$

Análogamente, el ancho de haz a -3 dB es

$$\Delta\theta_{-3\text{dB}} = 2\,\text{arcsen}\sqrt{0{,}28\frac{\lambda}{Nd}} \approx \sqrt{1{,}11\frac{\lambda}{Nd}}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y la directividad [Balanis'82]

$$D = 7{,}2\,\frac{N\,d}{\lambda}$$

Las principales características de la agrupación de Hansen-Woodyard, comparada con la longitudinal ordinaria, son:

- El haz principal es más estrecho.
- La directividad es algo inferior al doble mientras no aparezca un lóbulo de difracción.
- El campo radiado en la dirección del máximo es menor, pues los campos radiados por los elementos de la agrupación ya no se interfieren en fase. Ello es debido a que el desfase nulo en campo lejano $\psi = 0$ se encuentra fuera del margen visible. Dentro del margen visible el máximo es $FA(\pi/N) = 2N/\pi$, con lo que la disminución es de $20\log(\pi/2) = 4$ dB.
- El nivel de lóbulo principal a secundario empeora 4 dB, pues el lóbulo principal disminuye 4 dB y el secundario permanece constante.
- El hecho de radiar un campo inferior en el haz principal implica que para radiar el mismo campo la potencia entregada a cada antena debe ser mayor, lo cual limita la utilización de estas agrupaciones a aplicaciones que precisen haces estrechos y no sea necesario un buen nivel de campo radiado. Ello es debido a que el aumento de directividad no se logra a costa de un aumento del máximo de radiación, sino gracias a una disminución de la potencia total radiada, lo cual se consigue reduciendo el ancho de haz principal.

Aunque la agrupación de Hansen-Woodyard presenta la máxima directividad para una alimentación uniforme con fase progresiva, pueden alcanzarse directividades mayores mediante otras técnicas de alimentación no uniforme y de fase no progresiva, a costa de disminuir todavía más el campo radiado. Este aspecto se tratará con más detalle en el apartado (5.8.6), dedicado a las agrupaciones superdirectivas.

Aproximación lineal

En la figura 5.13 puede observarse que la curva de directividad en función del espaciado puede aproximarse fácilmente por una serie de tramos lineales. La pendiente de estos tramos debe ajustarse de forma que la recta pase por el origen y por un punto de directividad conocida, correspondiente a espaciado un número entero de semilongitudes de onda. Para el tramo recto comprendido entre $M\lambda$ y $(M+1)\lambda$, con $M \in N$, en el caso transversal la curva de directividad pasa por el punto $d = (2M+1)\lambda/2$ y $D = (\sum a_n)^2 / \sum a_n^2$. Por tanto, la aproximación lineal de la directividad es

$$M\lambda < d < (M+1)\lambda \quad \Rightarrow \quad D_{transversal} = \frac{1}{2\,M+1}\,2\,\frac{d}{\lambda}\left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2 \Big/ \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2\right) \tag{5.20}$$

que para el caso más habitual $d < \lambda$, $M = 0$ y distribución uniforme, se reduce a

$$d < \lambda \quad \Rightarrow \quad D_{transversal} = 2\,\frac{d}{\lambda}\,\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2} = 2\,\frac{d}{\lambda}\,N \approx 2\,\frac{L}{\lambda} \tag{5.21}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Esta aproximación lineal es de gran utilidad para estimar la directividad de una distribución de corrientes reales y positivas, grande en términos de la longitud de onda, con máximo de radiación en la dirección perpendicular a la antena. Es de gran importancia que, mientras no se dejen de cumplir estas condiciones, la directividad aumenta proporcionalmente a la longitud total de la antena, tanto si se trata de una antena discreta (agrupación) como de una distribución continua de corrientes.

La agrupación longitudinal presenta el mismo comportamiento lineal, salvo que los valores de directividad $D = (\sum a_n)^2 / \sum a_n^2$ se producen cada cuarto de longitud de onda, de forma que la pendiente de la aproximación lineal es doble que en el caso transversal

$$M\frac{\lambda}{2} < d < (M+1)\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad D_{longitudinal} = \frac{1}{2M+1}\,4\frac{d}{\lambda}\left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2 \Big/ \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2\right) \tag{5.22}$$

y para el caso $d < \lambda/2$, $M = 0$ y distribución uniforme

$$d < \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad D_{longitudinal} = 4\frac{d}{\lambda}\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2} = 4\frac{d}{\lambda}N \approx 4\frac{L}{\lambda} \tag{5.23}$$

5.6.2 Expresión general aproximada del ancho de haz y la directividad

A partir de la aproximación lineal de la directividad puede deducirse una aproximación sencilla para el ancho de haz de la agrupación en el espacio real.

Teniendo en cuenta que la antena básica es isótropa, si no hay lóbulos de difracción, es decir, si el espaciado es $d < \lambda$ en el caso transversal, o bien $d < \lambda/2$ en el longitudinal, entonces, el ángulo sólido equivalente es

$$\text{transversal:} \quad \Omega_{eq} = 2\pi\Delta\theta\,; \qquad \text{longitudinal:} \quad \Omega_{eq} = \pi\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2$$

Igualando las expresiones anteriores a $\Omega_{eq} = 4\pi/D$, y sustituyendo la directividad por sus aproximaciones lineales (5.20) y (5.22), resultan las siguientes aproximaciones para el ancho de haz

$$\text{transversal:} \quad \Delta\theta = \frac{\lambda}{d}\frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}\,; \qquad \text{longitudinal:} \quad \Delta\theta = 2\sqrt{\frac{\lambda}{d}\frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}}$$

Los principales valores de la directividad para distintos espaciados son, para $d << \lambda$

$$D = 1$$

y para $k\,d \to \infty$, $d = n\lambda/2$ con cualquier desfase progresivo o $d = n\lambda/4$ en el caso longitudinal

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$D = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n \right)^2 \Bigg/ \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2$$

Las aproximaciones lineales de la directividad y el ancho de haz, para d < λ en el caso transversal y d < λ/2 en el longitudinal, son las indicadas en la tabla 5.1.

	TRANSVERSAL ($d < \lambda$)	LONGITUDINAL ($d < \lambda/2$)
DIRECTIVIDAD	$D = 2\frac{d}{\lambda}\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}$	$D = 4\frac{d}{\lambda}\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}$
ANCHO DE HAZ	$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d}\frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}$	$\Delta\theta = 2\sqrt{\frac{\lambda}{d}\frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}}$

Tabla 5.1 Aproximaciones de la directividad y del ancho de haz

Comparación para una agrupación de 11 elementos

En las siguientes tablas, 5.2 y 5.3, se comparan las agrupaciones uniforme, triangular y binómica de once elementos para un espaciado de un cuarto de longitud de onda, en los casos longitudinal y transversal. En este último caso se incluye la agrupación uniforme de Hansen-Woodyard, con una fase progresiva α = -105,23º, para la cual no es válido este estudio, pero que presenta una directividad casi el doble que la de la agrupación longitudinal ordinaria. Se presentan los resultados de directividad y ancho de haz según las fórmulas

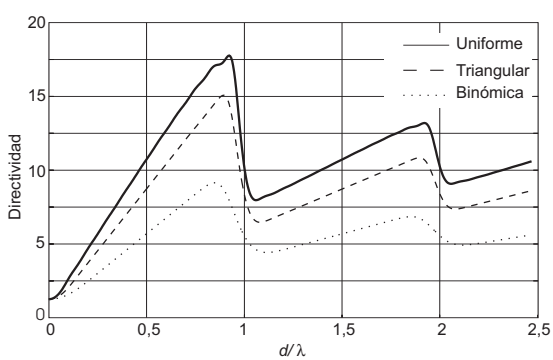


Fig. 5.15 Directividad de las agrupaciones transversales uniforme, triangular y binómica de 11 elementos

	$D_{aprox.}$	D_{exacta}	Δθ APROX.	Δθ A -3 dB
UNIFORME	5,5	5,65	20,8º	18,6º
TRIANGULAR	4,44	4,45	25,8º	24,9º
BINÓMICA	2,84	2,84	40,3º	38,9º

Tabla 5.2 Parámetros de agrupaciones transversales (N=11, $d = \lambda/4$) según su alimentación

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

derivadas de la aproximación lineal, comparados con los cálculos exactos de directividad (5.18) y el valor exacto del ancho de haz a -3 dB.

En las figuras 5.15 y 5.16 se representa la directividad en función del espaciado de las agrupaciones estudiadas.

	$D_{aprox.}$	D_{exacta}	$\Delta\theta$ APROX.	$\Delta\theta$ A -3 dB
HANSEN-WOODYARD	19,8	19,73	36,4º	38,4º
UNIFORME	11	11	69,1º	66,1º
TRIANGULAR	8,88	8,88	76,9º	76,6º
BINÓMICA	5,68	5,68	96,2º	96,4º

Tabla 5.3 Parámetros de agrupaciones longitudinales (N=11, $d = \lambda/4$) según su alimentación

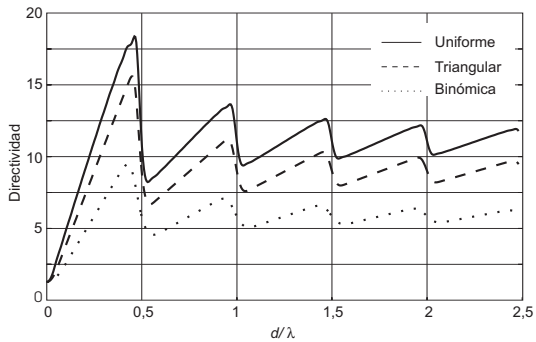


fig. 5.16 Directividad de las agrupaciones longitudinales uniforme, triangular y binómica de 11 elementos

5.6.3 Relación entre alimentación, directividad y diagrama

En el apartado 5.4, dedicado a las distribuciones de corrientes uniforme, triangular y binómica, y en las tablas comparativas anteriores, se ha visto que existe una relación intuitiva entre la forma de la distribución de corrientes, la directividad y los parámetros del diagrama de radiación: cuanto más "plana" o "uniforme" es la distribución de corrientes, mayor es la directividad, más estrecho el haz principal y peor el nivel de lóbulo principal a secundario. Sin embargo, la relación entre estos parámetros no es tan sencilla y depende de más factores. En el anexo B se realiza un estudio riguroso de dicha relación, cuyas conclusiones son las siguientes:

- La directividad está relacionada con la varianza de la secuencia a_n de la siguiente forma

$$\frac{D_{\lambda/2}}{N} = \frac{1}{\sigma_1 + 1}$$

donde $D_{\lambda/2}$ es la directividad de una agrupación para $d = n\lambda/2$ y σ_1 es la varianza de la distribución de corrientes normalizada a valor medio la unidad.

Esto implica que cuanto mayor es la dispersión en los valores de los coeficientes de la alimentación a_n, mayor es la varianza de la secuencia normalizada y menor la directividad. Si además nos encontramos en la zona de validez de la aproximación lineal para los casos transversal o longitudinal, sustituyendo $D_{\lambda/2}$ obtenemos

transversal: $$D = 2\frac{Nd}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1 + 1} \approx 2\frac{L}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1 + 1}$$

longitudinal: $$D = 4\frac{Nd}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1 + 1} \approx 4\frac{L}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1 + 1}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

lo cual significa que, en estos casos, la directividad depende únicamente de dos parámetros: la longitud eléctrica de la agrupación L/λ y la varianza de la alimentación normalizada σ_1. Esta expresión constituye la generalización de las fórmulas aproximadas (5.21) y (5.23) para distribuciones de corrientes no uniformes.

- Cuanto mayor es el número de antenas N, mayor es la longitud de la secuencia $[a_n]$ y, por tanto, más estrecho es el lóbulo principal de su transformada $|FA(\psi)|$. Ello implica un haz principal más estrecho.
- Cuanto más irregular o discontinua sea la alimentación, mayor importancia tienen las altas frecuencias ψ en $FA(\psi)$ y peor es el nivel de lóbulo principal a secundario en el diagrama de radiación.
- La relación entre la directividad y el ancho de haz es bien conocida: en un diagrama de radiación con buen NLPS, prácticamente toda la potencia se radia en el haz principal, con lo que puede definirse un ancho de haz equivalente Ω_{eq} tal que $D = 4\pi/\Omega_{eq}$. En estas condiciones de pequeños lóbulos secundarios, y si no varía el número de haces principales, la directividad y el ancho de haz son inversamente proporcionales. Esta relación se cumple en los casos típicos de las distribuciones uniforme, triangular y binómica.
- Por otra parte, si dos agrupaciones tienen igual directividad para espaciado $\lambda/2$, radian la misma potencia total a igualdad de máximo en el lóbulo principal. Ello es debido a que, cuando el espaciado es $\lambda/2$, la potencia total radiada es proporcional a la suma de los cuadrados de los coeficientes. Esto significa que la agrupación que tenga mejor *NLPS* radia menos potencia en los lóbulos secundarios y, por tanto, más en el lóbulo principal. Como la densidad de potencia radiada máxima es la misma para ambas, la agrupación con mejor *NLPS* tendrá mayor ancho de haz principal, y viceversa.

5.7 Agrupaciones bidimensionales

Hasta ahora, en este capítulo hemos considerado únicamente las agrupaciones lineales, en las que las antenas se sitúan a lo largo de una recta (por ejemplo, el eje z), produciendo un diagrama de radiación con simetría de revolución alrededor del eje de la agrupación. Sin embargo, son también muy habituales las agrupaciones en las que las antenas se sitúan sobre una superficie bidimensional, tanto plana como curvada. Estas agrupaciones de dos dimensiones permiten obtener una gama más amplia de diagramas de radiación, al conformar y dirigir el haz en las dos coordenadas esféricas del espacio (θ, ϕ), sin las restricciones que impone la simetría de revolución.

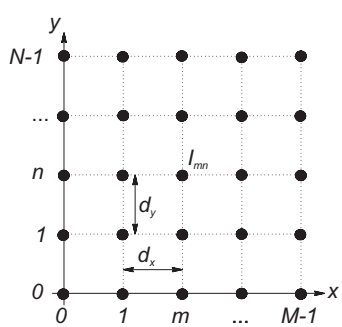


Fig. 5.17 Agrupación plana, rectangular y equiespaciada

En este apartado se va a estudiar únicamente el caso más sencillo y uno de los más habituales en la práctica: las agrupaciones planas rectangulares equiespaciadas con alimentación separable. Otros casos importantes son, por ejemplo, las agrupaciones planas circulares que no vamos a tratar [Balanis'82].

Sea una agrupación rectangular de MxN antenas iguales, situadas sobre el plano (x,y), paralelamente a los ejes, con espaciado d_x en la dirección x y d_y en la dirección y, y alimentadas con corrientes I_{mn} (Fig. 5.17). El factor de la agrupación será el resultado de la interferencia en campo lejano de la radiación de todas las antenas. Por analogía con la agrupación lineal, ecuación (5.1), el factor de una agrupación rectangular es

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$FA\left(k_x, k_y\right) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} I_{mn}\, e^{jmk_x d_x}\, e^{jnk_y d_y}$$

Para una alimentación con fase progresiva α_x en la dirección x y α_y en y

$$I_{mn} = a_{mn}\, e^{jm\alpha_x}\, e^{jn\alpha_y}$$

y definiendo los ángulos ψ_x y ψ_y, que representan el desfase eléctrico entre las contribuciones en campo lejano de dos elementos consecutivos en los planos (x,z) y (y,z) respectivamente

$$\begin{aligned} \psi_x &= k_x d_x + \alpha_x = k\, d_x \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \alpha_x \\ \psi_y &= k_y d_y + \alpha_y = k\, d_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \alpha_y \end{aligned} \tag{5.24}$$

resulta el factor de la agrupación

$$FA\left(\psi_x, \psi_y\right) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}\, e^{jm\psi_x}\, e^{jn\psi_y} \tag{5.25}$$

Análogamente al factor de una agrupación lineal, $FA(\psi_x,\psi_y)$ es la transformada de Fourier en dos dimensiones de la secuencia a_{mn}, mientras que esta última es el conjunto de los coeficientes de la serie de Fourier bidimensional de la función periódica de dos variables $FA(\psi_x,\psi_y)$.

Para una alimentación separable $a_{mn} = a_m \cdot a_n$, tenemos

$$FA\left(\psi_x, \psi_y\right) = \sum_{m=0}^{M-1} a_m\, e^{jm\psi_x} \sum_{n=0}^{N-1} a_n\, e^{jn\psi_y} = FA_x\left(\psi_x\right) FA_y\left(\psi_y\right)$$

Nótese que el factor de una agrupación plana rectangular separable puede interpretarse también como el factor de una agrupación lineal en x cuya antena básica es una agrupación lineal en y, o bien como el factor de una agrupación lineal en y cuya antena básica es una agrupación lineal en x.

Si las alimentaciones son reales y positivas, $a_{mn} \in \Re^+$, el máximo del factor de la agrupación se encuentra en el origen y, despejando de (5.24), la dirección del máximo de radiación en el espacio real es

$$\theta_{máx} = \operatorname{arcsen}\sqrt{\left(\frac{\alpha_x}{kd_x}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_y}{kd_y}\right)^2}\ ; \qquad \phi_{máx} = \operatorname{arctg}\left(\frac{d_x\,\alpha_y}{d_y\,\alpha_x}\right)$$

Obsérvese que cuando las fases progresivas son nulas, $\alpha_x = \alpha_y = 0$, la dirección del máximo está definida por $\theta_{máx} = 0$, π y $\phi_{máx}$ cualquiera, lo cual corresponde a un haz perpendicular a la agrupación (en la dirección del eje z). Este resultado es lógico, teniendo en cuenta que si la fase progresiva es nula la interferencia constructiva de todos los elementos se produce en el eje perpendicular al plano de la agrupación.

En general, variando la longitud de onda λ, o los espaciados eléctricos d_x/λ y d_y/λ, o las fases progresivas α_x y α_y, se pueden controlar los ángulos $\theta_{máx}$ y $\phi_{máx}$ para dirigir el haz en la dirección deseada. También pueden generarse varios haces principales si se utilizan espaciados mayores que la longitud de onda para que aparezcan lóbulos de difracción. Una aplicación práctica importante se encuentra en las agrupaciones con barrido electrónico, (*phased-arrays*), muy utilizadas en sistemas radar: la agrupación es capaz de barrer el espacio con el haz principal hasta localizar un blanco y fijar este haz sobre él para seguir su movimiento. En algunos casos se generan nuevos haces para seguir barriendo el espacio.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Agrupación plana uniforme

La distribución de corrientes uniforme se caracteriza por tener coeficientes de alimentación iguales a la unidad, $a_{mn} = 1$. Sustituyendo en la expresión (5.25) del factor de la agrupación, resulta

$$\left|FA\left(\psi_x, \psi_y\right)\right| = \left|FA_x\left(\psi_x\right)\right| \left|FA_y\left(\psi_y\right)\right| = \left| \frac{\operatorname{sen} M\frac{\psi_x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi_x}{2}} \frac{\operatorname{sen} N\frac{\psi_y}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi_y}{2}} \right|$$

donde se observa que la agrupación plana uniforme equivale a una lineal uniforme en x cuya antena básica es otra lineal uniforme en y, o viceversa.

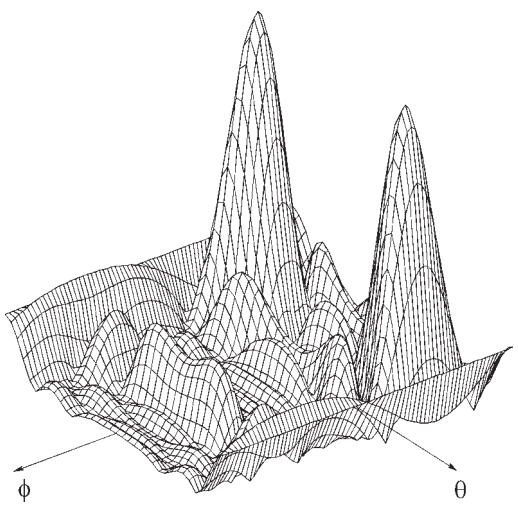


Fig. 5.18 Representación tridimensional en coordenadas cartesianas del factor de una agrupación uniforme de 5x5, con espaciado λ/2 y máximo en θ = 30º, ϕ = 270º

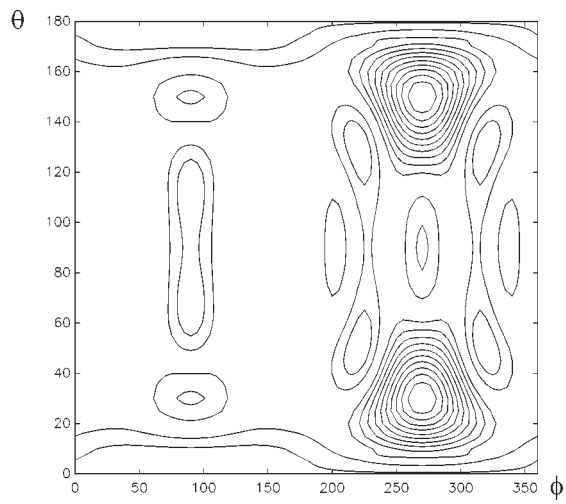


Fig. 5.19 Representación bidimensional en coordenadas cartesianas de la figura 5.18

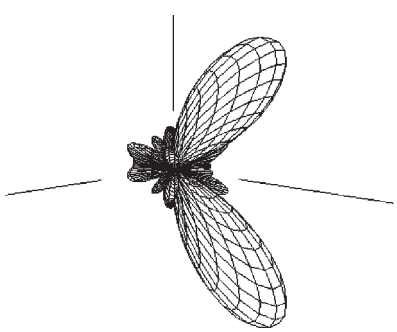


Fig. 5.20 Representación tridimensional en coordenadas esféricas de la figura 5.18

En las figuras 5.18, 5.19 y 5.20 se representa el módulo del factor de una agrupación uniforme de 5x5 elementos, con espaciado $d = \lambda/2$ y máximo de radiación en θ = 30º, ϕ = 270º. Se utilizan presentaciones 3-D y 2-D en coordenadas cartesianas, y 3-D en coordenadas esféricas.

Puede observarse en ellas la existencia de dos lóbulos principales, uno en θ = 30º y otro en θ = 150º. Ello es debido a que el factor de una agrupación plana es simétrico a ambos lados del plano (x,y), pues la expresión (5.24) vale lo mismo para θ que para 180º-θ. La interpretación física de ello se basa en que la interferencia de los campos radiados es la misma por encima y por debajo del plano de la agrupación.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Ejemplo 5.2 Una agrupación plana con barrido electrónico en elevación de 45 x 45 dipolos en λ/2 espaciados 0,7λ y 0,7λ en cada dirección se alimenta en sentido vertical (eje *y*) con una red de distribución de potencia uniforme. Cada salida de dicha red se conecta, a través de un desfasador variable (0º-360º) y un amplificador de potencia, a otra red de distribución horizontal (eje *x*) ponderada (Fig. 5.21).

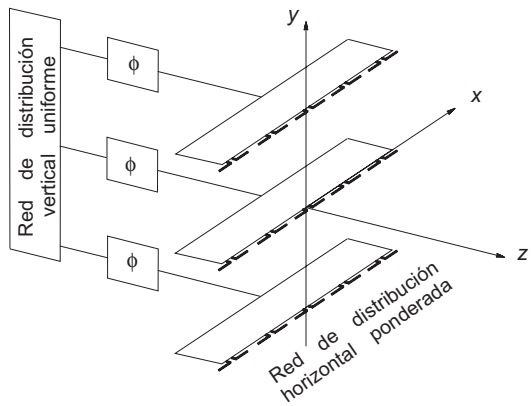


Fig. 5.21 Agrupación plana con barrido electrónico

Se elige para las redes horizontales una distribución triangular sobre pedestal. Si se desea que la corriente en el extremo esté 21,58 dB por debajo de la del centro, la amplitud de las corrientes se obtendrá teniendo en cuenta que la distribución triangular sobre pedestal es la suma de una uniforme (pedestal) más una triangular. Si la amplitud del pedestal es 1 y la amplitud del extremo de la distribución triangular es *A*, la corriente en el extremo es 1+*A* y en el centro es 1+*A*(*N*+1)/2. Igualando su cociente a 21,58 dB (12 en escala lineal) tenemos

$$\frac{1+23A}{1+A} = 12 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

205

Por tanto, la amplitud de las corrientes será

$$2 : 3 : 4 : \ldots : 23 : 24 : 23 : \ldots : 4 : 3 : 2$$

Por ser la alimentación separable (uniforme en *y* y triangular sobre pedestal en *x*), resulta $FA(\psi_x,\psi_y) = FA_x(\psi_x)FA_y(\psi_y)$. Para la distribución vertical, que es uniforme, tenemos

$$FA_y\left(\psi_y\right) = \frac{\operatorname{sen} 45\,\frac{\psi_y}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi_y}{2}}, \qquad \psi_y = k_y d_y + \alpha_y = k d_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \alpha_y$$

Por otra parte, $FA_x(\psi_x)$ es la suma de los factores de agrupación de una distribución uniforme y de una triangular con las amplitudes anteriores

$$FA_x\left(\psi_x\right) = 1 \cdot \frac{\operatorname{sen} 45\,\frac{\psi_x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi_x}{2}} + 1 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} 23\,\frac{\psi_x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\psi_x}{2}} \right)^2$$

Sustituyendo $\psi_x = k_x d_x + \alpha_x = k d_x \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \alpha_x$, como solamente tenemos desfasadores variables para la distribución vertical (en *y*), $\alpha_x = 0$, y como en el plano *xz* es $\phi = 0,\pi$, resulta para el plano horizontal, teniendo en cuenta que $FA_y(0) = 45$

$$FA_{xy}\left(\theta\right) = 45\frac{\operatorname{sen}\left(45 \cdot 0{,}7\,\pi \operatorname{sen}\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(0{,}7\,\pi \operatorname{sen}\theta\right)} + 45\left[\frac{\operatorname{sen}\left(23 \cdot 0{,}7\,\pi \operatorname{sen}\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(0{,}7\,\pi \operatorname{sen}\theta\right)}\right]^2$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuando $\alpha_y = 0$, el haz principal apunta en la dirección z ($\theta = 0^o$). Para desplazarlo en elevación a una nueva posición, por ejemplo $\theta_{máx} = 60^o$, $\phi_{máx} = 90^o$ es necesario tener un desfase progresivo α_y en la distribución vertical, que se logra mediante los desfasadores variables. Como el máximo se encuentra para $\psi_y = 0$, tenemos para esa dirección

$$\psi_y = k_y d_y + \alpha_y = k d_y \operatorname{sen}\theta_{máx} \operatorname{sen}\phi_{máx} + \alpha_y = 0$$
$$0{,}7 \cdot 2\pi \operatorname{sen} 60^\circ + \alpha_y = 0$$
$$\alpha_y = -3{,}81 \text{ rad} = -218{,}24^\circ = 141{,}76^\circ$$

y el desfase en la fila n es $n\alpha_y$. Por ejemplo, las fases en las filas 0, 1 y 44 son respectivamente: 0º, 141,76º y 117,5º.

Cuando se desplaza el haz en elevación llega un momento en que $\psi_y = -2\pi$ y aparece un lóbulo de difracción de igual amplitud que el máximo. Lo hace en la dirección $\phi = 270^o$, $\theta = 90^o$ y el valor de $\theta_{máx}$ para el que esto sucede se obtiene de

$$k d_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi - k d_y \operatorname{sen}\theta_{máx} \operatorname{sen} 90^\circ = -2\pi$$
$$k d_y - k d_y \operatorname{sen}\theta_{máx} = -2\pi$$
$$0{,}7\left(\operatorname{sen}\theta_{máx} + 1\right) = 1$$

cuya solución es $\theta_{max} = 25{,}37^o$ y, por tanto, no puede desviarse el haz principal más de 25º sin que se tenga un lóbulo de difracción de la misma amplitud que el máximo. Sin embargo, nótese que el lóbulo de difracción empieza a aparecer para desviaciones del haz principal algo menores que 25º.

En el caso anterior, con el máximo en $\theta = 60^o$, $\phi = 90^o$, existe un lóbulo de difracción, debido a que alguno de los valores $\psi_y = \pm 2\pi n$ se encuentra en el margen visible. Como la fase progresiva es $\alpha_y = -kd_y \operatorname{sen}60^o \operatorname{sen}90^o$ se deben cumplir las ecuaciones

$$kd_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi - kd_y \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 90^\circ = \pm 2\pi n$$
$$kd_x \operatorname{sen}\theta \cos\phi = 0$$

lo cual lleva a $\phi = 90^o$ o $\phi = 270^o$ (plano yz) y

$$\phi = 90^\circ \Rightarrow 0{,}7\left(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 60^\circ\right) = \pm n$$
$$\phi = 270^\circ \Rightarrow 0{,}7\left(-\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 60^\circ\right) = \pm n$$

Solamente existe solución para $n = -1$ y vale

$\phi = 90^o$, $\theta = -34{,}23^o$ o bien $\phi = 270^o$, $\theta = 34{,}23^o$.

Lógicamente, ambas soluciones son equivalentes, y corresponden a un haz orientado en el semiplano yz con $y<0$ (Fig. 5.22).

Obsérvese en la figura 5.22 que el haz principal es muy estrecho debido a la gran longitud eléctrica de la agrupación y que, como se ha indicado en el apartado 5.3.2 c), el ancho de haz aumenta al alejarse el máximo de la dirección normal y acercarse al plano de la agrupación.

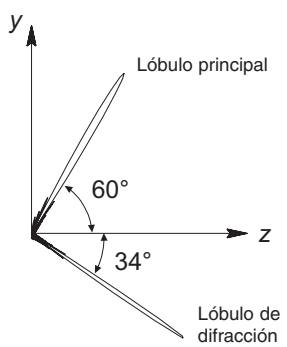


Fig. 5.22 Corte en el plano yz del diagrama de radiación

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.8 Síntesis de agrupaciones

La capacidad de las agrupaciones para modificar el diagrama de radiación de la antena básica puede aprovecharse para sintetizar un diagrama de radiación que cumpla con unas determinadas especificaciones. Para ello deben determinarse los fasores de corriente en todos los elementos de la agrupación de forma que la interferencia de los campos radiados se aproxime al diagrama deseado o cumpla ciertas especificaciones en los parámetros del diagrama.

La sistematización de los procedimientos de síntesis de agrupaciones ha llevado al desarrollo de una serie de métodos que, en función de las especificaciones de partida, pueden clasificarse en varias categorías:

- *Método de Schelkunoff*: Parte de la especificación de la dirección de los ceros en el plano Z o los nulos en el espacio real.
- Métodos de modelado del haz (*beam-shaping*), en los que se especifica la forma del diagrama en el espacio real. Suelen utilizarse dos métodos:
  Síntesis de Fourier, que permite obtener el diagrama de error cuadrático medio mínimo respecto a las especificaciones. Se aplica cuando se conoce una expresión matemática del factor de la agrupación deseado.
  Síntesis de Woodward, que permite obtener un diagrama que coincide con las especificaciones en un número finito de puntos. Es útil cuando el diagrama especificado no puede expresarse matemáticamente, pero sí puede muestrearse.
- Para diagramas de haz principal estrecho y bajos lóbulos secundarios, suelen especificarse el nivel de lóbulo principal a secundario y el número de elementos de la agrupación. Para realizar el diseño existen varios métodos:
  Síntesis de Chebychev, que obtiene el diagrama con mínimo ancho de haz principal para el nivel de lóbulo principal a secundario especificado.
  Síntesis de Taylor, basada en los mismos principios que la de Chebychev pero con menor radiación en direcciones alejadas del haz principal a costa de empeorar ligeramente el ancho de haz y la directividad. Por sus ventajosas características, es muy utilizada en la práctica. Existe también un procedimiento equivalente para obtener diagramas de tipo *diferencia* (o monopulso) a partir de distribuciones de corrientes impares, conocida como *síntesis de Bayliss*.
- *Agrupaciones superdirectivas*: Existen una serie de métodos para sintetizar agrupaciones con una directividad en teoría tan elevada como se desee, a costa de enormes problemas en su realización práctica, que las hacen inviables.
- *Agrupaciones adaptativas*: La tecnología moderna de desfasadores y amplificadores variables controlados por ordenador permite sintetizar diagramas en tiempo real, capaces de adaptarse automáticamente al entorno (por ejemplo, colocando nulos en las direcciones en las que aparecen interferencias).

Aunque la mayoría de los métodos de síntesis pueden aplicarse también a antenas continuas, tanto lineales como planas, en este apartado vamos a estudiar únicamente la síntesis de agrupaciones lineales.

5.8.1 Método de Schelkunoff

El método de Schelkunoff parte de la especificación del número de nulos y su posición en el margen visible o en el plano Z. Ello permite obtener el polinomio a partir de su factorización (5.13) y, por tanto, los coeficientes de la alimentación

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$P(z) = a_{N-1}\prod_{n=1}^{N-1}(z - z_n) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \tag{5.26}$$

La especificación de N-1 ceros proporciona N coeficientes de la alimentación, por lo que el número de elementos de la agrupación es N. Además, debe definirse el margen visible [α-kd, α+kd], a través de la especificación del espaciado y la fase progresiva. Nótese que, si el espaciado es mayor que $\lambda/2$, pueden aparecer en el espacio real un número de nulos mayor que N-1 al entrar los ceros periódicos en el margen visible.

La especificación de los ceros permite conocer cualitativamente la forma del factor de la agrupación pues, según la ecuación (5.26), el factor de la agrupación en un punto del círculo unidad es igual al producto de las distancias de este punto a todos los ceros (Fig. 5.9). Esto implica que entre dos ceros próximos, o cerca de un cero múltiple, el factor de la agrupación no puede tomar valores muy elevados, mientras que el máximo se encontrará en el punto más alejado de los ceros, normalmente situado entre los dos ceros más separados.

Cuando los ceros se agrupan por pares complejos conjugados sobre el círculo unidad, el factor de la agrupación es real y puede simplificarse la expresión (5.26) para operar únicamente con funciones reales. Cada par de ceros complejos conjugados equivale a un factor

$$\left(z - e^{j\psi_c}\right)\left(z - e^{-j\psi_c}\right) = z^2 - 2z\cos\psi_c + 1$$

donde ψ_c representa la posición angular del cero en el círculo unidad (o eje ψ). Por tanto, el polinomio para un número par de ceros (impar de antenas) puede escribirse de la forma

$$N \quad \text{impar:} \quad P(z) = \prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_n} + 1\right)$$

Cuando el número de ceros es impar, el cero desapareado debe estar bien en $z_c = -1$ o bien en $z_c = 1$, porque en otro caso el factor de la agrupación no sería real. Así, en general, para un número impar de ceros (o par de antenas) tenemos

$$N \quad \text{par:} \quad P(z) = (z \pm 1)\prod_{n=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_n} + 1\right)$$

Ejemplo 5.3 Para la agrupación uniforme de nueve elementos con el central desconectado del ejemplo 5.1, obtener la distribución de corrientes a partir de los ceros.

En la figura 5.23 se muestra el diagrama de ceros junto al módulo del factor de la agrupación. Puede observarse que entre dos ceros muy juntos existe un lóbulo de amplitud muy pequeña. Por otra parte, el máximo se encuentra en el centro del intervalo de mayor amplitud (72º). Como hay tres intervalos de la amplitud máxima, pero dos de ellos limitados por un cero doble, el máximo absoluto se encuentra en el único de los tres limitado por ceros simples.

Los ocho ceros se agrupan en cuatro pares complejos conjugados. Como la posición de los ceros es $\psi_{c_1} = \pm 36°$, $\psi_{c_2} = \pm 90°$, $\psi_{c_3} = \pm 108°$, $\psi_{c_4} = \pm 180°$ (ejemplo 5.1), la factorización del polinomio es

$$P(z) = (z^2 - 1{,}618z + 1)(z^2 + 1)(z^2 + 0{,}618z + 1)(z^2 + 2z + 1) = \\ = z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^3 + z^2 + z + 1$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y, por tanto, la distribución de corrientes es [1 1 1 1 0 1 1 1 1].

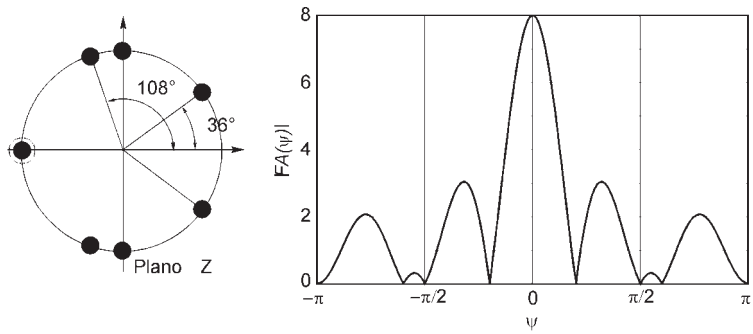


Fig. 5.23 Posición de los ceros en el plano Z y factor de la agrupación

5.8.2 Síntesis de Fourier

La síntesis de Fourier para modelado del haz se basa en el concepto de factor de la agrupación como transformada de Fourier de la distribución de corrientes: los coeficientes de la alimentación pueden obtenerse como la serie de Fourier del factor de la agrupación deseado.

Habitualmente el diagrama especificado no es de espectro limitado y su serie de Fourier presenta infinitos coeficientes. Sin embargo, puede asegurarse que para un número finito de antenas, tomando los primeros coeficientes del desarrollo en serie, el factor de la agrupación obtenido mediante síntesis de Fourier se aproxima a la especificación de FA(ψ) con error cuadrático medio mínimo (es decir, menor que el obtenido con cualquier otro método de síntesis) integrando el error a lo largo de un periodo 2π en ψ. Ello implica que el número de antenas necesario para sintetizar el diagrama es mínimo para un cierto error cuadrático medio.

La metodología de diseño de una agrupación mediante síntesis de Fourier a partir de un cierto diagrama de radiación consiste en:

1) Escoger un tipo de antena básica (si no está ya especificado) y obtener el factor de la agrupación como el cociente entre el diagrama de radiación deseado y el de la antena básica. El problema se complica cuando la especificación del diagrama incluye polarización. En este caso, es necesaria una formulación vectorial del problema y sintetizar por separado la alimentación de las componentes horizontal y vertical de la antena básica [Stutzman'81].
2) A partir del factor de la agrupación en el espacio real, FA(θ), obtener FA(ψ) a través de la transformación $\psi = kd\cos\theta+\alpha$. Ello implica la especificación del espaciado d y de la fase progresiva α, lo cual define el margen visible.
   Una consideración importante es que para obtener la serie de Fourier es necesario conocer el factor de la agrupación FA(ψ) en un periodo 2π en ψ. Como habitualmente se especifica el diagrama en el espacio real, FA(θ), lo cual solamente proporciona valores de FA(ψ) en el margen visible, es necesario especificar también el factor de la agrupación fuera del margen visible para completar un periodo 2π. Ello debe realizarse de forma que el ancho espectral del factor de la agrupación resultante sea lo menor posible, con objeto de lograr una rápida convergencia de la serie de Fourier y, por tanto, necesitar un menor número de antenas para un cierto error cuadrático medio.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La posibilidad de realizar distintas especificaciones de FA(ψ) fuera del margen visible lleva a soluciones no únicas para aproximar un cierto diagrama de radiación en el espacio real.

3) Desarrollar FA(ψ) en serie de Fourier y truncar la serie cuando el error cuadrático medio es menor que un umbral o el número de antenas supera un límite especificado. No debe olvidarse que el criterio de error cuadrático medio mínimo se refiere a un periodo 2π en ψ, que no coincide con el margen visible si el espaciado es menor que $\lambda/2$ y, en consecuencia, el error en el margen visible depende de la especificación de FA(ψ) fuera del mismo.
La formulación del desarrollo en serie se simplifica tomando el origen de coordenadas en el centro de la agrupación. En este caso debe distinguirse si el número de antenas N es par o impar

$$N \text{ impar:} \quad FA(\psi) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n\, e^{jn\psi} \quad \left[ej.: N = 5 \;\Rightarrow\; n = -2,-1,0,1,2\right]$$

$$N \text{ par:} \quad FA(\psi) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n\, e^{jn\psi} \quad \left[ej.: N = 4 \;\Rightarrow\; n = \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Si FA(ψ) incluye especificaciones de módulo y fase del diagrama, entonces toma valores complejos y los coeficientes del desarrollo en serie también serán, en general, complejos. Sin embargo, habitualmente se especifica sólo el módulo del diagrama, con lo que FA(ψ) es una función real. En este caso, los coeficientes complejos del desarrollo, $a_n = A_n\, e^{j\varphi_n} \in C$, presentan simetría compleja conjugada, $a_{-n} = a_n^*$. Esta situación es la más frecuente y se conoce como *alimentación simétrica*. Como se cumple que

$$a_n\, e^{jn\psi} + a_n^*\, e^{-jn\psi} = 2\,\mathrm{Re}\left[a_n\, e^{jn\psi}\right] = 2A_n \cos\left(n\psi + \varphi_n\right)$$

resulta el factor de la agrupación

$$N \text{ impar:} \quad FA(\psi) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos\left(n\psi + \varphi_n\right)$$

$$N \text{ par:} \quad FA(\psi) = 2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos\left(n\psi + \varphi_n\right)$$

donde A_n y φ_n son respectivamente la amplitud y la fase de la corriente en el elemento n-ésimo. Evidentemente, la fase progresiva α no está incluida en φ_n, sino que está implícita en ψ, debido a la transformación (5.5).

Cuando la función FA(ψ) presenta simetría par o impar, pueden realizarse desarrollos en serie de cosenos o senos, respectivamente, y obtenerse coeficientes del desarrollo reales o imaginarios. En el caso anterior de alimentación simétrica y FA(ψ) real, tenemos para FA(ψ) con simetría par

$$FA(\psi) = FA(-\psi) \;\Rightarrow\; \varphi_n = 0,\ \pi \;\Rightarrow\; a_n = \pm A_n$$

$$N \text{ impar:} \quad FA(\psi) = A_0 \pm 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos n\psi = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos n\psi$$

$$N \text{ par:} \quad FA(\psi) = \pm 2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos n\psi = 2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos n\psi$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y para FA(ψ) con simetría impar

$$FA(\psi) = -FA(-\psi) \quad \Rightarrow \quad \varphi_n = \pm \pi/2 \quad \Rightarrow \quad a_n = \pm j A_n$$

$$N \text{ impar:} \qquad FA(\psi) = 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos\left(n\psi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} A_n \operatorname{sen} n\psi = 2j \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} a_n \operatorname{sen} n\psi$$

$$N \text{ par:} \qquad FA(\psi) = 2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos\left(n\psi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp 2 \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_n \operatorname{sen} n\psi = 2j \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n \operatorname{sen} n\psi$$

Los coeficientes de la serie de Fourier se calculan de la forma habitual

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} FA(\psi)\, e^{-jn\psi}\, d\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} FA(\psi)_{par} \cos n\psi \, d\psi - \frac{j}{\pi}\int_0^{\pi} FA(\psi)_{impar} \operatorname{sen} n\psi \, d\psi$$

donde se ha descompuesto el factor de la agrupación en sus partes par e impar.

Ejemplo 5.4 Para diseñar una agrupación transversal que radie toda la potencia dentro de un ancho de haz Δθ, ¿cuál es el máximo espaciado que permite realizar la síntesis de este diagrama? El factor de la agrupación está definido por

$$FA(\theta) = \begin{cases} 1 & \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\Delta\theta}{2} \geq \theta \geq \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\Delta\theta}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para esta agrupación, la fase progresiva es 0 y, por tanto

$$FA(\psi)_{\psi \in [-kd,\, kd]} = \begin{cases} 1 & |\psi| \leq kd \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\Delta\theta}{2}\right) = kd \operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2} \\ 0 & |\psi| > kd \operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2} \end{cases}$$

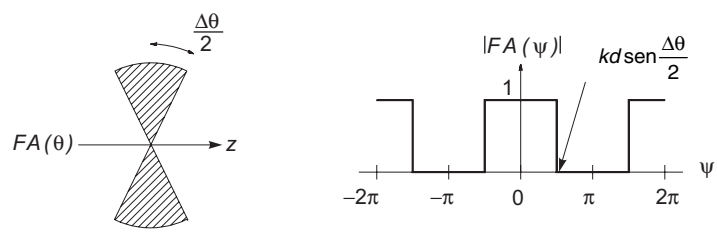


Fig. 5.24 Factor de la agrupación en el espacio real y en función del ángulo eléctrico ψ

Al aumentar el espaciado puede ocurrir que un lóbulo principal periódico entre en el margen visible y el diagrama de radiación no sea el especificado. El máximo espaciado para que esto no suceda se produce cuando el límite del margen visible $\psi = kd$ coincide con el límite del lóbulo principal periódico $2\pi - kd \operatorname{sen}(\Delta\theta/2)$

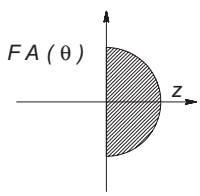
$$kd < 2\pi - kd \operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{\lambda} < \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si el espaciado es menor o igual que λ/2, tenemos sen (Δθ/2) < 1, que se cumple siempre que Δθ < π. En cambio, si el espaciado es mayor o igual que λ, tenemos sen (Δθ/2) < 0, que no tiene sentido.
En conclusión, siempre que $d \leq \lambda/2$ es posible sintetizar el diagrama, mientras que si $d \geq \lambda$ es imposible. En casos intermedios, $\lambda/2 < d < \lambda$, la posibilidad de realizar la síntesis depende del ancho de haz deseado. Cuanto mayor sea el ancho de haz, menor será el máximo espaciado permitido.

Ejemplo 5.5 Se desea diseñar por el método de Fourier una agrupación lineal longitudinal con $d = \lambda/4$, situada a lo largo del eje z, que radie con densidad de potencia constante en el semiespacio $z \geq 0$ ($\theta \leq \pi/2$) y no radie fuera del mismo, suponiendo que la antena básica de la agrupación es isótropa.
El diagrama de radiación especificado es

$$FA(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$



Para una agrupación con d = λ/4 tenemos $\alpha = -kd = -\pi/2$ y, por tanto, el factor de agrupación es

$$FA(\psi) = \begin{cases} 1 & -\dfrac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0 \\ 0 & -\pi < \psi < -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{no definido} & 0 < \psi \leq \pi \end{cases}$$

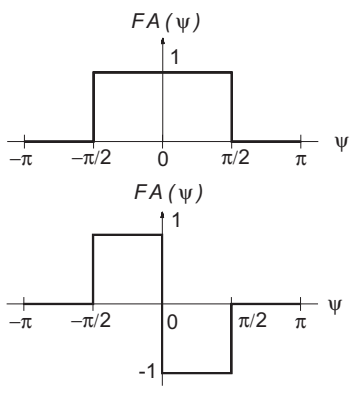


Fig. 5.25 Síntesis de FA(ψ) con simetría par y simetría impar

Como el margen visible solamente comprende el intervalo [-π,0], debe especificarse el factor de la agrupación en el resto del periodo definiendo su valor en el intervalo (0,π). Para ello es aconsejable buscar una forma de FA(ψ) de mínima anchura espectral, con objeto de lograr una rápida convergencia de la serie de Fourier y, por tanto, un menor número de antenas.
En este ejemplo se proponen dos soluciones para completar la definición de FA(ψ), una con simetría par y la otra con simetría impar; la primera de ellas presenta un menor ancho espectral.
La serie de Fourier para FA(ψ) con simetría par es

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} FA(\psi)\cos n\psi \, d\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n\psi \, d\psi = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde puede observarse que la alimentación en el elemento central es $a_0 = 1/2$, igual al valor medio de FA(ψ). La distribución de corrientes es real y par, por ser FA(ψ) real y par. Para una agrupación de 11 elementos se tiene

$$a_n = \left[\frac{1}{5\pi} \;\; 0 \;\; \frac{-1}{3\pi} \;\; 0 \;\; \frac{1}{\pi} \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{\pi} \;\; 0 \;\; \frac{-1}{3\pi} \;\; 0 \;\; \frac{1}{5\pi} \right]$$

La aparición de coeficientes nulos es, en general, indeseada, pues implica la eliminación de antenas de la agrupación, y mantener una longitud grande de ella con no todos los elementos radiantes.

Evidentemente, estas alimentaciones no incluyen la fase progresiva, que debe añadirse para obtener las corrientes en las antenas que proporcionan el diagrama en el espacio real.

La serie de Fourier para FA(ψ) con simetría impar es

$$a_n = \frac{-j}{\pi} \int_0^{\pi} FA(\psi) \operatorname{sen} n\psi \, d\psi = \frac{j}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} n\psi \, d\psi = \frac{j}{n\pi} \left(1 - \cos n \frac{\pi}{2} \right)$$

Nótese que ahora la alimentación del elemento central es nula, pues por ser FA(ψ) impar su valor medio es 0. La distribución de corrientes es imaginaria, por ser FA(ψ) impar, y simétrica, $a_n = a_{-n}^*$, por ser FA(ψ) real. Para una agrupación de 11 elementos resulta

$$a_n = \left[\frac{-j}{5\pi} \;\; 0 \;\; \frac{-j}{3\pi} \;\; \frac{-j}{\pi} \;\; \frac{-j}{\pi} \;\; 0 \;\; \frac{j}{\pi} \;\; \frac{j}{\pi} \;\; \frac{j}{3\pi} \;\; 0 \;\; \frac{j}{5\pi} \right]$$

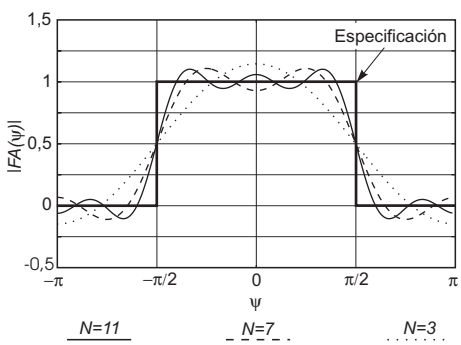


Fig. 5.26 Resultado de la síntesis con simetría par

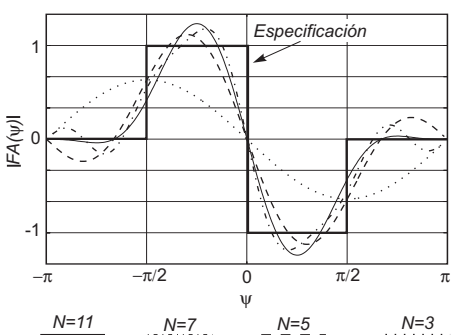


Fig. 5.27 Resultado de la síntesis con simetría impar

Puede evaluarse cuantitativamente el grado de convergencia de la serie, para un número determinado de antenas, aplicando el teorema de Parseval para analizar el error cuadrático medio. La potencia media del factor de la agrupación especificado, considerado como una señal periódica, es

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| FA(\psi) \right|^2 d\psi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El error cuadrático medio es la diferencia entre la potencia del factor de la agrupación especificado y el sintetizado con un número finito de antenas

$$\overline{e} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |FA(\psi)|^2 \, d\psi - \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2$$

Una medida del grado de convergencia de la serie de Fourier es el error cuadrático medio normalizado con la potencia media del factor de la agrupación especificado, $\overline{e} / P$. La siguiente tabla compara el error cuadrático medio expresado como porcentaje de la potencia media total, para las dos realizaciones del factor de la agrupación

NÚMERO DE ANTENAS	3	5	7	9	11
$FA(\psi)$ par : $\overline{e} / P$	9,5 %	9,5 %	7,2 %	7,2 %	6,4 %
$FA(\psi)$ impar : $\overline{e} / P$	59,5 %	19,0 %	14,5 %	14,5 %	12,9 %

Observando la tabla de error cuadrático medio y las gráficas del factor de la agrupación sintetizado con un número de antenas entre 3 y 11, se llega a la conclusión que, en este ejemplo, la realización con simetría par converge mucho más rápidamente que la de simetría impar. La síntesis con 3 antenas y simetría par es mejor que con 11 antenas y simetría impar. Nótese que a partir de un cierto número de antenas, 3 con simetría par y 7 con simetría impar, el error disminuye lentamente al aumentar el número de antenas.

La síntesis impar presenta un problema adicional, debido al fenómeno de Gibbs, la aparición siempre de un nulo en la dirección del eje z, que la haría inservible en la práctica para sintetizar un diagrama de cobertura hemisférica.

Si se desea realizar una agrupación con un número de antenas reducido, la elección sería 3 antenas y síntesis con simetría par. Las figuras 5.28 y 5.29 muestran los diagramas en el espacio real sintetizados con 3 y 11 antenas respectivamente, para FA(ψ) con simetría par. Nótese que utilizando la escala logarítmica se aprecia la diferencia entre la calidad de la síntesis con 3 y con 11 antenas.

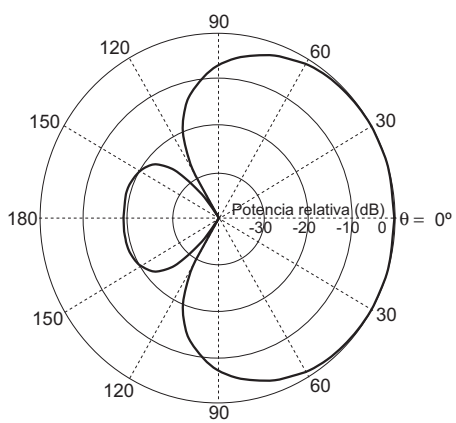


Fig. 5.28 Síntesis con simetría par y 3 antenas

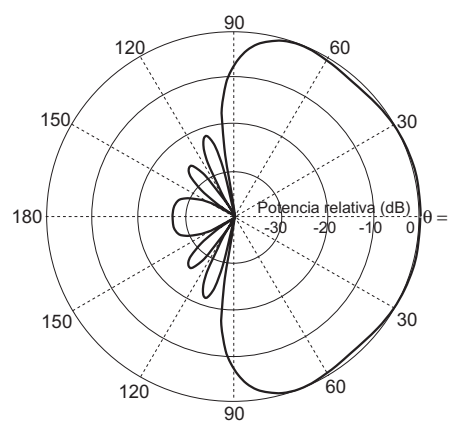


Fig. 5.29 Síntesis con simetría par y 11 antenas

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.8.3 Síntesis de Woodward-Lawson

El método de Woodward-Lawson se basa en descomponer el factor de la agrupación en una suma de funciones sinc desplazadas, tales que el máximo de cada una de ellas coincida con ceros de todas las demás. De esta forma, en los puntos correspondientes al máximo de las funciones sinc el factor de la agrupación es igual a la amplitud de cada función sinc, lo cual permite obtener esta última a partir de un muestreo del factor de la agrupación.

Este método suele aplicarse tanto para síntesis de distribuciones continuas (con la función sinc) como para agrupaciones (con la función sinc periódica). En ambos casos, la distribución de corrientes asociada a cada función sinc desplazada es una distribución uniforme con una fase progresiva igual al desplazamiento en k_z (antena continua) o ψ (agrupación).

Para una agrupación de N elementos con el origen de coordenadas en el extremo, la función sinc periódica m-ésima y la distribución de corrientes asociada son:

$$FA_m(\psi) = \frac{A_m}{N} \frac{\operatorname{sen} N \dfrac{\psi - \psi_m}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\psi - \psi_m}{2}} e^{j\frac{N-1}{2}(\psi - \psi_m)} \quad \Rightarrow \quad a_{n_m} = \frac{A_m}{N} e^{-j\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\psi_m}$$

donde

$$\psi_m = m\frac{2\pi}{N} \qquad m = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{5.27}$$

es la posición del máximo, que coincide con el cero m-ésimo de la función sinc centrada en el origen. El factor (N-1)/2 en la fase progresiva de a_{n_m} es debido a haber tomado el origen de coordenadas en el extremo de la agrupación. Este factor desaparece si el origen se toma en el centro, de la forma indicada en la sección 5.8.2.

Según (5.27), el número de muestras de FA(ψ) en un periodo es N, igual al número de antenas. El factor de la agrupación es la suma de las N funciones sinc periódicas

$$FA(\psi) = \sum_{m=0}^{N-1} FA_m(\psi) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{A_m}{N} \frac{\operatorname{sen} N \dfrac{\psi - \psi_m}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\psi - \psi_m}{2}} e^{j\frac{N-1}{2}(\psi - \psi_m)} \quad \Rightarrow \quad FA(\psi_m) = A_m \tag{5.28}$$

lo cual permite obtener los coeficientes A_m a partir de un muestreo de FA(ψ). La distribución de corrientes asociada con el factor de la agrupación (5.28) es

$$a_n = \sum_{m=0}^{N-1} a_{n_m} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m \, e^{-j\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\psi_m} \tag{5.29}$$

Este método es totalmente equivalente a la reconstrucción de una señal analógica de banda limitada a partir de sus muestras, mediante un filtrado paso bajo ideal que elimine las periodicidades del espectro de la señal. La respuesta impulsional de dicho filtro es justamente la función sinc con la que se convolucionan las muestras de la señal en la ecuación (5.28).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Ejemplo 5.6 Realizar la síntesis por el método de Woodward-Lawson del diagrama de radiación especificado en el ejemplo 5.5. Tomar el mismo número de antenas ($N = 11$) y comparar el resultado de ambos métodos.

Con los valores de espaciado $d = \lambda/4$ y fase progresiva $\alpha = -\pi/2$ especificados, el factor de la agrupación a sintetizar es

$$FA(\psi) = \begin{cases} 1 & -\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le 0 \\ 0 & -\pi < \psi < -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{no definido} & 0 < \psi \le \pi \end{cases}$$

Para definir FA(ψ) en un periodo 2π completo, tomamos la realización de FA(ψ) con simetría par, igual a como se ha realizado en el ejemplo 5.5. Las 11 muestras del factor de la agrupación en los puntos $\psi_m = m2\pi/N$ del intervalo [0, 2π] son

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (5.29) se obtiene la distribución de corrientes

$$a_n = \begin{bmatrix} 0{,}694 & -0{,}54 & -1{,}1 & 0{,}47 & 3{,}19 & 4{,}54 & 3{,}19 & 0{,}47 & -1{,}1 & -0{,}54 & 0{,}694 \end{bmatrix}$$

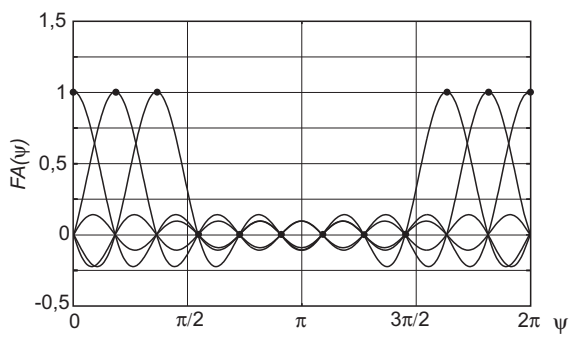


Fig. 5.30 Síntesis de FA(ψ) mediante suma de funciones sinc

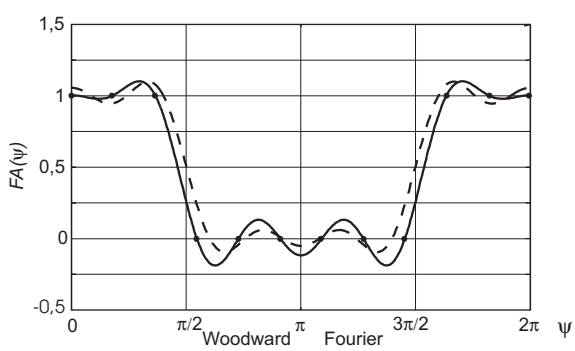


Fig. 5.31 Comparación entre la síntesis de Fourier y la de Woodward-Lawson

En la figura 5.30 se muestran las 11 funciones sinc periódicas y en la 5.31 la suma de todas ellas, igual al factor de la agrupación sintetizado por el método de Woodward-Lawson, comparada con la síntesis de Fourier. Nótese en ambas figuras que los puntos de muestreo, marcados con un círculo, coinciden con los ceros de todas las funciones sinc menos la que tiene el máximo en este punto. Lógicamente, el factor de la agrupación resultante coincide con la especificación en los puntos de muestreo.

En la figura 5.32 se muestra el diagrama de radiación resultante, en escala logarítmica. Comparando con la síntesis de Fourier (ejemplo 5.5), esta última produce lóbulos laterales inferiores a la de Woodward-

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Lawson. Ello es debido a que la síntesis de Fourier es la que produce el mínimo error cuadrático medio.

La síntesis de Woodward-Lawson no conduce a un diseño óptimo del diagrama de radiación. Esto es evidente cuando, con objeto de ahorrar antenas, sólo se especifican muestras en la zona de interés del diagrama de radiación. En este caso el método no proporciona ningún control sobre el nivel de lóbulos secundarios en el resto del diagrama. Además, en la zona de interés del diagrama, la amplitud del rizado es doble de la que proporcionan otros métodos. Ello es debido a que los ceros de P(z) que se encuentran fuera del círculo unidad (*N*-1-nulos de FA(ψ) en un periodo) se agrupan por parejas que comparten la misma posición angular, con lo que no se aprovecha todo el control del diagrama posible.

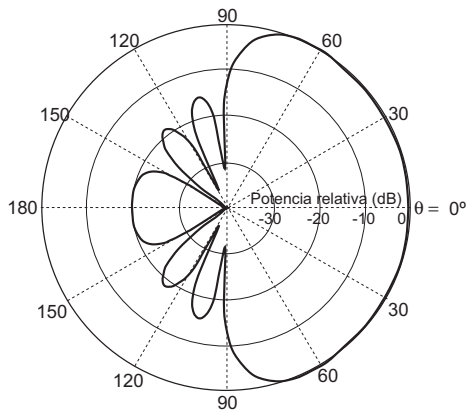


Fig. 5.32 Diagrama de radiación en el espacio real

5.8.4 Síntesis de Chebychev

Para algunas aplicaciones de radar y comunicaciones punto a punto son necesarios diagramas de radiación con un haz principal muy estrecho y un nivel de lóbulo principal a secundario mayor que un cierto valor, con objeto de garantizar que el campo radiado fuera del haz principal sea suficientemente pequeño.

La síntesis de Chebychev permite obtener un compromiso óptimo entre ancho de haz y nivel de lóbulo principal a secundario: el ancho de haz es mínimo para un espaciado y nivel de lóbulo principal a secundario especificados. Para ello, se impone la condición de que todos los lóbulos secundarios sean iguales, con objeto de aumentar al máximo posible la potencia radiada en los lóbulos secundarios y, por tanto, reducir la radiada en el lóbulo principal.

Para conseguir que todos los lóbulos secundarios sean iguales se sintetiza el factor de la agrupación mediante polinomios de Chebychev, cuyas oscilaciones tienen amplitud constante y pueden asociarse a los lóbulos secundarios.

En los apartados siguientes se presentarán las propiedades de los polinomios de Chebychev y dos de las transformaciones más utilizadas para convertir estos polinomios en el factor de la agrupación.

Propiedades de los polinomios de Chebychev

El polinomio de Chebychev de grado *n* puede definirse a través de la siguiente expresión

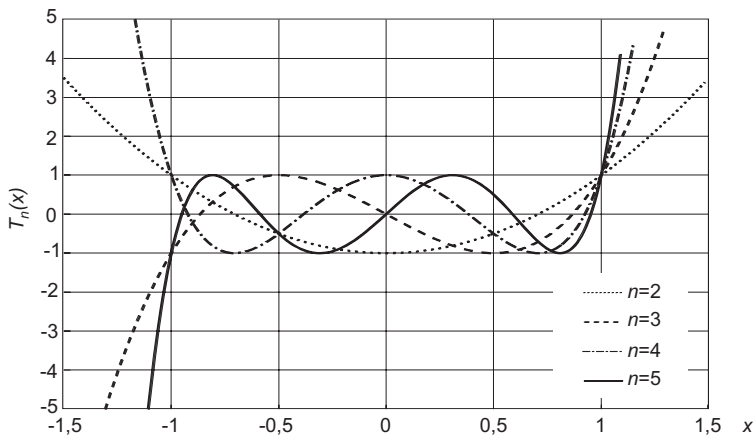
$$T_n(x) = \begin{cases} \cos nt, & x = \cos t \quad |x| \le 1 \\ \operatorname{ch} nt, & x = \operatorname{ch} t \quad |x| \ge 1 \end{cases} \tag{5.30}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Desarrollando cos *nt* y ch *nt* en potencias de cos *t* y ch *t* respectivamente, se obtiene $T_n(x)$ expresado en potencias de *x* y, por tanto, en forma polinómica. Los polinomios de Chebychev cumplen la fórmula de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{5.31}$$

De la expresión (5.30) se deduce que los dos primeros polinomios son $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Aplicando la recurrencia (5.31) pueden obtenerse todos los demás. Por ejemplo, los polinomios de grados comprendidos entre 2 y 5 son



$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Fig. 5.33 Polinimios de Chebychev de grado 2, 3, 4 y 5

Las propiedades que caracterizan a los polinomios de Chebychev son:

- Los polinomios de grado impar sólo tienen potencias impares de *x*, y los de grado par sólo potencias pares. Ello implica que los de grado impar presentan simetría impar en *x* y los de grado par presentan simetría par.
- Para valores de *x* positivos, todos pasan por el punto (1,1) y tienden a infinito al aumentar *x*.
- Para valores de *x* negativos, los de grado par tienden a ∞ y pasan por (-1, 1), mientras que los de grado impar tienden a -∞ y pasan por (-1,-1).
- En $x = 0$ los de grado par valen 1 o -1 y los de grado impar valen 0.
- En la expresión (5.30) puede observarse que el número de ceros reales es *n*, lo cual implica que todos los ceros son reales. Además, los ceros están comprendidos en el intervalo [-1,1].
- Todas las oscilaciones de los polinomios tienen igual amplitud y se producen en el intervalo [-1,1]. Los valores máximo y mínimo en este intervalo son 1 y -1, respectivamente.

Los métodos de síntesis de Chebychev se basan en transformar el intervalo [-1,1] de la variable *x* en la zona de lóbulos secundarios del margen visible. De esta forma se consigue el máximo número de lóbulos secundarios en el diagrama de radiación, todos con igual amplitud, lo cual implica que el ancho de haz principal es mínimo. Para ello se utilizan las siguientes transformaciones de la variable *x* al ángulo eléctrico ψ, que asocian un sector del polinomio de Chebychev al intervalo $[0, 2\pi]$ de ψ.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Transformación de Dolph

La transformación de Dolph asocia un intervalo de x a un periodo del factor de la agrupación de la siguiente forma

$$x = x_0 \cos\frac{\psi}{2} \qquad (5.32)$$

Si ψ varía en un periodo tomando sucesivamente los valores $[-\pi, 0, \pi]$, resulta que x toma los valores $[0, x_0, 0]$, por lo que se recorre el intervalo dos veces en sentidos opuestos (Fig. 5.34).

La síntesis de Chebychev presenta un óptimo compromiso entre ancho de haz y nivel de lóbulo principal a secundario cuando todas las oscilaciones del polinomio entran dentro del margen visible. Como la transformación de Dolph distribuye todas las oscilaciones en un periodo 2π del factor de la agrupación, el diseño óptimo se consigue cuando el margen visible ocupa todo un periodo, es decir, cuando el espaciado es $d = \lambda/2$. Para espaciados inferiores el ancho de haz en el espacio real aumenta, mientras que para espaciados superiores pueden aparecer lóbulos de difracción al desviar el haz principal de la dirección transversal.

El parámetro x_0 está relacionado con la amplitud del haz principal, $FA(0) = T_n(x_0)$ y por tanto con el nivel de lóbulo principal a secundario. Como todos los lóbulos secundarios tienen amplitud igual a las oscilaciones del polinomio de Chebychev, que valen uno, resulta

$$NLPS = T_n(x_0) = \text{ch}\left(n \,\text{arg ch}\, x_0\right)$$

Como normalmente se suele especificar el nivel de lóbulo principal a secundario, el parámetro x_0 se calcula mediante

$$x_0 = \text{ch}\left(\frac{\text{argch}\,(NLPS)}{n}\right) \qquad (5.33)$$

El factor de la agrupación y la distribución de corrientes pueden obtenerse a partir de la transformación (5.32)

$$FA(\psi) = T_n(x)\Big|_{x=x_0\cos\frac{\psi}{2}} = \qquad (5.34)$$

$$= a_0 + 2\sum_{n=1}^{N-1} a_n \cos n\psi$$

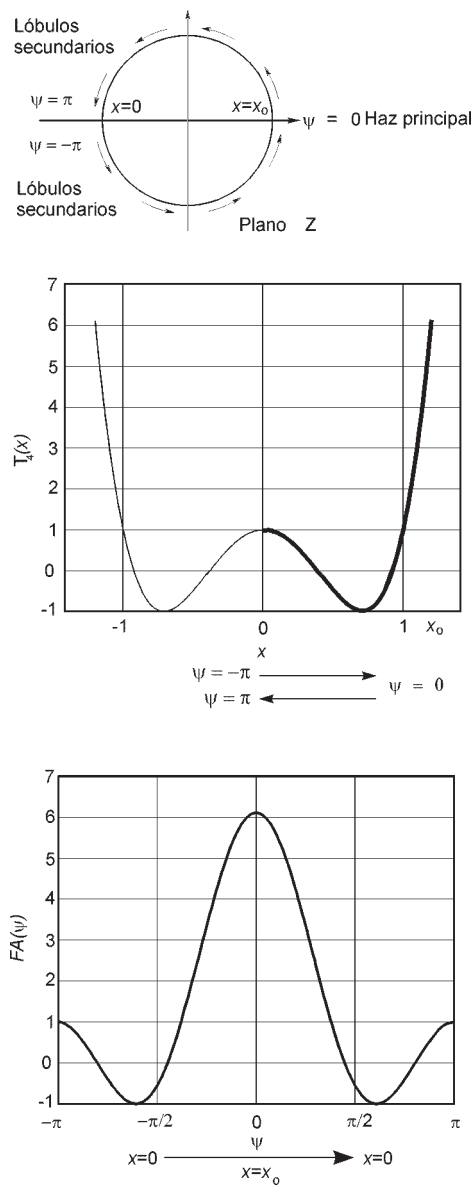


Fig. 5.34 Transformación de la variable x al círculo unidad (ψ) del plano Z

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde se ha utilizado el desarrollo de FA(ψ) en serie de cosenos por ser una función par.

Los coeficientes de la alimentación a_n se calculan identificando los dos miembros de (5.34), para lo cual es necesario desarrollar los términos $\cos^m \psi/2$ del polinomio en términos de la forma $\cos n\psi$ con ayuda de la fórmula de Moivre.

El polinomio también puede utilizarse para obtener los coeficientes de la alimentación

$$P(z) = T_n(x)\Big|_{x=\frac{x_0}{2}\left(z^{1/2}+z^{-1/2}\right)} = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n z^n \tag{5.35}$$

donde el factor $\left(z^{1/2}+z^{-1/2}\right)\Big/2$ proviene de la fórmula de Euler de $\cos(\psi/2)$.

Sin embargo, el método más cómodo para obtener los coeficientes a_n es el de Schelkunoff si se tiene en cuenta que los ceros de P(z) se agrupan en pares complejos conjugados. Los ceros del polinomio de Chebychev en x se encuentran en

$$x_{c_m} = \cos\left(\frac{2m-1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{5.36}$$

Los ceros del factor de la agrupación se obtienen a partir de x_{c_m} mediante la transformación de Dolph (5.32)

$$\psi_{c_m} = 2\arccos\left(\frac{x_{c_m}}{x_0}\right) \tag{5.37}$$

lo cual permite obtener el polinomio según el método de Schelkunoff

$$P(z) = a_{N-1}\prod_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_m} + 1\right) = \frac{x_0^{N-1}}{2}\prod_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_m} + 1\right) \tag{5.38}$$

donde el factor $a_{N-1} = x_0^{N-1}/2$ es igual al coeficiente del término de mayor grado del polinomio de Chebychev tras realizar la transformación de Dolph (5.32).

Las ecuaciones (5.34), (5.35) y (5.38) son válidas para una agrupación con un número impar de antenas. Para el caso de N par, las expresiones son análogas. El número de antenas es igual al número de términos del polinomio y, por tanto, igual al grado del polinomio de Chebychev más uno

$$N = n + 1 \tag{5.39}$$

Ejemplo 5.7 Diseñar una agrupación de Dolph-Chebychev de 5 elementos con el mismo nivel de lóbulo principal a secundario que la triangular del mismo número de antenas. Comparar el ancho de haz principal y la directividad (para $d = \lambda/2$) de ambas agrupaciones.

El *NLPS* de la agrupación triangular de 5 antenas es 9 (19,1 dB). Para una agrupación de 5 elementos el grado del polinomio de Chebychev es $n = 4$. A partir de la especificación del *NLPS* obtenemos el valor del parámetro $x_0 = 1{,}2720$ mediante la expresión (5.33).

La posición de los ceros de $T_4(x)$ se calcula mediante (5.36), y se obtiene: $x_{c_1} = 0{,}9239$ y $x_{c_2} = 0{,}3827$, mientras que x_{c_3} y x_{c_4} son simétricos de los anteriores.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

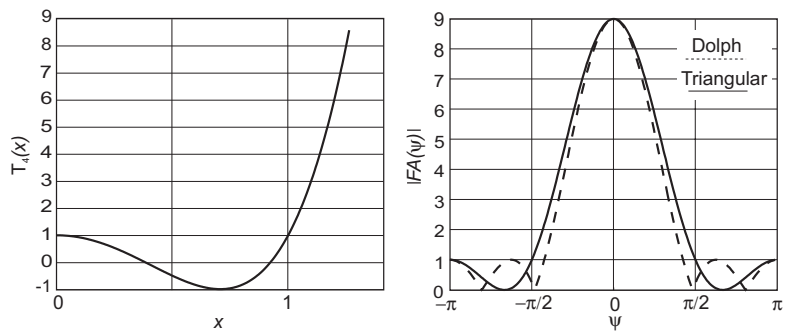
La situación de los nulos en el círculo unidad, calculada a través de (5.37), es $\psi_{c_1} = 1{,}5157$ y $\psi_{c_2} = 2{,}5304$; ψ_{c_3} y ψ_{c_4} son la posición de los ceros complejos conjugados de los anteriores.
Aplicando el método de Schelkunoff (5.38), el polinomio es

$$P(z) = 1{,}3090\left(z^2 - 0{,}1101z + 1\right)\left(z^2 + 1{,}6380z + 1\right) =$$
$$= 1{,}3090\,z^4 + 2\,z^3 + 2{,}3820\,z^2 + 2\,z + 1{,}3090$$

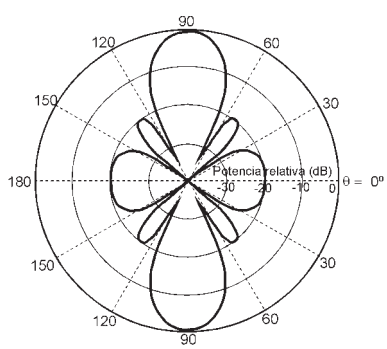
y las corrientes normalizadas a uno en el extremo

$$a_n = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}53 & 1{,}82 & 1{,}53 & 1 \end{bmatrix}$$

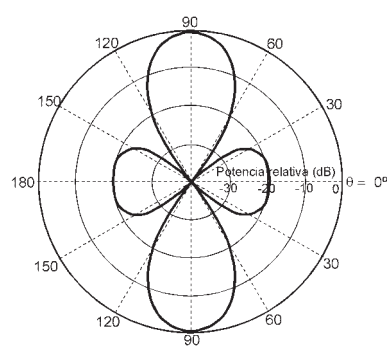
En las figuras siguientes se muestran el polinomio de Chebychev y el factor de la agrupación comparado con el de la triangular.



La posición del primer cero de la agrupación de Chebychev es $\psi = 1{,}51$, mientras que el de una agrupación triangular de 5 elementos estaría situado en $\psi = 2\pi/3 = 2{,}09$, con lo que la síntesis de Chebychev mejora casi un 30% el ancho de haz a igualdad de *NLPS*.
La directividad de ambas agrupaciones para $d = \lambda/2$ se obtiene con la expresión (5.19), que proporciona los resultados $D = 4{,}74$ para la de Dolph-Chebychev y $D = 4{,}26$ para la triangular. En este ejemplo, la directividad de la agrupación de Chebychev es superior a la de la triangular y próxima a la de la distribución uniforme ($D = 5$).
En el diagrama de radiación en el espacio real de la agrupación de Chebychev puede observarse que el haz principal es considerablemente más estrecho que el de la triangular.



Dolph-Chebychev



Triangular

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Transformación de Riblet

En el apartado anterior se ha visto que la transformación de Dolph no es óptima para espaciados menores que λ/2. Ello es debido a que cuando el margen visible no ocupa todo un periodo 2π del círculo unidad, quedan oscilaciones del polinomio de Chebychev fuera del margen visible y, por tanto, el ancho de haz no es mínimo.

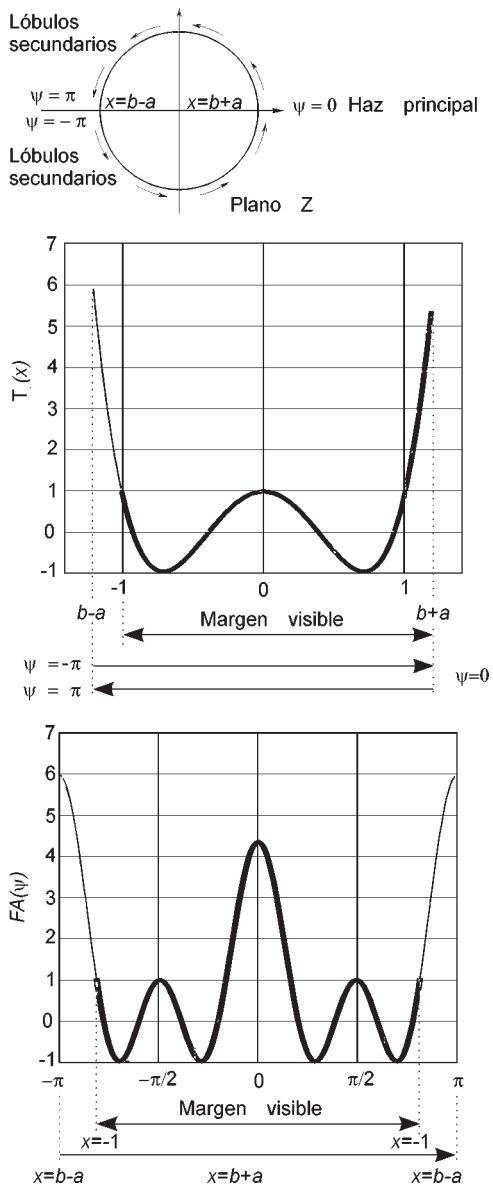


Fig. 5.35 Transformación de Riblet del polinomio de Chebychev a FA(ψ)

Este problema puede solucionarse utilizando una transformación que asocie las oscilaciones del polinomio de Chebychev directamente al margen visible, en lugar de a un periodo 2π completo. Una transformación de este tipo es la de Riblet

$$x = a\cos\psi + b \tag{5.40}$$

Ahora, al recorrer el ángulo eléctrico ψ el círculo unidad desde -π hasta π pasando por 0, la variable *x* recorre el polinomio de Chebychev desde *b-a* (para ψ = -π) hasta *b+a* (para ψ = 0) y vuelve hacia atrás hasta *b-a* (para ψ = π). En la figura 5.35 se muestra este recorrido de ida y vuelta

Obsérvese en la figura 5.35 que el polinomio de Chebychev puede tomar en *x* = *b-a*, que corresponde a ψ = ±π, valores mayores que el máximo en el margen visible (*x* = *a+b* o ψ = 0). Sin embargo, este lóbulo indeseado de FA(ψ) se encuentra fuera del margen visible y, por tanto, no aparece en el diagrama de radiación en el espacio real.

La presencia de este lóbulo de gran amplitud y no radiado en ψ = π permite comprimir el intervalo [-1, *a+b*] del polinomio de Chebychev en el margen visible, incluso para valores muy pequeños del espaciado *d*. Ello posibilita el diseño de agrupaciones de pequeño tamaño eléctrico con el nivel de lóbulo principal a secundario especificado, un haz principal muy estrecho y, por tanto, con una directividad muy elevada para la longitud eléctrica de la agrupación, por lo que se trata de un tipo de agrupaciones superdirectivas.

En las agrupaciones de Riblet-Chebychev pueden aplicarse las fórmulas del apartado 5.6 para el cálculo de la directividad porque el máximo relativo dentro del margen visible se encuentra en ψ = 0, aunque el máximo absoluto de FA(ψ) no se encuentre en el margen visible. En el apartado 5.8.6 se comentarán con más detalle las agrupaciones superdirectivas y los problemas que aparecen en su realización práctica.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El polinomio y el factor de la agrupación pueden calcularse de forma análoga a como se ha realizado para la transformación de Dolph. Por ejemplo, el polinomio es

$$P(z) = T_n(x)\Big|_{x=\frac{a}{2}\left(z+z^{-1}\right)+b} = \sum_{i=-n}^{n} a_i z^i = \sum_{i=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_i z^i$$

Como el polinomio P(z) tiene $2n$+1 términos, el número de antenas es

$$N = 2n+1 \tag{5.41}$$

lo cual concuerda con el hecho de que el número de ceros de FA(ψ) es $2n$, al estar incluido dos veces el intervalo [-1,1] del polinomio de Chebychev en el margen visible.

La metodología de diseño es análoga a la presentada para la transformación de Dolph: como todos los lóbulos secundarios tienen amplitud uno, el nivel de lóbulo principal a secundario es igual a $T_n(a+b)$. Como, por otra parte, el límite del margen visible $\psi = \pm kd$ (caso transversal) se encuentra en x = -1, para obtener los valores de los parámetros a y b se dispone de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} T_n(a+b) &= NLPS \\ -1 &= a\cos kd + b \end{aligned} \tag{5.42}$$

La distribución de corrientes puede obtenerse a través del método de Schelkunoff, calculando los ceros del polinomio de Chebychev x_{c_n} mediante (5.36) y, posteriormente, los de FA(ψ) invirtiendo la transformación de Riblet (5.40)

$$\psi_{c_n} = \arccos\left(\frac{x_{c_n}-b}{a}\right) \tag{5.43}$$

Para obtener a partir de los ceros el polinomio y los coeficientes de la alimentación sin normalizar es necesario aplicar el factor correspondiente al coeficiente del término de mayor orden, teniendo en cuenta la transformación de Riblet

$$P(z) = a_{N-1}\prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_n} + 1\right) = \frac{a^{\frac{N-1}{2}}}{2}\prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_n} + 1\right) \tag{5.44}$$

Ejemplo 5.8 Diseñar una agrupación de 5 elementos y nivel de lóbulo principal a secundario igual a 26,92 dB, para un espaciado $d = \lambda/16$. Calcular la directividad y compararla con la de las agrupaciones ordinarias del mismo espaciado. Dibujar el diagrama de radiación en el espacio real.

Para un espaciado de λ/16, es necesario utilizar la transformación de Riblet en lugar de la de Dolph, si se desea obtener el mínimo ancho de haz.

La agrupación es de 5 elementos, por lo que se va a utilizar el polinomio de Chebychev de grado 2

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Como el nivel de lóbulo principal a secundario especificado es de 26,92 dB, que equivale a 22,18 en escala lineal, el sistema de ecuaciones (5.42) es

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$2(a+b)^2 - 1 = 22{,}18$$
$$-1 = a\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + b$$

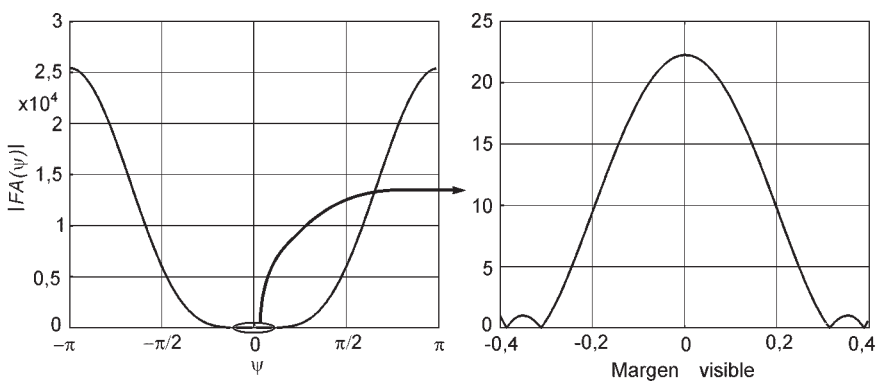
cuya solución es $a = 57{,}88$ y $b = -54{,}47$.
Los ceros del polinomio de Chebychev se encuentran en $x_{c_1} = 1/\sqrt{2}$ y $x_{c_2} = -1/\sqrt{2}$. Sustituyendo en (5.43) se obtiene $\psi_{c_1} = 0{,}3065$ y $\psi_{c_2} = 0{,}3793$. No hace falta calcular la posición de los ceros 3 y 4, pues son complejos conjugados de los ceros 1 y 2. Aplicando el método de Schelkunoff (5.44) tenemos

$$P(z) = 1674\left(z^2 - 1{,}907z + 1\right)\left(z^2 - 1{,}858z + 1\right) =$$
$$= 1674z^4 - 6302z^3 + 9278z^2 - 6302z + 1674$$

y la distribución de corrientes normalizada a uno en el extremo es

$$a_n = \begin{bmatrix} 1 & -3{,}7646 & 5{,}5425 & -3{,}7646 & 1 \end{bmatrix}$$

En la figura siguiente se muestra el factor de la agrupación FA(ψ) en un periodo 2π, ampliando la zona del margen visible $\psi \in [-\pi/8, \pi/8]$.



Nótese que la amplitud del factor de la agrupación en el margen visible es mil veces menor que en $\psi = \pi$, por lo que $FA(0) = \Sigma a_n = 0{,}0133$ es un valor muy pequeño: el campo radiado en el haz principal es unas 75 veces inferior al que radiaría un sólo elemento isótropo alimentado con fasor de corriente uno.
La directividad de esta agrupación, según la ecuación (5.18), es $D = 2{,}89$. Las directividades de las agrupaciones ordinarias transversales de 5 elementos con $d = \lambda/16$ son

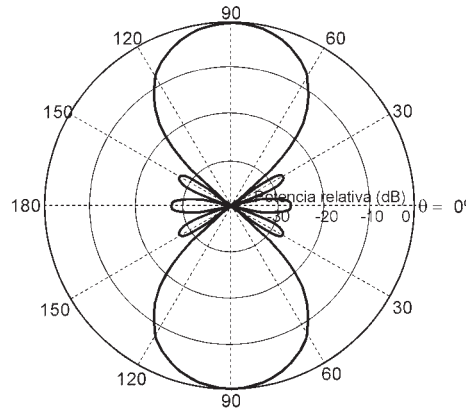
Uniforme: $D = 1{,}1$ Triangular: $D = 1{,}07$ Binómica: $D = 1{,}05$

Las agrupaciones ordinarias de 5 elementos y longitud total λ/4 son prácticamente isótropas. Sin embargo, con la síntesis de Riblet-Chebychev puede obtenerse un diagrama directivo con una longitud eléctrica total muy pequeña. Con un número mayor de elementos concentrados en una longitud total λ/4, reduciendo el espaciado *d*, se podría haber conseguido cualquier valor de directividad arbitrariamente grande. El precio

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

que se paga es que ahora la agrupación de antenas no aumenta el campo radiado en la dirección del máximo, como sucede con las agrupaciones ordinarias, sino que lo reduce hasta valores extraordinariamente pequeños.

En este ejemplo, para poder realizarlo prácticamente, se requeriría una gran precisión en el control de las corrientes (una parte en 10^4), lo que es inalcanzable en la realidad. En la figura de al lado se presenta el diagrama de radiación en el espacio real.



5.8.5 Síntesis de Taylor

En el apartado anterior se ha visto que los métodos de Dolph-Chebychev y Riblet-Chebychev permiten el diseño de agrupaciones con un compromiso óptimo entre ancho de haz y nivel de lóbulo principal a secundario. Para el diseño de antenas lineales continuas con el compromiso de ancho de haz y *NLPS* óptimo existe el método de Taylor, también basado en una transformación de los polinomios de Chebychev.

El muestreo de las distribuciones de corrientes obtenidas con el método de Taylor permite aplicar este método también al diseño de agrupaciones lineales, a condición de que el espaciado entre elementos sea suficientemente pequeño para minimizar la distorsión en el lóbulo principal y primeros lóbulos secundarios debida al solapamiento entre los periodos de FA(ψ).

Método de Taylor (del error de Chebychev)

Para una antena lineal continua de longitud L, el diagrama de radiación no es periódico en $\psi = kL\cos\theta$, como sucede en las agrupaciones debido al efecto del muestreo. La transformación de Taylor para antenas continuas es análoga a la de Dolph, pero tiene en cuenta que no existe periodicidad en ψ. Como se trata de diseñar una distribución de corrientes continua, que equivale a una agrupación de un número infinito de elementos, se utiliza el polinomio de Chebychev de orden infinito, $T_\infty(x)$. El resultado es un diagrama con infinitos lóbulos secundarios de amplitud constante en el eje ψ, totalmente equivalente al obtenido con la transformación de Dolph para el caso de agrupaciones y con el mismo ancho de haz principal a igualdad de *NLPS*.

Este diseño no es práctico, pues un número infinito de lóbulos secundarios en ψ con amplitud constante supone una potencia total (radiada más reactiva) infinita, por lo que la distribución de corrientes resultante contiene singularidades para poder suministrar esta potencia de alimentación infinita. Por ello, el diagrama de radiación debe modificarse para que únicamente los primeros lóbulos secundarios tengan amplitud constante mientras que los demás decrezcan de la forma $1/\psi$, igual que los de una distribución uniforme, con objeto de que la potencia total contenida en el diagrama sea finita. Este método de síntesis se conoce como de Taylor de la fuente ideal o de parámetro $\bar{n}$.

La distribución de corrientes modificada puede obtenerse por el método de Woodward-Lawson: en la zona en que se desean lóbulos secundarios decrecientes se toma un número infinito de muestras

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

iguales a cero en la posición de los nulos de la función sinc, mientras que en la zona de lóbulos de nivel constante se toma un número finito de muestras del diagrama ideal de Taylor, modificado con un factor de escala σ en ψ para que coincida un nulo de ambos diagramas en la transición entre las dos zonas. El resultado es un diagrama con una primera zona de lóbulos secundarios de nivel casi constante (en la práctica decrece muy ligeramente), seguida de otra zona con lóbulos secundarios decrecientes según $1/\psi$.

Como se ha indicado anteriormente, este método puede aplicarse al diseño de agrupaciones muestreando la distribución de corrientes continua con un espaciado pequeño (en la práctica se toma menor o igual que $\lambda/4$). El diagrama de radiación obtenido de esta forma presenta un ancho de haz igual al del diagrama ideal de Taylor multiplicado por el factor de escala σ, lo cual representa típicamente alrededor de un 7% a un 9% superior al obtenido con la transformación de Dolph y una directividad algo inferior.

Método de Taylor (de un parámetro)

En algunas aplicaciones de radar interesa que los lóbulos secundarios decrezcan de la forma $1/\psi$ desde el primer lóbulo, manteniendo un nivel de lóbulo principal a secundario especificado y el mínimo ancho de haz posible en estas condiciones. El objetivo es evitar las interferencias y el ruido que pudieran entrar por lóbulos secundarios alejados del máximo, pues son mucho más difíciles de eliminar mediante procesado de señal que las interferencias que entran por los primeros lóbulos secundarios.

Un método que permite obtener lóbulos con decaimiento $1/\psi$ y *NLPS* arbitrario es la llamada síntesis de Taylor de un parámetro, que obtiene la distribución de corrientes a partir de un cambio de variable en la función de Bessel de primera especie [Balanis'82].

El resultado de la síntesis es una distribución de corrientes similar a la obtenida con el método de Dolph-Chebychev, pero con un decaimiento algo mayor en los extremos. Ello produce un haz principal alrededor de un 12% a 15% más ancho que la síntesis de Dolph (para un *NLPS* típico) y una directividad ligeramente inferior a la obtenida con el método del error de Chebychev, debido al ensanchamiento del haz principal.

Sin embargo, el decaimiento monótono de los lóbulos a partir del primer lóbulo secundario asegura atenuaciones muy elevadas para señales provenientes de direcciones alejadas del lóbulo principal. Por este motivo, ambos métodos de Taylor son utilizados en la práctica con mayor frecuencia que la transformación de Dolph.

5.8.6 Agrupaciones superdirectivas

En el apartado 5.6 se ha demostrado que la directividad de una agrupación lineal ordinaria (con alimentaciones reales y positivas) está limitada por su longitud eléctrica:

$$D < 2\frac{L}{\lambda} \quad \text{Transversal}$$

$$D < 4\frac{L}{\lambda} \quad \text{Longitudinal}$$

Aumentar el número de antenas manteniendo la longitud total de una agrupación ordinaria no incrementa la directividad, pues aunque aumenta el número de lóbulos secundarios y el haz principal se estrecha en ψ, también lo hace el margen visible, de forma que la parte de $FA(\psi)$ dentro del margen visible es la misma y el diagrama de radiación en el espacio real no varía.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Sin embargo, es posible diseñar agrupaciones no ordinarias con valores de directividad arbitrariamente elevados para cualquier longitud eléctrica fija si se aumenta suficientemente el número de elementos reduciendo el espaciado entre ellos y se comprimen todas las oscilaciones de FA(ψ) para que entren en el margen visible.

Un método de síntesis de agrupaciones superdirectivas es el de Riblet-Chebychev: si en el ejemplo 5.8 se aumenta el número de antenas manteniendo la longitud total igual a λ/4, el número de ceros en el margen visible aumenta proporcionalmente y el ancho de haz se reduce. Como el nivel de lóbulo principal a secundario se mantiene fijo, la directividad aumenta inversamente con el ancho de haz y puede alcanzar, en teoría, un valor infinito.

En general, se conocen como agrupaciones superdirectivas aquellas que proporcionan una directividad mayor que la uniforme de igual longitud eléctrica, y se caracterizan por un campo radiado en el haz principal muy pequeño en relación con las corrientes de alimentación y por una potencia reactiva, asociada a FA(ψ) fuera del margen visible, mucho mayor que la potencia radiada, asociada a FA(ψ) dentro del margen visible. Esto provoca un valor muy elevado del factor *Q*, igual a la relación entre la energía reactiva almacenada *E* y la potencia radiada P_{rad}

$$Q = \frac{\omega E}{P_{rad}} = \frac{\frac{\lambda}{d}\int_{\text{No MV}} \left|FA(\psi)\right|^2 d\psi}{\frac{\lambda}{d}\int_{\text{MV}} \left|FA(\psi)\right|^2 d\psi}$$

Como el ancho de banda relativo a la frecuencia central en el que la impedancia de entrada varía poco puede aproximarse, para antenas de banda estrecha, por

$$B = \frac{2}{Q}$$

resulta que las agrupaciones superdirectivas presentan anchos de banda extraordinariamente pequeños.

Las agrupaciones superdirectivas tienen una distribución de corrientes con coeficientes de la alimentación de amplitud muy grande y fase de variación muy rápida, lo cual dificulta enormemente su realización, llegando a imposibilitar en la práctica la obtención de directividades muy elevadas con la transformación de Riblet. Por este motivo, debido a la tolerancia que existe en la realización práctica de los coeficientes de la alimentación, suelen realizarse diseños en los que se impone como restricción la sensibilidad del diagrama a errores en estos coeficientes [Balanis'82]. En este caso, la directividad está limitada por la especificación de sensibilidad, que depende de la tecnología disponible para la realización de la red de alimentación de la agrupación. Con este método pueden obtenerse en la práctica valores de directividad moderadamente elevados.

Un problema adicional de las agrupaciones superdirectivas reside en que los valores tan elevados de corriente en los elementos provocan pérdidas óhmicas de potencia (debidas a la resistividad del conductor empleado para construir las antenas y la red de alimentación) mucho mayores que la potencia radiada. Ello implica que la eficiencia de radiación es muy pequeña y la ganancia (directividad multiplicada por eficiencia) mucho menor que la correspondiente a una agrupación uniforme. Este problema podría reducirse empleando materiales superconductores, con el aumento de complejidad y coste económico que esto supone.

Además, el reducido espaciado eléctrico entre los elementos implica que la impedancia mutua entre ellos es similar a su autoimpedancia, con lo que la impedancia de entrada de cada elemento se hace muy pequeña y la adaptación con la red de alimentación es difícil.

El ejemplo 5.8 es un caso típico de agrupación superdirectiva. En él se ha visto que con corrientes normalizadas de amplitudes 1, 3,7 y 5,5 se obtendría un campo máximo de valor igual al que

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

produciría una antena sola excitada con una corriente de amplitud 0,013. Dada la proximidad de las antenas los efectos mutuos son muy grandes y hacen inviable el ajuste y mantenimiento de los valores de corriente con la precisión necesaria para conseguir estos diagramas superdirectivos.

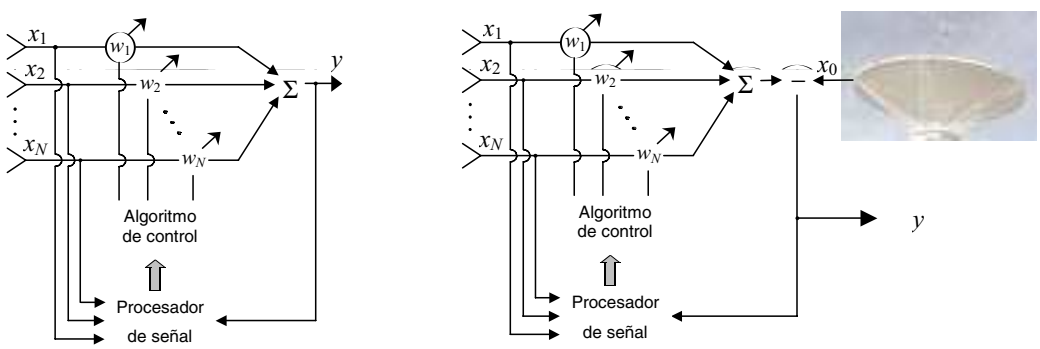
En conclusión, aunque en teoría es posible diseñar agrupaciones de directividad arbitrariamente grande, en la práctica la directividad y la ganancia están limitadas por la tecnología empleada en la realización de la agrupación. Solamente pueden conseguirse directividades moderadamente mayores que las de una agrupación ordinaria de igual longitud y *NLPS* (unos 3 dB más) sin penalizar excesivamente la ganancia, el ancho de banda y la tolerancia en la alimentación.

5.8.7 Agrupaciones adaptables

Conocidas en inglés como *adaptive arrays* o *smart antennas*, estas agrupaciones son capaces de sintetizar en tiempo real un diagrama de radiación que se adapta al entorno con objeto de eliminar interferencias, mejorar la relación señal a ruido u orientar el haz principal hacia una fuente de señal móvil. Los sistemas basados en agrupaciones adaptables han experimentado un desarrollo muy importante en los últimos treinta años y constituyen una tecnología multidisciplinar relacionada tanto con el procesado de señal como con la teoría de antenas. La base de estos sistemas son sofisticados algoritmos de procesado adaptable de señal, capaces de discriminar en tiempo real la señal deseada de las propagaciones multicamino y de otras señales interferentes, así como de calcular sus direcciones de llegada. Las aplicaciones de estos algoritmos se extienden a los campos de antenas, comunicaciones móviles, radar, sonar, sismografía, procesado de voz, análisis espectral, etc.

La figura 5.36 muestra el diagrama de bloques de una agrupación totalmente adaptable (a) y de un cancelador de lóbulos secundarios (b), en el que una agrupación de antenas poco directivas se utiliza como antena auxiliar para cancelar las interferencias recibidas por una antena principal muy directiva.

La multiplicación de las señales en cada antena x_n por unos pesos complejos w_n y la posterior suma pueden hacerse bien en frecuencia intermedia con amplificadores o atenuadores y



a) Agrupación adaptable

b) Agrupación adaptable como cancelador de lóbulos secundarios de una antena directiva

Fig. 5.36. Esquema de una agrupación adaptable (a) y de un cancelador de lóbulos secundarios (b)

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

desfasadores analógicos o bien en el procesador digital sobre las señales muestreadas. Debe tenerse en cuenta que la realización práctica de la agrupación adaptable presenta más dificultades cuando es transmisora que cuando es receptora, ya que en el primer caso la síntesis de los pesos debe hacerse necesariamente mediante atenuadores y desfasadores analógicos que deben calibrarse adecuadamente.

La señal a la salida de la agrupación (a) es

$$y = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n$$

y la salida del cancelador de lóbulos secundarios (b)

$$y = x_0 - \sum_{n=1}^{N} w_n x_n$$

donde para una agrupación lineal equiespaciada a lo largo del eje z la señal a la salida de cada antena es $x_n = xe^{jnkd\cos(\theta)}$.

En muchos sistemas radar se utiliza la configuración de la figura 5.36 b) para cancelar interferencias hostiles. Para eliminar las interferencias basta buscar los pesos w_n que proporcionan la mínima potencia de la señal de salida. Con estos pesos el diagrama de radiación del conjunto antena principal más agrupación tiene nulos en las direcciones de las interferencias. Los pesos w_n se actualizan en tiempo real para que los nulos puedan seguir la dirección de interferencias móviles. Con esta configuración de cancelador de lóbulos secundarios, una agrupación adaptable de N elementos puede neutralizar N interferencias, ya que tenemos N grados de libertad. En la configuración más simple de cancelador de lóbulos secundarios, la agrupación está formada por una sola antena omnidireccional y es capaz de cancelar únicamente una interferencia.

También es posible utilizar solamente la agrupación adaptable como antena de radar (Fig. 5.36 a). En este caso la agrupación debe tener un número de elementos suficientemente elevado para obtener la ganancia necesaria. El procesador de señal será ahora mucho más complejo, pues debe dirigir el máximo de radiación hacia el blanco y crear nulos en la dirección de las interferencias. Las antenas de este tipo más modernas son capaces de crear varios haces principales para seguir un número igual de blancos móviles. Como el número de grados de libertad disponibles en este caso es N-1, el número de haces principales más el número de nulos que cancelan interferencias debe ser menor o igual que N-1.

Las agrupaciones adaptables también pueden utilizarse ventajosamente en las estaciones base de telefonía móvil. La utilización de antenas cuyo diagrama puede adaptarse al entorno en tiempo real permite:

- Reducir los efectos de la propagación multi-camino, mejorando la relación señal a ruido y por tanto aumentando la cobertura de la célula. Ello puede realizarse de dos formas: a) sintetizando un diagrama que tenga el máximo de radiación hacia la dirección principal de la señal (propagación por rayo directo si es posible) y nulos en las otras direcciones de propagación de la señal o b) compensando el retraso de todas las direcciones de llegada de la señal para que se sumen en fase.
- Cancelación de interferencias en el mismo canal de frecuencia provenientes de otra célula que use los mismos canales. Para ello se sintetiza un diagrama que tenga el máximo de radiación hacia la dirección deseada y nulos en las direcciones interferentes.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

- Seguimiento: En los casos anteriores es posible realizar el seguimiento (*tracking*) de los usuarios que se encuentran dentro de la célula. Ello permitirá a la generación futura de antenas adaptables para estaciones base reutilizar canales para distintos usuarios dentro de la misma célula (*Spatial-Division Múltiple Access* o SDMA) mediante la asignación de un haz principal para cada usuario y el seguimiento con nulos de los otros usuarios que usen el mismo canal.

5.9 Alimentación de agrupaciones

A lo largo de este capítulo se ha considerado que los elementos de la agrupación estaban alimentados por fuentes de corriente. Si se desea alimentar la agrupación con fuentes de tensión, para calcular la tensión de entrada a partir de la corriente debe tenerse en cuenta que la impedancia de entrada de cada elemento no es la de una antena aislada, sino que depende de las impedancias mutuas con los demás elementos de la agrupación.

En general, la interacción entre los elementos de una agrupación es importante y afecta particularmente a la fase de las corrientes en cada elemento cuando se alimenta con fuentes de tensión sin tener en cuenta las impedancias mutuas. Ello puede producir modificaciones significativas en el diagrama de radiación respecto al obtenido alimentando con fuentes de corriente. Evidentemente, la interacción entre elementos, y por tanto la variación en las corrientes, depende mucho de la geometría de la agrupación y la posición relativa de los elementos: es máxima cuando el eje de la agrupación coincide con un máximo de radiación de la antena básica y mínima cuando lo hace con un nulo.

Las tensiones de alimentación de cada elemento deben calcularse a partir de la matriz de impedancias mutuas

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

donde $Z_{ii} = \left(V_i / I_i\right)\Big|_{I_j=0 \ \forall j\neq i}$ es la autoimpedancia del elemento *i*-ésimo, que coincide con su impedancia de entrada cuando se encuentra aislado en el espacio libre y $Z_{ij} = \left(V_i / I_j\right)\Big|_{I_i=0 \ \forall i\neq j}$ es la impedancia mutua entre los elementos *i*-ésimo y *j*-ésimo.

La impedancia mutua nos proporciona el valor de la tensión en circuito abierto que aparece en el elemento *i*-ésimo inducida por la corriente que circula por el elemento *j*-ésimo, si ambos están aislados en el espacio libre.

La impedancia de entrada de cada elemento puede calcularse a través de (5.45)

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \sum_{j=1}^{N} Z_{ij} \frac{I_j}{I_i} = Z_{ii} + \sum_{j\neq i} Z_{ij} \frac{I_j}{I_i} \tag{5.46}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Nótese que cuando la interacción entre los elementos es pequeña, las impedancias mutuas son mucho menores que las autoimpedancias y la impedancia de entrada puede aproximarse por la autoimpedancia. En general, los valores de autoimpedancia e impedancias mutuas se calculan por el método de la fuerza electromotriz inducida, presentado en el capítulo 3, o mediante los métodos numéricos que se presentan en el capítulo 8, con lo que se obtiene la impedancia de entrada de cada elemento y, de ella, la tensión de alimentación que se debe aplicar para suministrar una cierta corriente de entrada. Este procedimiento equivale a invertir el sistema de ecuaciones (5.45)

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

Ejemplo 5.9 Evaluar el efecto en el diagrama de radiación de alimentar una agrupación transversal uniforme de 3 dipolos resonantes en λ/2, paralelos entre sí y perpendiculares al eje de la agrupación, con 3 fuentes de tensión iguales, en lugar de utilizar fuentes de corriente.

Para dipolos paralelos de longitud 0,478λ, radio 0,001λ y espaciado λ/2, las impedancias mutuas obtenidas por el método de la fuerza electromotriz inducida son

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = 73{,}6 + j\,1{,}8$$
$$Z_{12} = Z_{21} = Z_{23} = Z_{32} = -10{,}9 - j\,26{,}4$$
$$Z_{13} = Z_{31} = 3{,}4 + j\,1{,}8$$

Para una alimentación de tensión uniforme, igual a la unidad en los tres elementos, invirtiendo la matriz de impedancias en (5.47) se obtienen las corrientes

$$I_1 = I_3 = 0{,}0118 + j\,0{,}0055,$$
$$I_2 = 0{,}0134 + j\,0{,}0098$$

Normalizando la corriente en los elementos de los extremos a uno, la corriente en el elemento central es

$$I_2 = 1{,}25 + j\,0{,}25 = 1{,}28_{\angle 11{,}3°}$$

valor algo superior a la corriente en los extremos y con una pequeña desviación de fase.

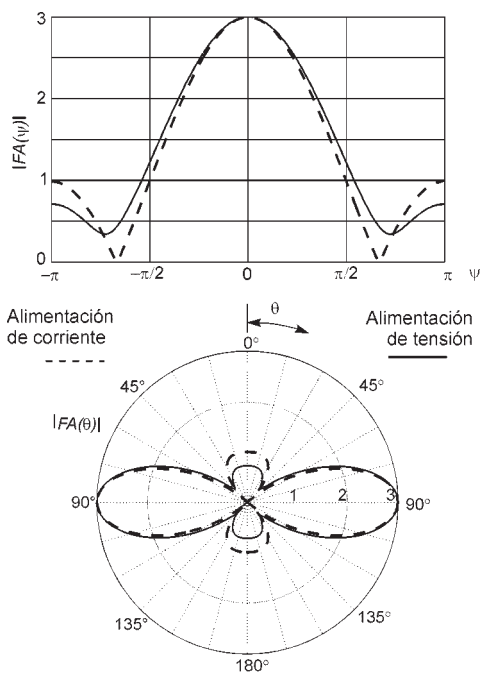


Fig. 5.36 Agrupaciones con un elemento activo y uno parásito

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En las figuras se compara el factor de esta agrupación con el de la alimentada por corriente constante (distribución uniforme).
Puede observarse que al ser la distribución de corrientes menos "plana", se produce una pequeña mejora en el nivel de lóbulo principal a secundario, a costa de un ligero aumento del ancho de haz y un enmascaramiento de los nulos.

5.10 Agrupaciones con elementos parásitos

Del estudio de la alimentación de agrupaciones realizado en el apartado anterior se deduce que es posible alimentar solamente algunos elementos de la agrupación, dejando los demás en cortocircuito. A los elementos con alimentación se les llama "activos", mientras que los elementos cortocircuitados reciben el nombre de "parásitos". Este tipo de agrupaciones son muy utilizadas en la práctica porque simplifican el diseño de la red de alimentación.

Las agrupaciones con elementos parásitos se analizan aplicando la ecuación (5.47) con un vector de tensiones en el que algunos elementos son nulos. Invirtiendo la matriz de impedancias de (5.47) puede observarse que la corriente que circula por los elementos parásitos es, en general, distinta de cero. Esta corriente es inducida por la interacción con los demás elementos, a través de las impedancias mutuas. La influencia de las impedancias mutuas puede observarse en la expresión de la corriente en un elemento parásito, obtenida a partir de (5.47)

$$V_n = 0 \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{-1}{Z_{nn}} \sum_{i \neq n} Z_{in} I_i \tag{5.48}$$

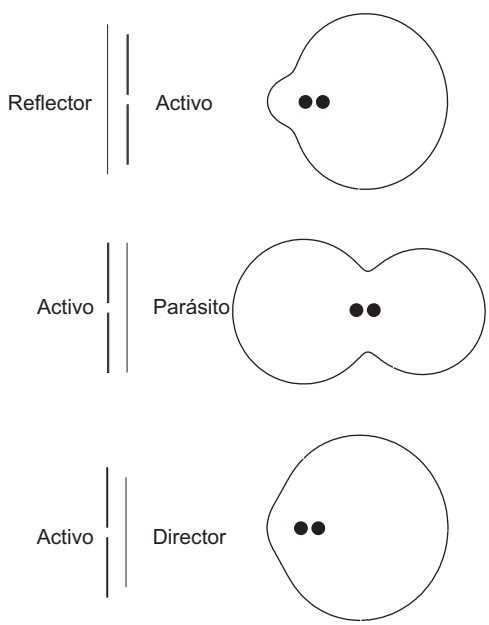


Fig. 5.37 Agrupaciones con un elemento activo y uno parásito

Con un diseño adecuado de los elementos parásitos pueden conseguirse diagramas de radiación de tipo longitudinal bastante directivos, de los que son un ejemplo clásico las antenas de Yagi-Uda. El caso más simple de agrupación con elementos parásitos es el formado por un dipolo activo y uno parásito. Si el dipolo activo es de media onda ($\lambda/2$), pueden obtenerse tres tipos de diagrama de la agrupación según sea la longitud del dipolo parásito ligeramente superior, igual o ligeramente inferior a la del activo.

En la figura 5.37 se muestran los diagramas de campo en plano H para las tres situaciones antes mencionadas, con los siguientes parámetros: en la parte superior de la figura, parásito de longitud $0{,}5\lambda$ y activo de $0{,}454\lambda$, con espaciado de $0{,}16\lambda$; en el centro, activo y parásito de $0{,}475\lambda$, con espaciado de $0{,}14\lambda$; y en la parte inferior, activo de $0{,}482\lambda$ y parásito de $0{,}45\lambda$, con espaciado de $0{,}12\lambda$.

Nótese que cuando la longitud de ambos elementos es igual, el diagrama es casi simétrico. Sin embargo, un elemento parásito de longitud

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

ligeramente superior a la del activo produce un máximo en la dirección del activo, por lo que recibe el nombre de "reflector". Por contra, un parásito de longitud ligeramente inferior produce el máximo en la dirección del parásito, por lo que ejerce la función de "director".

Este cambio de comportamiento con la longitud es debido a que el parásito de tamaño inferior al dipolo resonante es de carácter capacitivo, mientras que el de tamaño superior es inductivo. Este cambio de signo en la fase de la autoimpedancia del parásito cambia también el signo en la fase de la corriente (ecuación (5.48)), lo cual cambia el signo en la fase progresiva de la agrupación y, por tanto, el sentido del máximo de radiación.

5.10.1 Antenas de Yagi-Uda

Un tipo de antena muy común en la actualidad es la de Yagi-Uda, inventada en Japón en 1926 por S. Uda y dada a conocer internacionalmente poco después por H. Yagi. Esta antena, conocida como Yagi, cuya característica más significativa es su simplicidad, debida a la utilización de elementos parásitos, se utiliza habitualmente en las bandas de HF, VHF y UHF en aplicaciones de radiodifusión de televisión, estaciones de radioaficionados y radioenlaces punto a punto.

La configuración más habitual consta de un elemento activo, un reflector y entre uno y veinte directores. En la figura 5.38 se muestra el diagrama de campo en plano H de una antena Yagi típica de tres elementos.

El elemento activo suele ser un dipolo doblado resonante, con objeto de aumentar el ancho de banda. El reflector suele tener una longitud un 5% mayor que la del activo, habitualmente entre 0,5λ y 0,52λ. La longitud de los directores oscila entre 0,38λ y 0,48λ, siendo típicamente un 5% o 10 % inferior a la del activo. La separación entre elementos es algo mayor para el reflector (típica 0,15λ) que para los directores (típica 0,11λ).

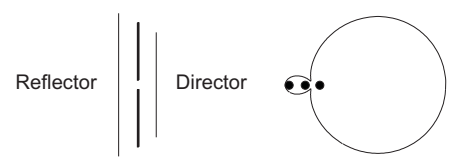


Fig. 5.38 Diagrama de radiación (campo) de una antena Yagi de tres elementos: activo de 0,475λ, reflector de 0,5λ y director de 0,45λ, espaciados 0,2λ

La antena Yagi no es estrictamente una agrupación, por no ser todos sus elementos iguales, pero como los diagramas de radiación de los elementos sí son casi iguales, suelen analizarse con las técnicas de agrupaciones lineales tomando como antena básica el dipolo en λ/2. Para ello es necesario obtener los valores de las corrientes de todos los elementos mediante la ecuación (5.47).

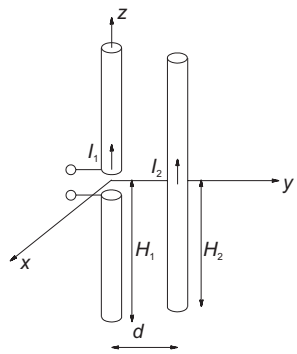
Las principales características de las antenas de Yagi-Uda son las siguientes:

- Ganancia relativa al dipolo en λ/2 entre 5 dB y 18 dB. Esta ganancia, expresada en dB, es del orden de magnitud del número de elementos, hasta un máximo de 20. Puede demostrarse que la fase de las corrientes en los elementos parásitos cumple la condición de Hansen-Woodyard, con lo que la directividad es óptima.
- Relación delante-atrás entre 5 dB y 15 dB. Este parámetro suele mejorarse con ayuda de un reflector diédrico.
- Nivel de lóbulo principal a secundario bajo, entre 5 y 10 dB. Sin embargo, este parámetro no es crítico en las aplicaciones más habituales de estas antenas.
- Impedancia de entrada de unos 300 ohmios, debido a la utilización de un dipolo doblado como elemento activo, por lo que es necesario el uso de simetrizadores para poder conectarlas a cables coaxiales de 50 y 75 Ω.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Finalmente, debe destacarse que la antena Yagi presenta un ancho de banda relativamente grande, y muy superior al que se espera de una agrupación, por comportarse como una antena de onda progresiva como las que se estudian en el capítulo 7.

Ejemplo 5.10 La antena Yagi de la figura está formada por dos dipolos próximos y paralelos. El dipolo 1 (activo) se alimenta con una corriente I_1 y el dipolo 2 (parásito) está cortocircuitado, y circula por él una corriente I_2.



$$2H_1 = 0{,}48\lambda$$
$$2H_2 = 0{,}45\lambda$$
$$d = 0{,}12\lambda$$
$$Z_{11} = 75{,}8 + j\,14{,}0$$
$$Z_{22} = 60{,}6 - j\,29{,}6$$
$$Z_{12} = 51{,}9 - j\,2{,}6$$
$$\vec{N} = \hat{z}\,2k\,I_m \frac{\cos(k_z H) - \cos(kH)}{k^2 - k_z^2}$$

Para obtener la impedancia de entrada de la antena necesitamos la relación entre las corrientes en los dipolos. De la ecuación (5.45) tenemos

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}\,I_1 + Z_{12}\,I_2 \\ 0 &= Z_{12}\,I_1 + Z_{22}\,I_2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}} = -0{,}708 - j\,0{,}303 = 0{,}77\,e^{-j2{,}74}$$

y la impedancia de entrada resulta a partir de (5.46)

$$Z_e = Z_{11} + Z_{12}\frac{I_2}{I_1} = 38{,}25 + j\,0{,}11$$

El diagrama de radiación se obtiene sumando los campos producidos por los dos dipolos. Para simplificar los cálculos puede aproximarse aceptablemente la antena por una agrupación de dos dipolos de λ/2 alimentados con las corrientes anteriores. El diagrama de radiación es el producto del factor de la agrupación por el diagrama de la antena básica, el cual se obtiene a través de la expresión del vector de radiación $\vec{N}$.

$$E_\theta = j60\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\left[I_1 + I_2\,e^{jk_y d}\right] = E_0\,I_1\left[1 + 0{,}77\,e^{j(0{,}75\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - 2{,}74)}\right]$$

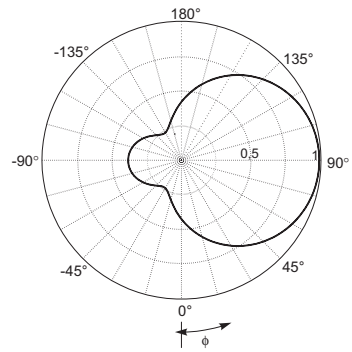
En el plano H tenemos θ = π/2 y la expresión del campo se simplifica a

$$\left|E_\theta\right| = \frac{60I_1}{r}\left|1 + 0{,}77e^{j(0{,}75\operatorname{sen}\phi - 2{,}74)}\right|$$

La representación gráfica puede realizarse con ayuda de una tabla de valores

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

ϕ	$\frac{\lvert E_\theta \rvert r}{60 I_1}$
-90	0,38
-60	0,32
-30	0,23
0	0,42
30	0,71
60	0,92
90	0,99



El método más cómodo para obtener la directividad es calculando la potencia total radiada a partir de la impedancia de entrada

$$D = \frac{\wp_{máx}}{\frac{P_r}{4\pi r^2}} = \frac{\left|E_{\theta\, máx}\right|^2 / \eta}{\frac{I_1^2\ \mathrm{Re}[Z_e]}{4\pi r^2}} = \frac{60^2\ I_1^2\ 0{,}99^2 \cdot 4\pi}{120\pi\, I_1^2\ 38{,}25} = 3{,}1 = 4{,}9\ \mathrm{dB}$$

El ancho de haz a -3 dB puede extraerse de la tabla de valores de campo y vale $\Delta\phi_{-3\mathrm{dB}} = 120º$. La relación delante/atrás es el cociente entre el valor del campo en $\phi = 90º$ y $\phi = -90º$ y vale D/A = 8,3 dB.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.1 Cuestiones

5.1 Para una agrupación de N antenas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es, en general, incorrecta?

a) El vector de radiación total es el producto del vector de radiación de la antena básica por el factor de la agrupación.
b) El potencial vector total es el producto del potencial vector de la antena básica por el factor de la agrupación.
c) El campo total es el producto del campo de la antena básica por el factor de la agrupación.
d) La directividad del conjunto es el producto de la directividad de la antena básica por la directividad del factor de la agrupación.

5.2 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) El diagrama de radiación de una agrupación depende del de la antena básica.
b) El factor de la agrupación FA(ψ) depende del espaciado.
c) El polinomio de la agrupación P(z) depende únicamente de la alimentación y del número de elementos.
d) El diagrama de campo depende del desfase progresivo.

5.3 Una agrupación uniforme de 5 elementos situada sobre el eje z, con $d = \lambda/4$ y $\alpha = 30º$, presenta el máximo de radiación en la dirección:

a) $\theta = 19{,}5º$ b) $\theta = 99{,}6º$ c) $\theta = 109{,}5º$ d) $\theta = 160{,}5º$

5.4 Una agrupación de 20 elementos, alimentados en fase, tiene máximos de igual intensidad en $\theta = 0º$, 90º y 180º. ¿Cuál será el espaciado entre elementos?

a) $\lambda/4$ b) $\lambda/2$ c) λ d) $3\lambda/2$

5.5 En una agrupación transversal uniforme de N elementos espaciados $d = 0{,}4\lambda$, al cambiar la frecuencia de f a $1{,}5\,f$, el haz se desvía:

a) 0º b) 30º c) 45º d) 60º

5.6 ¿Cuántos ceros tiene el diagrama de radiación en el espacio real de una agrupación triangular de N elementos?

a) El doble de una uniforme de N elementos.
b) Los mismos que una uniforme de N+1 elementos.
c) La mitad que una uniforme de N-1 elementos.
d) Depende de la frecuencia a la que se radia.

5.7 La relación del lóbulo principal al secundario (NLPS) de una agrupación binómica transversal de 5 elementos espaciados $3\lambda/4$ es:

a) 3 dB b) 6 dB c) 12 dB d) ∞

5.8 ¿Cuál de las siguientes agrupaciones, con $d = \lambda/2$ y $\alpha = 0º$, posee mayor relación de lóbulo principal a secundario?

a) $FA(\psi) = 0{,}5 + 2\cos\psi$
b) $FA(\psi) = 1 + 2\cos\psi$
c) $FA(\psi) = 1{,}5 + 2\cos\psi$
d) $FA(\psi) = 2 + 3\cos\psi$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.9 ¿Cuál de las siguientes distribuciones para una agrupación de 5 elementos con $d = \lambda/4$ y $\alpha = 0º$ tiene una directividad mayor?

a) 1:1,5:2:1,5:1 b) 1:2:3:2:1 c) 1:3:5:3:1 d) 1:4:6:4:1

5.10 ¿Cuál de las siguientes distribuciones con espaciado $d = \lambda/2$, fase progresiva $\alpha = 0º$ e igualdad del máximo de la distribución de corrientes, radia el campo mayor en la dirección del haz principal?

a) Uniforme de 4 elementos. b) Uniforme de 5 elementos.
c) Triangular de 5 elementos. d) Binómica de 5 elementos.

5.11 La relación delante-atrás de una agrupación de tres elementos, separados $d = \lambda/4$, con desfase progresivo $\alpha = -\pi/2$ y polinomio $P(z) = z^2 + \sqrt{2}z + 1$, vale:

a) 0 dB b) 7,6 dB c) 13,2 dB d) 15,3 dB

5.12 En una agrupación uniforme de 11 elementos, al desconectar su elemento central, el nivel de lóbulo principal a secundario empeora:

a) 0,5 dB b) 1,1 dB c) 2,3 dB d) 3,9 dB

5.13 Una agrupación de cuatro antenas isótropas, separadas d >> λ y excitadas en fase con corrientes 1:4:4:1, tendrá una directividad:

a) 0 dB b) 2,1 dB c) 4,7 dB d) 6 dB

5.14 ¿Cuál de los siguientes desfases progresivos en una agrupación uniforme de 12 elementos isótropos, espaciados λ /4, produce mayor directividad?

a) 0º b) -45º c) -90º d) -105º

5.15 Una agrupación plana rectangular está situada sobre el plano *xy* y la iluminación es separable, real y positiva. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) El factor de la agrupación es el producto de los factores de la agrupación correspondientes a la iluminación en *x* y a la iluminación en *y*.
b) La directividad es el producto de las directividades correspondientes a la iluminación en *x* y a la iluminación en *y*.
c) El ángulo ϕ_{max} del máximo de radiación es independiente de la frecuencia.
d) Si el espaciado es mucho mayor que la longitud de onda, el máximo es perpendicular al plano de la agrupación.

5.16 Mediante una agrupación de 5 elementos espaciados λ queremos sintetizar un diagrama en el espacio real de la forma $f(\theta) = 1$ para $60º \leq \theta \leq 120º$ y cero en el resto. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) El factor de la agrupación queda totalmente definido.
b) Debemos completar el factor de la agrupación hasta un periodo 2π en ψ.
c) Para realizar la síntesis son necesarios más elementos.
d) No es posible realizar la síntesis.

5.17 Una agrupación de cinco elementos espaciados λ/2 y con desfase progresivo $\alpha = 0º$, posee sobre el círculo unidad cuatro ceros en $\psi = \pm 90º$ y $\psi = \pm 135º$. La relación de campo en la dirección transversal respecto a la longitudinal vale:

a) 7,5 dB b) 10 dB c) 15 dB d) 20 dB

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.18 Para diseñar una agrupación de Dolph-Chebychev de 3 elementos ($T_2(x) = 2x^2-1$) con $d = \lambda/2$, $\alpha = 0º$ y NLPS = 16,9 dB, ¿qué transformación escogería?

a) $x = \cos(\psi/2)$ b) $x = 2\cos(\psi/2)$

c) $x = 3\cos(\psi/2)$ d) $x = 4\cos(\psi/2)$

5.19 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones para una antena Yagi típica de UHF es incorrecta?

a) Hay un único elemento activo.
b) El número de directores es superior al de reflectores.
c) La longitud de los directores es menor que la del activo.
d) La separación entre elementos es algo menor para el reflector que para los directores.

5.20 ¿Cúal de las siguientes afirmaciones para una antena Yagi es claramente incorrecta?

a) Ganancia relativa al dipolo entre 5 dB y 18 dB.
b) Relacion delante-atrás entre 5 dB y 15 dB.
c) NLPS entre 26 dB y 30 dB.
d) Impedancia de entrada de unos 300 ohmios.

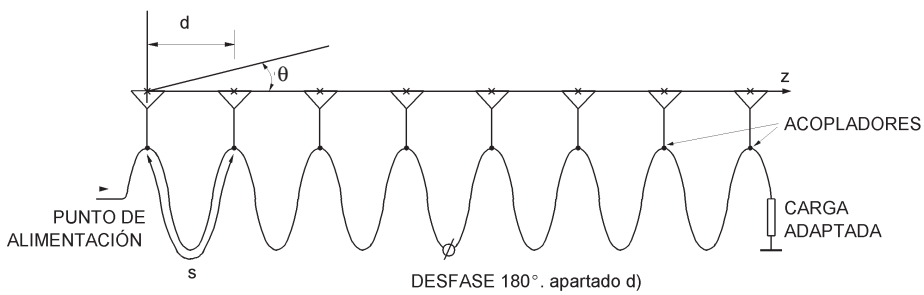
© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

5.1 Una agrupación lineal orientada a lo largo del eje *z* está formada por 4 elementos isótropos con alimentación a_n = 1:2:2:1. El espaciado es $d = 7\lambda/12$ y la dirección del máximo $\theta_{MAX} = 115{,}4º$.

a) Escribir las expresiones del factor y del polinomio de la agrupación, FA(ψ) y P(z).
b) Dibujar el diagrama de ceros.
c) Dibujar el factor de la agrupación en función del ángulo eléctrico ψ y el diagrama de radiación en el espacio real.
d) Calcular el ancho de haz entre ceros del lóbulo principal del diagrama de radiación.
e) Calcular la relación del lóbulo principal al lóbulo secundario de mayor nivel del diagrama de radiación.

5.2 Una de las formas utilizadas para obtener una agrupación con barrido electrónico es la representada en la figura.



En ella los elementos radiantes se alimentan en serie mediante acopladores, a partir de una línea de transmisión terminada en una carga adaptada. Si las antenas están débilmente acopladas a la línea de transmisión puede suponerse que todas ellas están alimentadas con la misma amplitud. Supondremos asimismo que la línea de transmisión es una línea coaxial con dieléctrico aire.
Con el principio de funcionamiento descrito, suponer una agrupación de 8 elementos alimentados con igual amplitud y con las fases creadas, en cada punto de alimentación, por la línea de transmisión, con s = 10 cm y d = 5 cm.

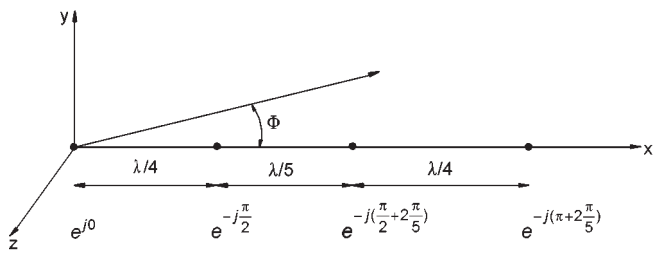
a) Calcular el FA en función de ψ y dibujar mediante el método gráfico el diagrama en el espacio real indicando la dirección del máximo para la frecuencia central de 3 GHz.
b) Dibujar mediante el método gráfico el diagrama en el espacio real indicando la dirección del máximo para las frecuencias de 2,5 y 3,5 GHz.
c) Calcular la frecuencia a la cual aparece un segundo lóbulo principal.
d) Para la frecuencia de 3 GHz, si entre el cuarto y el quinto elemento se coloca un desfasador adicional de 180º, calcular el FA(ψ) y dibujar, mediante el método gráfico, el diagrama en el espacio real.

5.3 Una agrupación lineal de cuatro radiadores isótropos con alimentación uniforme, situados sobre el eje *x*, posee un espaciado no uniforme como se indica en la figura. Para su análisis, considérese el producto de agrupaciones.

a) Calcular el espaciado, el desfase progresivo y el factor de la agrupación para cada una de las dos agrupaciones parciales.
b) Obtener el factor de la agrupación total en función de Φ.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

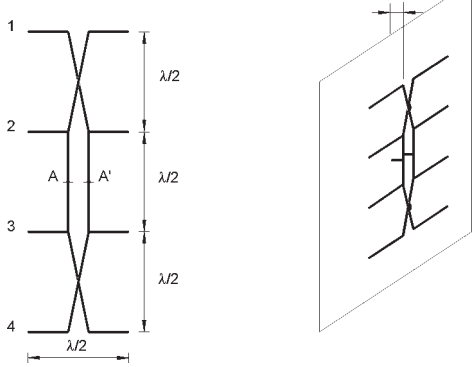
c) Utilizando el método gráfico dibujar el diagrama para cada una de las dos agrupaciones parciales y el de la total, indicando la posición de los ceros.
d) Si los elementos isótropos se sustituyen por dipolos en λ/2 orientados según *z*, obtener la expresión del diagrama de radiación en función de θ y ϕ y dibujarlo en los planos *E* y *H*.



5.4 Para una agrupación triangular de 5 elementos, con espaciado $d = \lambda/4$ y fase progresiva $\alpha = -\pi/2$:
a) Escribir el factor de la agrupación $FA(\psi)$ y el polinomio de la agrupación $P(z)$.
b) Dibujar el diagrama de ceros en el plano *Z* y el módulo del factor de la agrupación $|FA(\theta)|$ en el espacio real.
c) Calcular el nivel de lóbulo principal a secundario y el ancho de haz entre ceros en el espacio real. En la agrupación triangular anterior se suprimen los elementos de los extremos. Resolver la agrupación resultante como la suma de una triangular más una uniforme.
d) Escribir el factor de la agrupación $FA(\psi)$ y el polinomio de la agrupación $P(z)$.
e) Dibujar el módulo del factor de la agrupación $|FA(\theta)|$ en el espacio real.
f) Calcular el nivel de lóbulo principal a secundario y el ancho de haz entre ceros en el espacio real.

5.5 Una agrupación tipo cortina, situada en el plano *yz* , operando a 300 MHz, está formada por cuatro dipolos de media onda separados λ/2 entre sí y situados a λ/4 de un plano conductor.

Z_{12} = -13 -j29
Z_{13} = 4 +j17
Z_{14} = -2 -j12

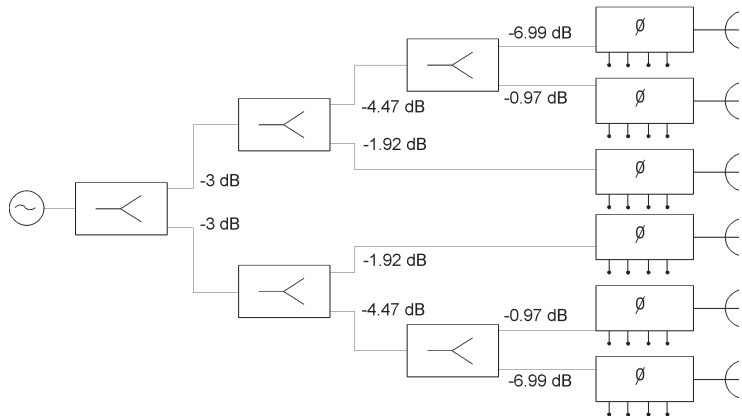


En ausencia del plano conductor, obtener:
a) Las matrices de impedancias y tensiones.
b) Si se supone que todas las corrientes son iguales, el diagrama de radiación, representándolo en los planos principales.
En presencia del plano conductor:
c) Dibujar los diagramas en los planos *E* y *H*, indicando la posición angular de los ceros.
d) Indicar un simetrizador que permita la conexión en A-A' de la cortina a un cable coaxial.

5.6 Las agrupaciones de barrido electrónico pueden sintetizar diagramas de radiación con el máximo orientado en direcciones arbitrarias. Se dispone de un sistema de 6 antenas, espaciadas 0,7λ, alimentadas a través de una red repartidora de potencia constituida por divisores tipo

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

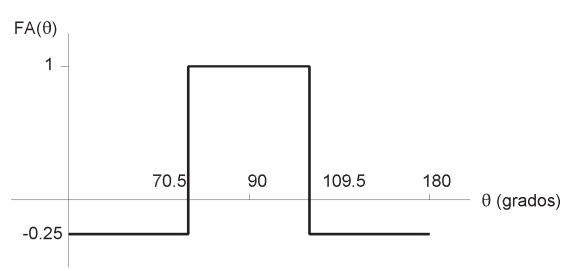
"*Wilkinson*" asimétricos conectados en cascada, junto con desfasadores controlados digitalmente mediante 4 bits.
Los números que se indican son dB relativos a la entrada de cada divisor de potencia. Las fases que se pueden conseguir con los desfasadores son 0º, 22,5º, 45º,..., 360º, equivalentes en hexadecimal a 0, 1, 2... F (16 niveles). Todos los caminos eléctricos son iguales.



a) Dibujar el diagrama de radiación indicando la posición de los ceros, para todas las fases iguales a 0º.
b) Si se desea un máximo de radiación desplazado 8º respecto de la dirección transversal, ¿qué bits estarán a 1 o 0? Indicarlo en formato hexadecimal. Dibujar la distribución de fase de la agrupación y compararla con la teórica.
c) Calcular, en el caso anterior, el campo en la dirección del máximo y compararlo con el caso a).
d) ¿Para qué desviación de haz aparecerá un lóbulo de difracción de amplitud igual al lóbulo principal?

5.7 Diseñar una agrupación uniforme de cuatro elementos con un nulo en la dirección opuesta al máximo.
a) Determinar los tres posibles diseños con un solo máximo principal, que cumplan las condiciones impuestas anteriormente. Dibujar los diagramas.
b) De los tres diseños anteriores, seleccionar el de mayor directividad y calcular para él la posición de los ceros y el nivel de lóbulos secundarios.
c) Manteniendo el margen visible del caso anterior (idéntico espaciado y desfase progresivo) realizar un diseño de Schelkunoff, consistente en situar los ceros equiespaciados en dicho margen visible. Obtener las corrientes en cada elemento y la relación delante-atrás.

5.8 Mediante síntesis de Fourier, diseñar una agrupación transversal de 7 elementos espaciados $\lambda/2$, que aproxime con mínimo error cuadrático medio un diagrama de la forma

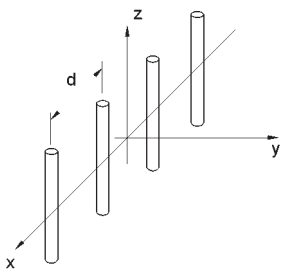


a) Obtener la corriente en cada antena.
b) Representar el diagrama real obtenido, indicando el ancho de haz entre ceros, y el nivel de lóbulo principal a secundario.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\psi)\cos(n\psi)d\psi = \pi\,\delta_{m,n}$$

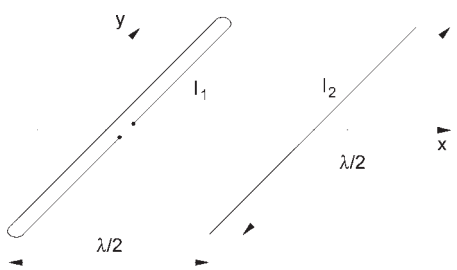
© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.9 Diseñar una agrupación binómica transversal de cuatro dipolos en λ/2, situados simétricamente a lo largo del eje *x* y con una separación $d = \lambda/2$. Los dipolos están orientados paralelos al eje *z*.



a) Encontrar los coeficientes de excitación, el factor de la agrupación y la expresión de los campos eléctricos en cualquier dirección del espacio.
b) Rediseñar la agrupación anterior para convertirla en una de Chebychev con un nivel de lóbulos secundarios de -40 dB, y obtener los coeficientes de excitación.

5.10 A una distancia de λ/2 de un dipolo doblado se coloca un dipolo parásito tal como se indica en la figura.



a) Calcular la relación entre las corrientes (I_2/I_1).
b) Obtener la impedancia de entrada del dipolo doblado.
c) Calcular la tensión inducida en el dipolo doblado (circuito abierto) si incide una onda $\vec{E} = \hat{y}e^{-jkx}$ mV / m de una frecuencia de 300 MHz.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6
Aperturas

Las antenas estudiadas hasta el momento han sido modeladas como distribuciones de corrientes, habitualmente sobre un soporte conductor y, por tanto, las herramientas de cálculo utilizadas en los capítulos anteriores respondían a esta filosofía. Este planteamiento se adapta bien a las antenas lineales, de dimensiones de algunas longitudes de onda como máximo, en las que se conoce la distribución de corriente sobre la estructura.

Cuando vamos subiendo en frecuencia, las dimensiones eléctricas de las antenas aumentan y sus formas empiezan a diferir de las geometrías lineales. Encontramos estructuras cuya misión es el confinamiento y la conformación de la radiación de una fuente primaria hasta conseguir frentes de onda capaces de generar diagramas secundarios de directividades elevadas y formas de diagrama específicas. En ellas, el responsable de la formación del diagrama de la antena no es ya la fuente primaria, sino la distribución de campos eléctricos y magnéticos en el frente de onda presente en la apertura de salida de la antena al espacio libre, conformados por el conjunto de toda la estructura.

A título de ejemplo estudiemos la antena de la figura 6.1, consistente en una guía de ondas rectangular alimentada por una sonda coaxial. En ella, la radiación de la fuente primaria (sonda coaxial) es transformada por la guía rectangular (confinamiento y conformación) en una distribución de campos en la boca de la guía (apertura), que al ser radiados al espacio libre producen el diagrama de radiación de la antena. El análisis de los campos producidos por esta estructura, en apariencia sencilla, mediante las herramientas utilizadas para las antenas lineales, obligaría primero al cálculo de las corrientes existentes sobre los conductores (sonda coaxial y paredes interiores y exteriores de la guía) y después al cálculo del vector de radiación por integración de todas estas corrientes sobre una superficie extensa y compleja.

Dado que la radiación se realiza a través de la boca de la guía (apertura), un planteamiento alternativo sería suponer que los campos radiados al espacio libre por las corrientes en el interior de la guía pueden obtenerse únicamente a partir del conoci-

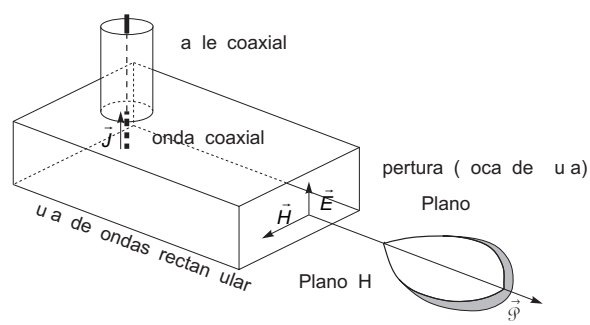


Fig. 6.1 Guía de ondas abierta como radiador

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

miento de la distribución de campos en la apertura. Esto, por una parte, evitaría el cálculo de la distribución de corrientes sobre toda la estructura y, por otra, permitiría realizar la integración sobre una superficie, en general, más simple.

Para que este procedimiento sea aplicable, en primer lugar es necesario ver que ambos planteamientos son equivalentes, y en segundo lugar establecer las herramientas que nos permitan calcular la radiación producida por una distribución de campos en lugar de una distribución de corrientes. En el apartado siguiente, basándonos en los teoremas de unicidad y equivalencia presentados en el capítulo 3, deduciremos la metodología de análisis de este tipo de antenas.

6.1 Campos radiados por aperturas

Entenderemos por apertura una región plana de superficie S_o sobre la que suponemos que existen unos campos iluminantes conocidos, $\vec{E}$ y $\vec{H}$. Es una situación general y puede referirse por ejemplo a una porción de un frente de onda, a una boca de guía o a un coaxial abierto. Aunque el término apertura puede generalizarse a cualquier superficie curva, en el análisis que sigue nos referiremos al caso plano, puesto que es el que más interés tiene y el que permite además una resolución analítica simple.

Deduciremos en primer lugar el equivalente electromagnético de una apertura y las expresiones necesarias para el cálculo de los campos radiados. A continuación particularizaremos las expresiones para aperturas rectangulares y circulares.

6.1.1. Equivalente electromagnético de una apertura

Sea la apertura plana de superficie S_o representada en la figura 6.2, que puede modelar, por ejemplo, la boca de guía descrita anteriormente. Los teoremas de unicidad y equivalencia introducidos en el capítulo 3, nos permitirán sustituir los campos existentes sobre esta superficie por una distribución de corrientes equivalentes.

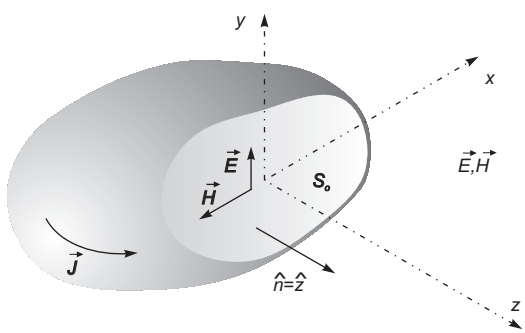


Fig. 6.2 Distribución de fuentes y apertura en el plano $z = 0$

En efecto, sea V la región libre de fuentes exterior a la superficie cerrada S formada por las paredes de la antena y la apertura. Supondremos que los campos en la superficie S son nulos excepto en la apertura S_o, donde son conocidos. Por el teorema de unicidad, si se conoce el valor de las componentes tangenciales de $\vec{E}$ y de $\vec{H}$ sobre S, la solución para cualquier punto de V es única. A efectos del interior del volumen V podemos sustituir el conocimiento de las fuentes exteriores a V (fuentes en el interior de la antena) por el conocimiento de los campos tangenciales eléctrico y magnético sobre la superficie S. El teorema de equivalencia permite entonces sustituir el problema de la figura 6.2 por uno equivalente en el que, dentro del volumen que ocupan las fuentes (interior de la antena), retiramos éstas e imponemos campos nulos, pero sobre S mantenemos los valores tangenciales $\hat{n} \times \vec{E}$ y $\hat{n} \times \vec{H}$ (ambos problemas son equivalentes). Al hacer esta sustitución los campos no pueden tener una discontinuidad si no existen unas fuentes equivalentes sobre S, dadas por las condiciones de contorno, que implican la existencia de densidades lineales de corrientes eléctrica $\vec{J}_s$ y magnética $\vec{M}_s$ de valor

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$
$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} \qquad (6.1)$$

Como se indica en la figura 6.3, hemos sustituido el problema original por otro equivalente, y hemos pasado de las fuentes reales o primarias a otras equivalentes sobre S. Estas corrientes equivalentes sólo son significativas en la apertura S_o. Sobre las paredes exteriores de la antena las corrientes equivalentes coinciden con las corrientes inducidas sobre el conductor y, al ser mucho menores que las corrientes equivalentes sobre la apertura, su contribución al campo radiado puede despreciarse. Por ello, para calcular el campo radiado se integran las corrientes equivalentes únicamente sobre la apertura S_o y no sobre el resto de la superficie S, lo qual equivale a considerar solamente la radiación de las corrientes que circulan por el interior de la antena y despreciar las corrientes en el exterior.

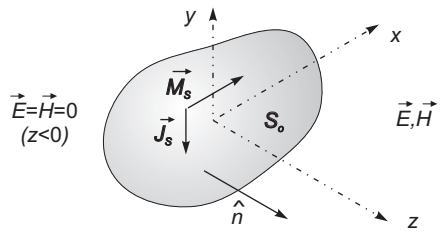


Fig. 6.3 Apertura equivalente en el plano $z = 0$

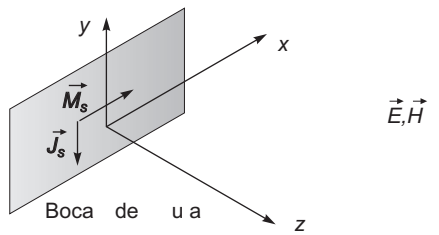


Fig. 6.4 Apertura equivalente de la boca de guía

A los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ sobre S_o se les da el nombre de campos primarios o iluminantes, a las corrientes $\vec{J}_s$ y $\vec{M}_s$ el de corrientes equivalentes o fuentes de Huygens, y a la superficie S_o el de superficie de Huygens. En la figura 6.4 se representa la apertura equivalente al problema original de la boca de guía de la figura 6.1.

A partir del conocimiento de las corrientes equivalentes podremos calcular los campos en cualquier punto del espacio mediante las expresiones desarrolladas en el capítulo 3 para corrientes eléctricas y magnéticas. El teorema de equivalencia nos garantiza la validez de los resultados en el exterior de la antena.

Hay situaciones en las que es difícil conocer con exactitud los campos que realmente existen en la apertura. Este puede ser el caso de la boca de guía abierta en el plano $z = 0$. En efecto, los campos en el interior de una guía rectangular infinita son perfectamente conocidos, pero cuando la guía se interrumpe bruscamente, en la sección del corte aparece una distribución residual de campos eléctricos y magnéticos que se superpone a la distribución original para cumplir las condiciones de contorno en la zona de la discontinuidad. En estos casos es habitual aproximar la distribución real de campos por los de la guía infinita. En la mayoría de situaciones esta aproximación permite obtener resultados precisos. Con todo hay que tener en cuenta que, dado que el teorema de equivalencia está siendo aplicado a unos campos aproximados, el resultado también lo será y, por lo tanto, las tres formulaciones del teorema de equivalencia pueden proporcionar resultados ligeramente distintos, de los cuales, en principio, ninguno es exacto.

6.1.2 Expresiones generales de los campos radiados

Sea la apertura S_o sobre la que suponemos existen unos campos iluminantes conocidos $\vec{E}$ y $\vec{H}$, tal como se indica en la figura 6.5, relacionados mediante una impedancia de onda Z_o y definidos por

$$\vec{E} = E_x \hat{x} \qquad \text{y} \qquad \vec{H} = H_y \hat{y} = \frac{E_x}{Z_0} \hat{y} \qquad (6.2)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

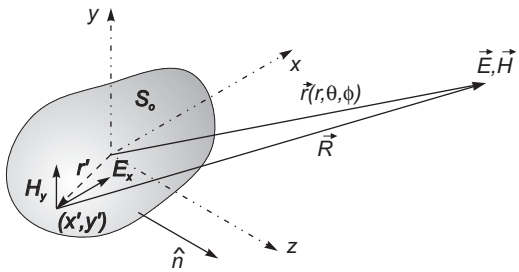


Fig. 6.5 Apertura en el plano $z = 0$

que son equivalentes a corrientes

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} = \hat{z} \times \hat{y} \frac{E_x}{Z_0} = -\frac{E_x}{Z_0} \hat{x}$$
$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} = -\hat{z} \times \hat{x}\, E_x = -E_x\, \hat{y} \tag{6.3}$$

Obsérvese que las corrientes eléctricas y magnéticas tienen la misma dirección, pero sentido contrario que los campos del mismo tipo y están relacionadas también por la impedancia de onda. Los vectores de radiación vienen dados por (6.3) y (3.113), y valen

$$N_x = \iint_{S_0} \left(-\frac{E_x}{Z_0} \right) e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy'$$
$$L_y = \iint_{S_0} (-E_x)\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy' \tag{6.4}$$

con $k_x = k \operatorname{sen}\theta \cos\phi$ y $k_y = k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ de (3.83). Sus componentes en coordenadas esféricas son

$$N_\theta = N_x \cos\theta \cos\phi, \quad N_\phi = -N_x \operatorname{sen}\phi$$
$$L_\theta = L_y \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad L_\phi = L_y \cos\phi \tag{6.5}$$

que resultan en los campos de radiación

$$E_\theta = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\eta N_x \cos\theta + L_y \right) \cos\phi \quad \text{y} \quad E_\phi = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\eta N_x + L_y \cos\theta \right) \operatorname{sen}\phi \tag{6.6}$$

y en función del campo iluminante E_x

$$E_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(1 + \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta \right) \cos\phi \iint_{S_0} E_x\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy'$$
$$E_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + \cos\theta \right) \operatorname{sen}\phi \iint_{S_0} E_x\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy' \tag{6.7}$$

De forma equivalente, obtendríamos para la polarización ortogonal

$$\vec{E} = E_y\, \hat{y}, \quad \vec{H} = -\frac{E_y}{Z_0} \hat{x} \tag{6.8}$$

los campos de radiación

$$E_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(1 + \frac{\eta}{Z_0} \cos\theta \right) \operatorname{sen}\phi \iint_{S_0} E_y\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy'$$
$$E_\phi = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + \cos\theta \right) \cos\phi \iint_{S_0} E_y\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy' \tag{6.9}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Nótese que las expresiones para los campos radiados (6.7) y (6.9) pueden interpretarse como transformadas de Fourier bidimensionales de la distribución de campos (iluminantes) en la apertura. Estas expresiones, al considerar únicamente la contribución de la distribución de campos en la apertura de la antena y despreciar la contribución de las corrientes residuales existentes sobre las paredes exteriores, tal y como se comentó en 6.1.1, ofrecen resultados precisos únicamente para direcciones próximas al lóbulo principal y primeros lóbulos secundarios. Para el cálculo del diagrama en direcciones alejadas del lóbulo principal es necesario introducir términos correctores que tengan en cuenta estas distribuciones adicionales de corriente.

A continuación desarrollamos el procedimiento para el cálculo de la directividad de aperturas planas. La directividad puede expresarse como

$$D = \frac{\wp_{máx}}{P_r / \left(4\pi r^2\right)}; \qquad \wp_{máx} = \frac{\left|E_{máx}\right|^2}{\eta}$$

donde P_r es la potencia radiada por la antena, es decir,

$$P_r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\theta,\phi) \times \vec{H}^*(\theta,\phi)\right] \cdot \hat{r}\, r^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta \, d\phi =$$
$$= \frac{1}{\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\left|E_\theta(\theta,\phi)\right|^2 + \left|E_\phi(\theta,\phi)\right|^2 \right) r^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta \, d\phi$$

Para antenas de apertura eléctricamente grandes es más simple calcular esta potencia por integración de los campos sobre la apertura. Así, para la apertura en el plano $z = 0$, se obtiene

$$P_r = \iint_{S_0} \mathrm{Re}\left[E_x H_y^* - E_y H_x^*\right] dx' \, dy' = \frac{1}{Z_0} \iint_{S_0} \left(\left|E_x(x',y')\right|^2 + \left|E_y(x',y')\right|^2 \right) dx' \, dy' \qquad (6.10)$$

Es habitual que la fase de los campos en la apertura sea constante, por lo que el máximo de radiación se produce en la dirección perpendicular a la misma ($\theta = 0$) y el módulo del campo máximo se puede expresar como

$$\left|E_{máx}\right| = \sqrt{\left|E_\theta\right|^2 + \left|E_\phi\right|^2} = \frac{1}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + 1 \right) \left(\left| \iint_{S_0} E_x(x',y')\, dx' \, dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x',y')\, dx' \, dy' \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la directividad resulta

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{1}{4} \frac{Z_0}{\eta} \left(\frac{\eta}{Z_0} + 1 \right)^2 \frac{\left| \iint_{S_0} E_x(x',y')\, dx' \, dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x',y')\, dx' \, dy' \right|^2}{\iint_{S_0} \left(\left|E_x(x',y')\right|^2 + \left|E_y(x',y')\right|^2 \right) dx' \, dy'} \qquad (6.11)$$

Para antenas eléctricamente grandes, la relación, Z_0, entre los campos eléctricos y magnéticos en la apertura, puede aproximarse en la mayoría de casos por la impedancia del vacío, η. Como valores de referencia, para una guía rectangular con a=2λ propagando el modo TE_{10}, la impedancia de onda resulta Z_0=1,03η y el coeficiente de reflexión de -15dB. La expresión (6.11) para la directividad puede pues aproximarse por:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \iint_{S_0} E_x(x', y')\, dx'\, dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x', y')\, dx'\, dy' \right|^2}{\iint_{S_0} \left(\left| E_x(x', y') \right|^2 + \left| E_y(x', y') \right|^2 \right) dx'\, dy'} \tag{6.12}$$

En estos casos es habitual introducir el concepto de eficiencia de iluminación, η_{il}, parámetro que relaciona el área efectiva y el área geométrica. Expresa la uniformidad de la distribución de campos en la apertura y es una medida de la utilización eficiente de toda la superficie de la apertura

$$A_{ef} = A_{geom}\, \eta_{il}$$

$$\eta_{il} = \frac{A_{ef}}{A_{geom}} = \frac{1}{S_0} \frac{\left| \iint_{S_0} E_x(x', y')\, dx'\, dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x', y')\, dx'\, dy' \right|^2}{\iint_{S_0} \left(\left| E_x(x', y') \right|^2 + \left| E_y(x', y') \right|^2 \right) dx'\, dy'} \tag{6.13}$$

Para el caso de una distribución uniforme, $\vec{E}(x, y) = E_1\, \hat{x} + E_2\, \hat{y}$, se tiene

$$\eta_{il} = \frac{E_1^2\, S_0^2 + E_2^2\, S_0^2}{\left(E_1^2 + E_2^2 \right) S_0^2} = 1$$

6.1.3 Apertura elemental

Supongamos una porción elemental de onda plana uniforme, $E_x = E_0$, $Z_0 = \eta$, que ocupa un elemento de superficie ΔS de dimensiones pequeñas en términos de λ. De (6.7) obtenemos

$$\begin{aligned} E_\theta &= j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) \cos\phi\, E_0\, \Delta S \\ E_\phi &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) \operatorname{sen}\phi\, E_0\, \Delta S \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$K = \frac{E_0^2 (\Delta S)^2}{\eta 4\lambda^2} (1 + \cos\theta)^2 = \frac{E_0^2 (\Delta S)^2}{\eta \lambda^2} \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right| \tag{6.15}$$

cuyo diagrama de radiación es una cardioide. La potencia total radiada es

$$P_r = \frac{E_0^2 (\Delta S)^2}{\eta 4\lambda^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{E_0^2 (\Delta S)^2}{\eta \lambda^2} \frac{4\pi}{3} \tag{6.16}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de la que se obtiene una directividad $D = 3$. Este valor resulta de la combinación ortogonal de un dipolo elemental eléctrico y de uno magnético, que es equivalente a una apertura elemental.

Las ecuaciones (6.7) y (6.9) son una generalización del Principio de Huygens, que postula que una porción elemental de un frente de onda origina una onda esférica con un carácter direccional dado por (1+cosθ), que toma un valor máximo en la dirección θ = 0, que es la dirección de propagación de la onda iluminante (6.2), (6.8) y se anula en la dirección opuesta (θ = π).

6.1.4 Apertura rectangular

Tomemos una superficie rectangular de dimensiones *a, b* iluminada por una onda polarizada linealmente según $\hat{x}$, $\vec{E} = E_x\,\hat{x}$. Referido a la figura 6.6 tenemos para los campos de radiación

$$\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right)\cos\phi\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_x\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy' \\ E_\phi &= -j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\operatorname{sen}\phi\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_x\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy' \end{aligned} \tag{6.17}$$

Si el campo eléctrico es separable, como habitualmente ocurre, tenemos

$$E_x = E_0\, f(x')\, g(y') \tag{6.18}$$

y los campos radiados quedan expresados como el producto de dos transformadas de Fourier unidimensionales, similares a las desarrolladas en el capítulo 3 y que se encuentran resueltas en el mismo para las distribuciones habituales

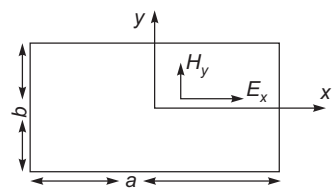


Fig. 6.6 Apertura rectangular

$$\begin{aligned} E_\theta &= jE_0\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right)\cos\phi\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x')\, e^{jk_x x'}\, dx'\right]\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g(y')\, e^{jk_y y'}\, dy'\right] \\ E_\phi &= -jE_0\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\operatorname{sen}\phi\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x')\, e^{jk_x x'}\, dx'\right]\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g(y')\, e^{jk_y y'}\, dy'\right] \end{aligned} \tag{6.19}$$

Estas expresiones (6.19) permiten una interpretación interesante de los campos radiados por la apertura, basada en que la distribución de corrientes puede escribirse como la convolución de las corrientes de la apertura elemental con la función de distribución de la apertura, $f(x')g(y')$. Los campos radiados serán entonces el producto de los campos de radiación de una apertura elemental por la transformada de Fourier bidimensional de la función distribución en la apertura, como puede comprobarse comparando (6.14) y (6.19). Si denominamos a las integrales anteriores $F(k_x,a)$ y $G(k_y,b)$, tenemos

$$\begin{aligned} E_\theta &= jE_0\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right)\cos\phi\, F\left(k_x, a\right) G\left(k_y, b\right) \\ E_\phi &= -jE_0\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\operatorname{sen}\phi\, F\left(k_x, a\right) G\left(k_y, b\right) \end{aligned} \tag{6.20}$$

que pueden ser particularizados para los dos cortes de campo principales:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

a) *Campos en el plano E*: Es el plano $y = 0$ (el que contiene el campo $\vec{E}$ y la dirección del máximo de radiación). En él,

$$\phi = 0,\ \pi;\quad |k_x| = k\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad k_y = 0$$

$$|E_\theta| = \frac{E_0}{2\lambda r}\left|\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right| F(k\,\mathrm{sen}\,\theta, a)\, G(0, b)\right| \tag{6.21}$$

$$E_\phi = 0$$

El diagrama de radiación en este plano está dado por la transformada de Fourier de la variación de la iluminación con x', $f(x')$, ya que $G(0,b)$ es el valor medio de $g(y')$. Es decir, en el plano xz que contiene al vector campo eléctrico y la dirección de máxima radiación, su diagrama de radiación es la transformada de Fourier de $f(x')$.

b) *Campos en el plano H:* Es el plano x=0 (plano yz) y está definido por

$$\phi = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2};\quad k_x = 0,\quad |k_y| = k\,\mathrm{sen}\,\theta$$

de lo que resulta

$$E_\theta = 0$$

$$|E_\phi| = \frac{E_0}{2\lambda r}\left|\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right| F(0, a)\, G(k\,\mathrm{sen}\,\theta, b)\right| \tag{6.22}$$

y en este caso el diagrama de campo viene dado por la transformada de Fourier de la variación de la iluminación según y', $g(y')$.

Para el caso de aperturas eléctricamente grandes y con el máximo de radiación en la dirección $\theta = 0$ (eje z) la expresión (6.12) puede reescribirse como

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}\frac{\left|\iint_{S_0} f(x')\,g(y')\,dx'\,dy'\right|^2}{\iint_{S_0}\left|f(x')\,g(y')\right|^2\,dx'\,dy'} \tag{6.23}$$

Haciendo el cambio de variables

$$s = \frac{x'}{a};\quad t = \frac{y'}{b} \tag{6.24}$$

se tiene

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}ab\frac{\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s)\,ds\right|^2\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\,dt\right|^2}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|f(s)|^2\,ds\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|g(t)|^2\,dt} = \frac{4\pi}{\lambda^2}\,a\,b\,\eta_{il} \tag{6.25}$$

Esta expresión es utilizable en general cuando $a,b > \lambda$. En la tabla 6.1 se indica su valor para cuatro distribuciones: uniforme, cosenoidal, triangular y ramas parabólicas decrecientes.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$f(s)$	$\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s)\,ds\right]^2$	$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^2(s)\,ds$	η_{il}
1	1	1	1
cos πs	$(2/\pi)^2$	1/2	$8/\pi^2$
1-2|s|	1/4	1/3	3/4
$(1-2\|s\|)^2$	1/9	1/5	5/9

Tabla 6.1 Eficiencia de iluminación de diferentes distribuciones (g(t)=1)

Apertura uniformemente iluminada

Vamos a particularizar las expresiones anteriores para una iluminación uniforme $E_x = E_0$, y $Z_0 = \eta$, que corresponde a $f(x') = 1$, $g(y') = 1$, de lo que resultan los campos de radiación dados por (6.20) con

$$F(k_x, a) = a\,\frac{\operatorname{sen} k_x \frac{a}{2}}{k_x \frac{a}{2}} = a\,\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right)}{k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi} \tag{6.26}$$

$$G(k_y, b) = b\,\frac{\operatorname{sen} k_y \frac{b}{2}}{k_y \frac{b}{2}} = b\,\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\right)}{k\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi} \tag{6.27}$$

y los campos siguientes para los dos planos principales

$$\text{plano } E: \qquad |E_\theta| = \frac{E_0\,a\,b}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\left|\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\right)}{k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta}\right|, \qquad E_\phi = 0 \tag{6.28}$$

$$\text{plano } H: \qquad E_\theta = 0, \qquad |E_\phi| = \frac{E_0\,a\,b}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\left|\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\right)}{k\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta}\right| \tag{6.29}$$

Los ceros de radiación se obtienen de los ceros de ambas funciones.

Para el plano E: $k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta_{c_n} = n\pi$; primer cero en $\theta_{c_1} = \operatorname{arcsen}\frac{\lambda}{a}$

- el primer cero aparece para $a = \lambda$ y $\theta_{c_1} = \pi$
- si $a >> \lambda$, $\theta_{c_1} = \frac{\lambda}{a}$, el ancho de haz entre nulos es $\Delta\theta_c = 2\frac{\lambda}{a}$

Los puntos de potencia mitad se obtienen de $ka\operatorname{sen}\theta_{-3dB}/2 = \pm 0{,}44\pi$ y el ancho de haz resultante es $\Delta\theta_{-3dB} = 0{,}88\lambda/a$. El nivel de lóbulo principal a secundario es de 13,2 dB. Para el plano H se obtienen expresiones similares con a sustituido por b.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En general, para aperturas grandes en términos de la longitud de onda, resultan unos anchos de haz del orden de λ/a y λ/b en cada plano principal.

El área efectiva puede obtenerse a partir de (6.13); al ser una distribución uniforme resulta $\eta_{il} = 1$ y por lo tanto

$$A_{ef} = A_{geom}\,\eta_{il} = a\,b \tag{6.30}$$

La directividad se obtiene entonces de (3.145) o de (6.25)

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}\,a\,b$$

La directividad que hemos obtenido puede calcularse también a partir de los campos y de la intensidad de radiación integrada sobre todo el espacio.

Apertura iluminada con el modo TE_{10}

Cualquier otra forma de iluminación, distinta de la uniforme, puede ser analizada de la misma manera utilizando las expresiones conocidas para distribuciones unidimensionales; es un caso de gran interés la iluminación producida en una boca de guía por un modo dominante TE_{10}, cuyos campos referidos al sistema de coordenadas de la figura 6.6 son

252

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \cos\frac{\pi}{a}x \\ H_x &= -E_y/Z_0 \end{aligned} \tag{6.31}$$

con

$$Z_0 = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

De (6.9) se pueden obtener los campos de radiación producidos. Haciendo uso de las correspondientes transformadas de Fourier, las expresiones resultantes son

$$\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right)\operatorname{sen}\phi\,\frac{\pi a}{2}\,\frac{\cos k_x\frac{a}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(k_x\frac{a}{2}\right)^2}\,b\,\frac{\operatorname{sen} k_y\frac{b}{2}}{k_y\frac{b}{2}} \\ E_\phi &= j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\cos\phi\,\frac{\pi a}{2}\,\frac{\cos k_x\frac{a}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(k_x\frac{a}{2}\right)^2}\,b\,\frac{\operatorname{sen} k_y\frac{b}{2}}{k_y\frac{b}{2}} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Para una boca de guía monomodo se tiene un haz muy ancho y poca directividad. Por ejemplo, para una guía estándar en banda X (designada por las siglas *WR90* o *RG52/U*) cuyas dimensiones internas son a = 0,9'' = 22,8 mm, b = 0,4'' = 10,2 mm, se obtiene a 10 GHz, partiendo de las expresiones anteriores,

$$\Delta\theta^E_{-3\text{dB}} = 120^\circ, \quad \Delta\theta^H_{-3\text{dB}} = 80^\circ$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y una directividad D=4.1 (6dB). Estos valores son aproximados, dado que el modelo no considera ni las corrientes sobre las paredes exteriores de la guía ni la reflexión producida en la boca, cuyo efecto relativo puede ser importante dadas las dimensiones eléctricas reducidas de la apertura.

Cuando $a,b > \lambda$, se tiene

$$\Delta\theta^{E}_{-3\mathrm{dB}} \approx 50\,\frac{\lambda}{b}\,(^\circ), \quad \Delta\theta^{H}_{-3\mathrm{dB}} \approx 67\,\frac{\lambda}{a}\,(^\circ)$$

$$NLPS^{E} \approx 13{,}2\ \mathrm{dB}, \quad NLPS^{H} \approx 23\ \mathrm{dB}$$

$$D = 10{,}2\,ab/\lambda^2, \qquad \eta_{il} = 0{,}81$$

En general se obtienen anchos de haz distintos en el plano E y en el plano H. Pueden conseguirse diagramas aproximadamente iguales en ambos planos si se tiende hacia la relación $a / b \approx \pi / 2$.

6.1.5 Apertura circular

Se utilizan también en microondas aperturas circulares, habitualmente de dimensiones comparables, mayores o mucho mayores que la longitud de onda, de las que el ejemplo más habitual es el reflector parabólico, que analizaremos en detalle en la sección 6.4.2. Consideraremos ahora una apertura circular iluminada por una onda linealmente polarizada $\vec{E} = E_x\,\hat{x}$, $\vec{H} = \hat{y}E_x / \eta$. Para la geometría representada en la figura 6.7, teniendo en cuenta que

$$\hat{r}\cdot\vec{\rho}' = \rho'\,\mathrm{sen}\,\theta\cos(\phi-\phi'), \qquad ds' = \rho'\,d\phi'\,d\rho'$$

de (6.7) se obtiene

$$E_\theta = j\,\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\,(1+\cos\theta)\cos\phi\int_0^a\int_0^{2\pi} E_x\,e^{jk\rho'\,\mathrm{sen}\theta\cos(\phi-\phi')}\,\rho'\,d\phi'\,d\rho'$$

$$E_\phi = -j\,\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\,(1+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\phi\int_0^a\int_0^{2\pi} E_x\,e^{jk\rho'\,\mathrm{sen}\theta\cos(\phi-\phi')}\,\rho'\,d\phi'\,d\rho' \qquad (6.33)$$

$$K = \frac{1}{\eta\lambda^2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^4\left|\int_0^a\int_0^{2\pi} E_x\,e^{jk\rho'\,\mathrm{sen}\theta\cos(\phi-\phi')}\,\rho'\,d\phi'\,d\rho'\right|^2 \qquad (6.34)$$

Si la iluminación es uniforme, $E_x = E_0$, y teniendo en cuenta las relaciones

$$\int_0^{2\pi} e^{jz\cos x}\,dx = 2\pi J_0(z) \qquad (6.35)$$

$$\int_0^z z'\,J_0(z')\,dz' = z\,J_1(z) \qquad (636)$$

se tiene

$$K = \frac{E_0^2}{\eta\lambda^2}\,4\pi^2 a^4\cos^4\frac{\theta}{2}\left|\frac{J_1(ka\,\mathrm{sen}\theta)}{ka\,\mathrm{sen}\theta}\right|^2 \qquad (6.37)$$

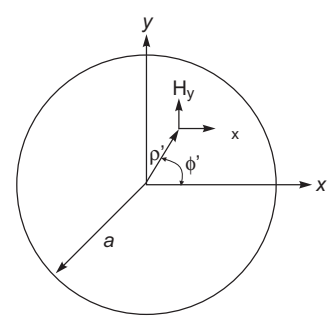


Fig. 6.7 Apertura circular

Los puntos de potencia mitad $\theta_{-3\mathrm{dB}}$ se obtienen para $ka\,\mathrm{sen}\,\theta_{-3\mathrm{dB}} \approx \pm 1{,}6$, con el resultado

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\Delta\theta_{-3\text{dB}} \approx \frac{1{,}6}{\pi}\frac{\lambda}{a} \approx \frac{\lambda}{diámetro}$$

$$A_{ef} = A_{geom}\,\eta_{il} = \pi a^2 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{4\pi}{\lambda^2}\pi a^2 = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2$$

$$NLPS = 17{,}6\ \text{dB}$$

La tabla 6.2 da los parámetros de radiación para varias iluminaciones típicas con simetría de revolución de la forma $(1-(\rho'/a)^2)^p$, para p= 0,1,2, que tienen un comportamiento similar a las distribuciones lineales unidimensionales, siendo p=0 la iluminación uniforme anterior.

TIPO DE DISTRIBUCIÓN $f(r),\ r=\rho'/a$ $0\le r\le 1$	DIAGRAMA DE CAMPO $E(u)$ $(u = kasen\theta)$	$\Delta\theta_{-3\text{dB}}$	ÁNGULO AL PRIMER CERO θ_c	NLPS (dB)	η_{il}
1	$\pi a^2 \frac{J_1(u)}{u}$	$1{,}02\lambda/(2a)$	$1{,}22\lambda/(2a)$	17,6	1
$1-r^2$	$2\pi a^2 \frac{J_2(u)}{u^2}$	$1{,}26\lambda/(2a)$	$1{,}62\lambda/(2a)$	24,6	0,75
$(1-r^2)^2$	$8\pi a^2 \frac{J_3(u)}{u^3}$	$1{,}46\lambda/(2a)$	$2{,}02\lambda/(2a)$	30,6	0,56

Tabla 6.2 Parámetros de radiación de aperturas circulares

Apertura iluminada con el modo TE_{11}

254

Un caso de interés es el de la boca de guía circular iluminada con el modo dominante TE_{11}, cuyos campos referidos al sistema de coordenadas de la figura 6.7 son

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{A}{\rho'} J_1\left(\frac{q_{11}}{a}\rho'\right) \operatorname{sen}\phi' \\ E_\phi &= A\frac{\partial}{\partial\rho'}\left[J_1\left(\frac{q_{11}}{a}\rho'\right)\right]\cos\phi' \end{aligned} \qquad (6.38)$$

donde q_{11}=1,84118 es el primer cero de la derivada de la función de Bessel de orden 1 ($J'_1(q_{11})=0$). Los campos en la apertura de la guía toman en cartesianas los valores

$$E_x = A\frac{q_{11}}{2a} J_2\left(\frac{q_{11}}{a}\rho'\right) \operatorname{sen}2\phi'$$

$$E_y = A\frac{q_{11}}{2a}\left[J_0\left(\frac{q_{11}}{a}\rho'\right) - J_2\left(\frac{q_{11}}{a}\rho'\right)\cos 2\phi'\right]$$

que pueden ser integrados mediante las expresiones (6.7) y (6.9) para obtener los campos radiados, que resultan valer

$$\begin{aligned} E_\theta &= jAkaJ_1(q_{11})\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{1+\cos\theta}{2}\frac{J_1(ka\operatorname{sen}\theta)}{ka\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\phi \\ E_\phi &= jAkaJ_1(q_{11})\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{1+\cos\theta}{2}\frac{J_1'(ka\operatorname{sen}\theta)}{1-\left[\frac{ka\operatorname{sen}\theta}{q_{11}}\right]^2}\cos\phi \end{aligned} \qquad (6.39)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Para una guía monomodo de radio $a = 9$ mm a f = 12 GHz ($a = 0{,}36\lambda$) se calculan unos anchos de haz en los planos principales de valor

$$\Delta\theta^{E}_{-3\text{dB}} = 74^\circ, \qquad \Delta\theta^{H}_{-3\text{dB}} = 87^\circ$$

y una directividad D = 4.3 (6.3 dB), que se corresponde con una eficiencia de iluminación del 83%. En la práctica, como para el caso de la guía rectangular con el modo TE_{10}, al ser las dimensiones de la apertura pequeñas en términos de la longitud de onda, dado que las expresiones (6.39) sólo consideran las corrientes equivalentes en la apertura, los valores experimentales obtenidos pueden diferir ligeramente de estos valores.

Para bocas de guía sobredimensionadas se obtiene, cuando $2a > \lambda$

$$\Delta\theta^{E}_{-3\text{dB}} \approx 29\,\frac{\lambda}{a}\,(^\circ), \quad \Delta\theta^{H}_{-3\text{dB}} \approx 34\,\frac{\lambda}{a}\,(^\circ)$$

$$NLPS^{E} \approx 18\ \text{dB}, \quad NLPS^{H} \approx 27\ \text{dB}$$

$$D = 10{,}5\,\frac{\pi a^2}{\lambda^2}, \quad \eta_{il} = 0{,}83$$

6.2 Bocinas

La utilización como radiadores de las bocas de guía monomodo, rectangulares y circulares, permite alcanzar directividades moderadas, pero presentan una desadaptación en la boca de la guía. Para mejorar su directividad y adaptación tenemos que aumentar sus dimensiones eléctricas, asegurando que la estructura siga siendo monomodo; para ello el agrandamiento tiene que hacerse gradualmente, en forma de bocina.

6.2.1 Bocinas sectoriales y piramidal

Las bocinas, geometrías de sección creciente producidas por abocinamiento de una guía de ondas, son estructuras radiantes muy utilizadas, y las derivadas de la guía rectangular son principalmente de tres tipos. La bocina de plano E se obtiene abriendo las placas anchas, las perpendiculares al campo eléctrico en la guía, manteniendo la anchura de la guía a (Fig. 6.8a). La bocina de plano H abre las placas estrechas, que son las perpendiculares al campo magnético, manteniendo la altura b de la guía (Fig. 6.8b). La piramidal abre simultáneamente los dos pares de placas (Fig. 6.8c).

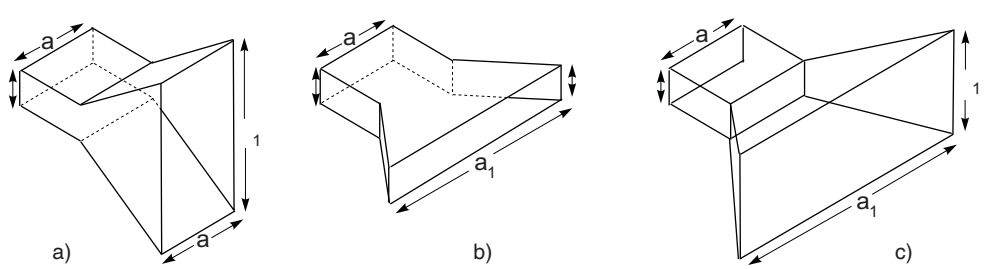


Fig. 6.8 Bocinas de sección rectangular: a) sectorial de plano *E,* b) sectorial de plano *H* y c) piramidal

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Bocina sectorial de plano E

Analizaremos en detalle la bocina de plano E (Fig. 6.8a), determinando primero los campos en la boca de la bocina cuando se excita desde la guía con una onda TE_{10}. La estructura infinita de la figura 6.9, para el sistema de coordenadas cilíndricas (ϕ, ρ, x) en ella representada, soporta un modo fundamental de tipo TE_{10}.

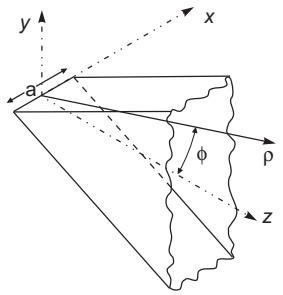


Fig. 6.9 Estructura infinita de tipo bocina sectorial de plano E

Si buscamos un modo TE_{10} veremos que existen, por semejanza con la guía rectangular, campos con componentes E_ϕ, H_x y H_ρ, que no tendrán variación con ϕ.

Las ecuaciones $\nabla \times \vec{H} = j\,\omega\,\varepsilon\,\vec{E}$ y $\nabla \times \vec{E} = -\,j\,\omega\,\mu\,\vec{H}$ escritas en cilíndricas (ϕ, ρ, x) dan origen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\rho}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial \rho} &= j\,\omega\,\varepsilon\,E_\phi \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,E_\phi\right) &= -\,j\,\omega\,\mu\,H_x \\ -\frac{\partial E_\phi}{\partial x} &= -\,j\,\omega\,\mu\,H_\rho \end{aligned} \tag{6.40}$$

Derivando la segunda ecuación respecto a ρ, la tercera respecto a x y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_\phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) E_\phi = 0 \tag{6.41}$$

que es la ecuación de onda de E_ϕ expresada en cilíndricas, y sujeta a una condición de contorno $E_\phi(x = \pm a/2) = 0$. Mediante separación de variables da una solución

$$E_\phi = \left[\cos\frac{\pi}{a}x\right]\left[A\,H_1^{(1)}(\beta\rho) + B\,H_1^{(2)}(\beta\rho)\right] \tag{6.42}$$

con $H_1^{(1),(2)}$ las funciones de Hankel de orden 1 de 1ª y 2ª especie, y la constante de fase β dada por

$$\beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

idéntica a la de la guía rectangular de igual anchura a.

Para argumentos ($\beta\rho$) grandes se aproximan las funciones de Hankel mediante

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(\beta\rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}}\,e^{\,j\left(\beta\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} \\ H_n^{(2)}(\beta\rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}}\,e^{-j\left(\beta\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} \end{aligned} \tag{6.43}$$

que, combinados con $e^{j\omega t}$, dan origen a dos ondas que se propagan en sentidos opuestos. En este caso, bocina infinita, sólo existirá la segunda solución y podemos escribir en general

$$E_\phi = B'\cos\frac{\pi}{a}x\,e^{-j\beta\rho} \tag{6.44}$$

de la que se obtiene $H_x = -E_\phi / Z_0$ con $Z_0 = \eta\left(1 - (\lambda/2a)^2\right)^{-1/2}$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Las bocinas reales tienen dimensiones finitas, pero se encuentra que, si son del orden de al menos una longitud de onda, los campos en la boca son aproximadamente los mismos que si fueran infinitas. Si truncamos a una distancia ℓ_E tenemos, referido a la figura 6.10

$$\rho = \ell_E - \delta(y) \qquad (6.45)$$

El campo en la boca de una bocina, cuyo ángulo de abertura ψ sea pequeño, resultará

$$E_y = E_0' \cos\frac{\pi}{a} x\, e^{j\beta\delta(y)} \qquad (6.46)$$

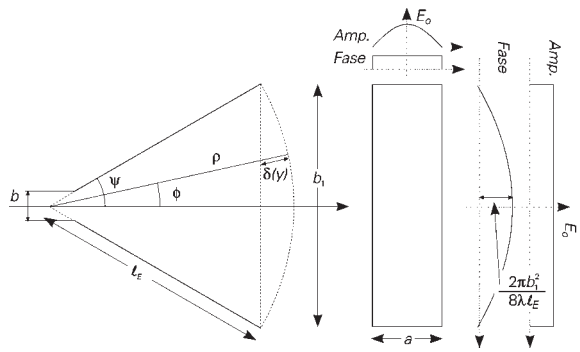


Fig. 6.10 Corte de una bocina sectorial de plano E y distribución de campos en su boca

similar al modo TE_{10} en la guía rectangular.

El desfase $\beta\delta(y)$ surge como consecuencia de que la boca plana de la bocina no coincide con una superficie de fase constante (cilíndrica). La expresión de $\delta(y)$ es

$$\begin{aligned}\delta(y) &\approx \ell_E\left(\sqrt{1-\text{sen}^2\,\phi}-\sqrt{1-\text{sen}^2\,\psi}\right) \approx \frac{\ell_E}{2}\left(\text{sen}^2\,\psi-\text{sen}^2\,\phi\right) = \\ &= \frac{\ell_E}{2}\left[\left(\frac{b_1/2}{\ell_E}\right)^2-\frac{y^2}{\ell_E^2}\right] = \frac{b_1^2}{8\ell_E}-\frac{y^2}{2\ell_E}\end{aligned} \qquad (6.47)$$

en la que se observa que la máxima variación en δ es $b_1^2/(8\ell_E)$ y, en términos de la longitud de onda en la guía, $s = b_1^2/(8\lambda\ell_E)$. El campo en la boca de la bocina resulta finalmente

$$E_y \approx E_0 \cos\frac{\pi}{a} x\, e^{-j\frac{\beta}{2\ell_E}y^2} \qquad (6.48)$$

que sustituido en (6.9) da origen a campos de radiación de valor

$$\begin{aligned}E_\theta &= j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right)\text{sen}\phi\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_0\cos\frac{\pi}{a}x'\, e^{-j\beta\frac{y'^2}{2\ell_E}}\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy' \\ E_\phi &= j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\cos\phi\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_0\cos\frac{\pi}{a}x'\, e^{-j\beta\frac{y'^2}{2\ell_E}}\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy'\end{aligned} \qquad (6.49)$$

similares a los de la boca de guía, salvo en el término de fase cuadrática, que es de gran trascendencia, ya que si su valor es apreciable distorsiona el diagrama de radiación.

En la dirección de máxima radiación, $\theta = 0$, los campos radiados valen

$$\left|E_{rad}(\theta=0)\right| = \frac{E_0}{2\lambda r}\left(\frac{\eta}{Z_0}+1\right)\left|\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos\frac{\pi}{a}x'\, dx'\right|\left|\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} e^{-j\frac{\beta}{2\ell_E}y'^2}\, dy'\right| \qquad (6.50)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El último factor es una integral de Fresnel. La constante de fase β en la guía puede aproximarse, en la mayoría de las situaciones, por la del vacío $k = 2\pi/\lambda$, así como la impedancia del modo Z_o por η. Con el cambio $u^2 = 2y'^2/(\lambda \ell_E)$ se tiene en esa última integral

$$\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} e^{-j\frac{\pi}{\lambda \ell_E} y'^2}\, dy' = 2\sqrt{\frac{\lambda \ell_E}{2}} \int_0^{\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \ell_E}}} e^{-j\frac{\pi}{2}u^2}\, du \qquad (6.51)$$

La integral de Fresnel se define como

$$\int_0^v e^{-j\frac{\pi}{2}u^2}\, du = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du - j\int_0^v \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du = C(v) - jS(v) \qquad (6.52)$$

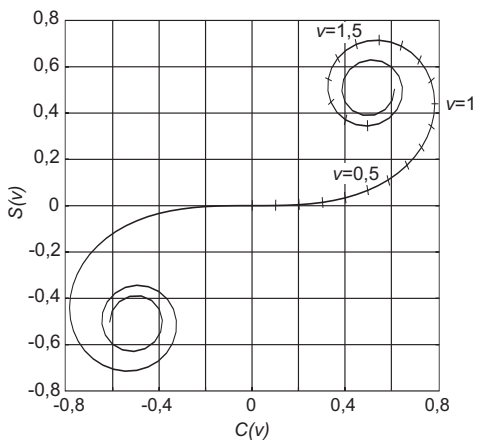


Fig. 6.11 Representación paramétrica de la integral de Fresnel (espiral de Cornu)

que representada en el plano complejo $C(v)$, $S(v)$ en función del parámetro v da origen a una espiral de Cornu, que converge asintóticamente a los valores (1/2,1/2),(-1/2,-1/2). La figura 6.11 representa la integral en función del parámetro $v = b_1/\sqrt{2\lambda \ell_E}$, que es un indicador de la relación de aspecto de la bocina. El módulo de la integral de Fresnel es proporcional a la distancia desde el origen al punto de la curva correspondiente al valor del parámetro. Cuando v crece desde cero, aumentan las dimensiones eléctricas de la bocina y el módulo de la integral de Fresnel y, en consecuencia, el valor del campo en la dirección del máximo. Si v sigue creciendo, las dimensiones eléctricas siguen aumentando, pero empieza a crecer también el error de fase en la apertura; el módulo de la integral de Fresnel va creciendo más lentamente hasta llegar a un valor de v en torno a 1, donde los dos efectos se compensan. A partir de ahí, al seguir aumentando v, el valor de la integral empieza a decrecer y a girar en torno al punto (1/2,1/2).

La densidad de potencia, $\wp_{máx}$, radiada en la dirección θ = 0, es en función de (6.50) a (6.52)

$$\wp_{máx} = \frac{|E_{rad}|^2}{\eta} = \frac{8E_0^2 a^2 \ell_E}{\eta \pi^2 \lambda r^2}\left[C^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \ell_E}}\right) + S^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \ell_E}}\right)\right] \qquad (6.53)$$

La potencia total radiada se obtiene en la boca de la bocina y resulta

$$P_r = \frac{1}{\eta}\int_{-b_1/2}^{b_1/2}\int_{-a/2}^{a/2} |E_y|^2\, ds' = \frac{E_0^2}{\eta}\int_{-b_1/2}^{b_1/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2\frac{\pi}{a}x'\, dx' = \frac{E_0^2\, a\, b_1}{2\eta} \qquad (6.54)$$

y la directividad $D_E = (4\pi r^2 \wp_{máx})/P_r$ vale

$$D_E = \frac{64\, a\, \ell_E}{\pi \lambda b_1}\left[C^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \ell_E}}\right) + S^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \ell_E}}\right)\right] \qquad (6.55)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La figura 6.12 muestra una representación normalizada de la directividad $D_E \lambda/a$, en función de b_1/λ. De la forma de la figura 6.11 se deriva este comportamiento de las curvas, debido al carácter espiral de la integral de Fresnel. Se obtiene un valor óptimo cuando $v = b_1 / \sqrt{2\lambda \ell_E} \approx 1$, que corresponde a un error máximo de fase en la boca de la bocina $s = b_1^2 / (8\lambda \ell_E) = 1/4$. De las gráficas de la figura 6.12 puede obtenerse que, para la bocina óptima, $\eta_{il} = 0{,}64$. En esta gráfica la envolvente externa $(\ell_E/\lambda \to \infty)$ se corresponde con la ausencia de error de fase en la boca de la bocina, es decir, con la apertura rectangular iluminada por el modo TE_{10} vista en la sección 6.1.4. La figura 6.13 es una curva universal de la intensidad de campo normalizada para bocinas, parametrizada en función del máximo error de fase *s*, obtenida a partir de las integrales de (6.49); en ella no se incluye el factor (1+cosθ)/2, que hay que añadir para obtener el diagrama real de campo de la bocina. Obsérvese que al aumentar el error de fase se produce una gran distorsión de la curva y muy especialmente un enmascaramiento muy marcado de los ceros. De las curvas puede deducirse que para el diseño óptimo

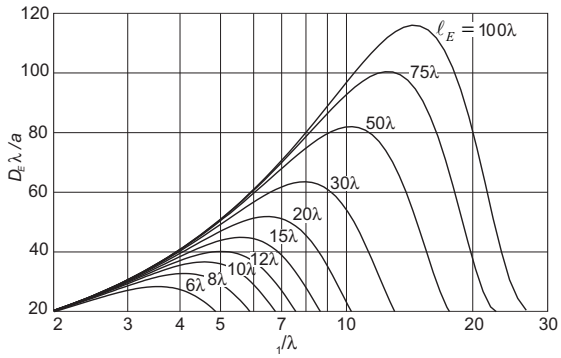


Fig. 6.12 Directividad de una bocina sectorial de plano E

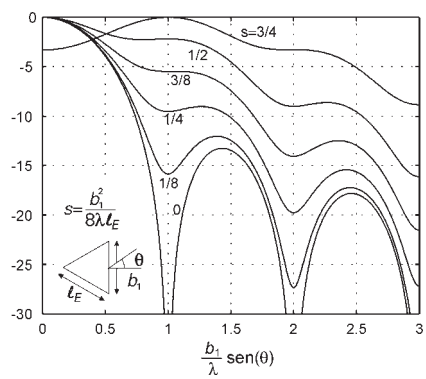


Fig. 6.13 Intensidad relativa de campo de una bocina sectorial de plano E. No se incluye el factor (1+cosθ)/2

$$\Delta\theta^E_{-3\text{dB}} \approx 56\,\frac{\lambda}{b_1}\,(^\circ), \quad \Delta\theta^H_{-3\text{dB}} \approx 67\,\frac{\lambda}{a}\,(^\circ)$$

$$NLPS^E \approx 10\ \text{dB}, \quad NLPS^H \approx 23\ \text{dB}$$

$$D = 8\,\frac{a\,b_1}{\lambda^2}, \quad \eta_{il} = 0{,}64$$

Bocina sectorial de plano H

Para la bocina de la figura 6.8b se obtiene de forma similar

$$E_y = E_0 \cos\frac{\pi}{a_1} x\, e^{j\beta\delta(x)} \tag{6.56}$$

con $\delta(x) = \dfrac{a_1^2}{8\ell_H} - \dfrac{x^2}{2\ell_H}$; los campos y la directividad se calculan de igual manera, y resulta

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$D_H = \frac{4\pi b \ell_H}{\lambda a_1}\left[\left(C(u)-C(v)\right)^2 + \left(S(u)-S(v)\right)^2 \right] \tag{6.57}$$

donde

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{\lambda \ell_H}}{a_1} + \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \ell_H}}\right],\quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{\lambda \ell_H}}{a_1} - \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \ell_H}}\right] \tag{6.58}$$

El comportamiento óptimo de la bocina se obtiene para

$$a_1 = \sqrt{3\lambda \ell_H} \tag{6.59}$$

al que corresponde un máximo error de fase en la boca de la bocina de valor

$$t = \frac{a_1^2}{8\lambda \ell_H} = \frac{3}{8} \tag{6.60}$$

Las figuras 6.14 y 6.15 muestran la directividad D_{H} y el diagrama de radiación de campo parametrizado con el máximo error de fase. De las gráficas de la figura 6.14 puede obtenerse que para la bocina óptima se tiene $\eta_{il} = 0{,}62$, prácticamente igual que para la bocina de plano E. Se observa que el comportamiento óptimo se obtiene con un error de fase máximo en la apertura mayor que para la bocina de plano E. Ello es debido a que la contribución de las zonas extremas de la apertura, donde el error de fase con respecto al centro es mayor, vienen ponderadas por la distribución cosenoidal de amplitud, por lo que su peso relativo es menor. De nuevo, en la figura 6.14, la envolvente ($\ell_H / \lambda \to \infty$) es la apertura iluminada con el modo TE_{10}. De la figura 6.15 puede deducirse que para el diseño óptimo

$$\Delta\theta^E_{-3\mathrm{dB}} \approx 50\frac{\lambda}{b}(^\circ),\quad \Delta\theta^H_{-3\mathrm{dB}} \approx 78\frac{\lambda}{a_1}(^\circ)$$

$$NLPS^E \approx 13\,\mathrm{dB},\quad NLPS^H \approx 12\,\mathrm{dB}$$

$$D = 7{,}9\frac{a_1 b}{\lambda^2},\quad \eta_{il} = 0{,}62$$

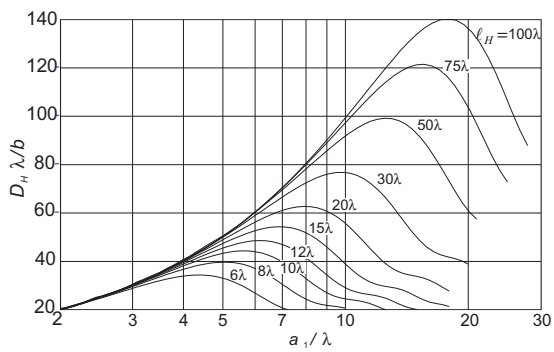


Fig. 6.14 Directividad de una bocina sectorial de plano *H*

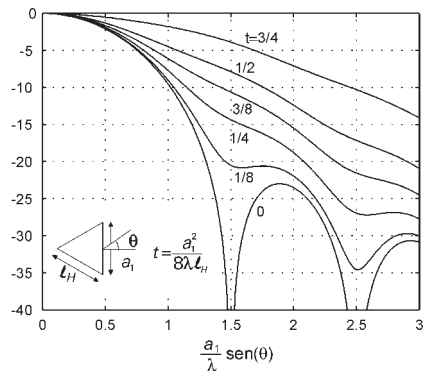


Fig. 6.15 Intensidad relativa de campo en una bocina sectorial de plano H. No se incluye el factor (1+cosθ)/2

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Bocina piramidal

Es la configuración habitual y en ella se abren ambos planos (Fig. 6.8c); el campo iluminante vale

$$E_y = E_0 \cos\frac{\pi}{a_1} x\, e^{j\beta(\delta(x)+\delta(y))} \tag{6.61}$$

Con los parámetros de las bocinas sectoriales se tiene

$$\delta(x)+\delta(y) = \frac{a_1^2}{8\ell_H} + \frac{b_1^2}{8\ell_E} - \frac{x^2}{2\ell_H} - \frac{y^2}{2\ell_E} \tag{6.62}$$

y su directividad resulta ser aproximadamente el producto de la de una bocina de plano E y la de una de plano H; está dada por la expresión

$$D_{piramidal} = \left| D_E \frac{\lambda}{a_1} \right| \left| D_H \frac{\lambda}{b_1} \right| \frac{\pi}{32} \tag{6.63}$$

De esta relación y de las eficiencias de iluminación de las bocinas sectoriales correspondientes resulta, para la bocina piramidal óptima,

$$s = \frac{b_1^2}{8\lambda\ell_E} = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{a_1^2}{8\lambda\ell_H} = \frac{3}{8}$$

$$\Delta\theta^E_{-3\text{dB}} \approx 56\frac{\lambda}{b_1}(^\circ), \quad \Delta\theta^H_{-3\text{dB}} \approx 78\frac{\lambda}{a_1}(^\circ)$$

$$NLPS^E \approx 10\,\text{dB}, \quad NLPS^H \approx 12\,\text{dB}$$

$$D = 6{,}4\frac{a_1 b_1}{\lambda^2}, \quad \eta_{il} = 0{,}51$$

Las bocinas comerciales responden con gran aproximación a estos valores, y es posible obtener fácilmente directividades de hasta 20 dB. En la figura 6.16 se representa la geometría de la bocina que se analiza a continuación.

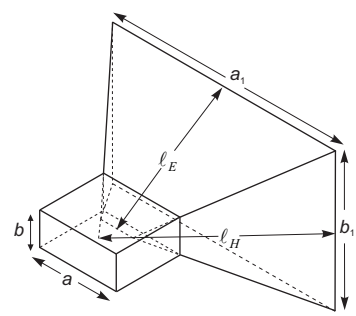


Fig. 6.16 Bocina piramidal alimentada por una guía rectangular

Ejemplo 6.1 Una bocina piramidal tiene unas dimensiones ℓ_E = 27,4 cm, ℓ_H = 27,7 cm, a_1 = 12,2 cm, b_1 = 9,2 cm, a = 2,3 cm, b = 1 cm; vamos a obtener su directividad y el diagrama de radiación en los dos planos principales a una frecuencia de 10 GHz.
Calculamos en primer lugar sus dimensiones eléctricas

ℓ_E = 27,4 cm = 9,13 λ, b_1 = 9,2 cm = 3,07 λ
ℓ_H = 27,7 cm = 9,23 λ, a_1 = 12,2 cm = 4,07 λ
a = 2,3 cm = 0,77 λ, b = 1,0 cm = 0,33 λ

de la ecuación (6.55) o, equivalentemente, de la gráfica de la figura 6.12, obtenemos para b_1/λ = 3,07 y ℓ_E = 9,13 λ

$$D_E \frac{\lambda}{a_1} = 27{,}5$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

De forma similar, usando (6.57) o la gráfica de la figura 6.14, obtenemos para $a_1/\lambda = 4{,}07$ y $\ell_H = 9{,}23\lambda$

$$D_H \frac{\lambda}{b_1} = 37{,}7$$

A partir de la expresión (6.63) para la directividad de una bocina piramidal se tiene

$$D_{piramidal} = \left(D_E \frac{\lambda}{a_1} \right) \left(D_H \frac{\lambda}{b_1} \right) \frac{\pi}{32} = 101{,}8 = 20{,}1 \text{ dB}$$

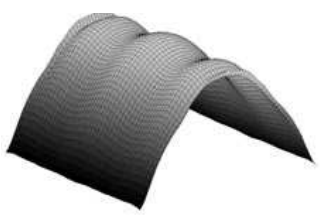
La iteración de los pasos anteriores para distintas frecuencias nos permitiría obtener la ganancia para toda la banda de funcionamiento.

Para el cálculo del diagrama de radiación, sustituimos la expresión (6.61) de la distribución de campos en la boca de la bocina en las expresiones (6.9) de los campos radiados por una apertura rectangular con el campo eléctrico polarizado según $\hat{y}$, con la suposición de que $Z_0 \approx \eta$ al ser $a_1, b_1 > \lambda$, de lo que se obtiene

$$E_\theta(\theta,\phi) = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\,\text{sen}\,\phi \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} E_0 \cos\frac{\pi}{a_1}x'\, e^{-j\frac{kx'^2}{2\ell_H}}\, e^{-j\frac{ky'^2}{2\ell_E}}\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy'$$

$$E_\phi(\theta,\phi) = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\cos\phi \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} E_0 \cos\frac{\pi}{a_1}x'\, e^{-j\frac{kx'^2}{2\ell_H}}\, e^{-j\frac{ky'^2}{2\ell_E}}\, e^{jk_x x'}\, e^{jk_y y'}\, dx'\, dy'$$

que son una generalización al caso piramidal de las expresiones (6.49) para la bocina sectorial del plano E. La expresión (6.61) considera únicamente el modo TE_{10} incidente en la boca de la bocina y por lo tanto no toma en consideración la onda reflejada en la apertura.



En aquellos casos en que estemos interesados en una precisión elevada en el diagrama de radiación calculado, podemos partir de un modelo más preciso de los campos iluminantes que considere las condiciones de contorno en la apertura, tal y como se muestra en la figura siguiente.

El diagrama en los dos planos principales puede obtenerse particularizando estas expresiones. Para el diagrama en el plano E, $\phi = \pm\pi/2$ ($k_y = \pm k\,\text{sen}\theta$, $k_x = 0$), se tiene

$$E_\theta\left(\theta, \phi = \pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta) \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} E_0 \cos\frac{\pi}{a_1}x'\, e^{-j\frac{kx'^2}{2\ell_H}}\, dx' \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} e^{-j\frac{ky'^2}{2\ell_E}}\, e^{jk_y y'}\, dy'$$

$$E_\phi\left(\theta, \phi = \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

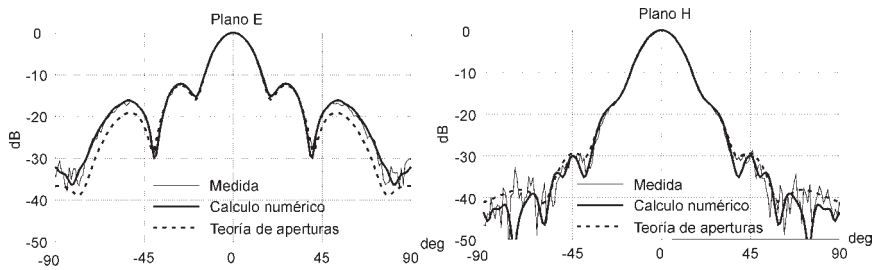
Para el diagrama en el plano H, $\phi = 0,\pi$ ($k_x = \pm k\,\text{sen}\theta$, $k_y = 0$), la expresión queda

$$E_\theta(\theta, \phi = 0, \pi) = 0$$

$$E_\phi(\theta, \phi = 0, \pi) = \pm j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta) \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} E_0 \cos\frac{\pi}{a_1}x'\, e^{-j\frac{kx'^2}{2\ell_H}}\, e^{jk_x x'}\, dx' \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} e^{-j\frac{ky'^2}{2\ell_E}}\, dy'$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En las gráficas siguientes se representan los diagramas de radiación normalizados obtenidos a 10 GHz, comparando los resultados obtenidos con las expresiones derivadas del método de la apertura (6.9), con las obtenidas con un método numérico riguroso (método de los momentos) y finalmente con las medidas. Al comparar con la medida, puede observarse que mientras el método numérico reproduce muy fielmente los resultados experimentales, el método de la apertura presenta ligeras diferencias a partir del segundo lóbulo secundario.



También podríamos haber encontrado los primeros lóbulos de estos cortes utilizando las gráficas de la figura 6.13 con $s = b_1^2 / (8\lambda \ell_E) = 0{,}13$, para el plano E y equivalentemente las gráficas de la figura 6.15 con $t = a_1^2 / (8\lambda \ell_H) = 0{,}22$, para el plano H. Hay que tener en cuenta que las gráficas de las figuras 6.13 y 6.15 están normalizadas y hay que multiplicarlas por el factor (1+cosθ)/2 para obtener el diagrama real.

6.2.2 Bocina cónica

Al igual que en las bocinas anteriores, abriendo guías circulares se generan bocinas cónicas. Las características de radiación, tanto de la guía como de la bocina, se analizan de forma idéntica a como se ha hecho para el caso rectangular. La distribución de campos más habitual es la del modo dominante TE_{11} con un error de fase debido al abocinamiento, cuyo valor máximo resulta ser

$$s = \frac{d_m^2}{8\lambda \ell_c} \tag{6.64}$$

donde d_m es el diámetro de la boca y ℓ_c la longitud de la bocina. El comportamiento óptimo, en cuanto a directividad, se obtiene para

$$d_m \approx \sqrt{3\ell_c \lambda} \tag{6.65}$$

al que corresponde un error de fase máximo en la bocina de valor $s = 3/8$.

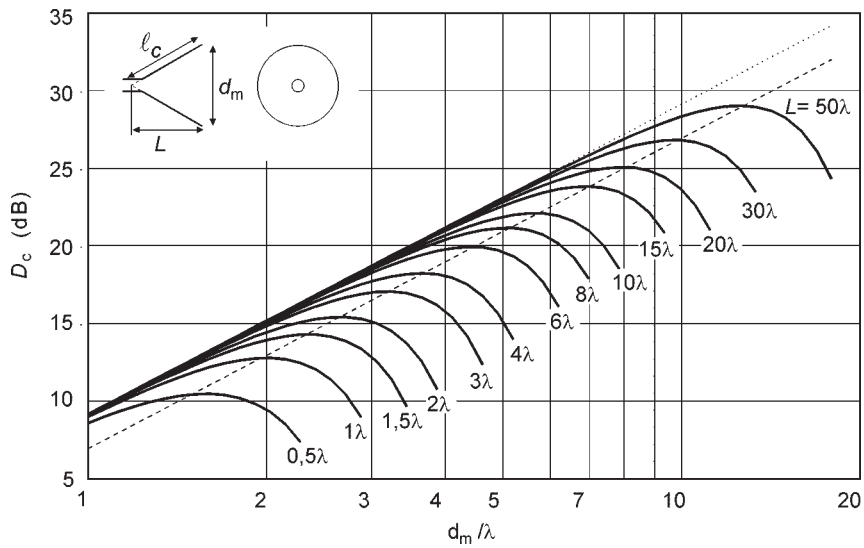
La figura 6.17 muestra la directividad D_c en funcion del diámetro (d_m/λ) para distintas longitudes (L) de la bocina. La línea que pasa por las crestas define los diseños óptimos y la envolvente externa punteada $(L/\lambda \to \infty)$ es el caso límite de ausencia de error de fase en la boca de la bocina, que se corresponde con las expresiones de la sección 6.1.5 para una boca de guía circular. Para el caso óptimo resulta

$$\Delta\theta^E_{-3\text{dB}} \approx 60\frac{\lambda}{d_m}(^\circ), \quad \Delta\theta^H_{-3\text{dB}} \approx 70\frac{\lambda}{d_m}(^\circ)$$

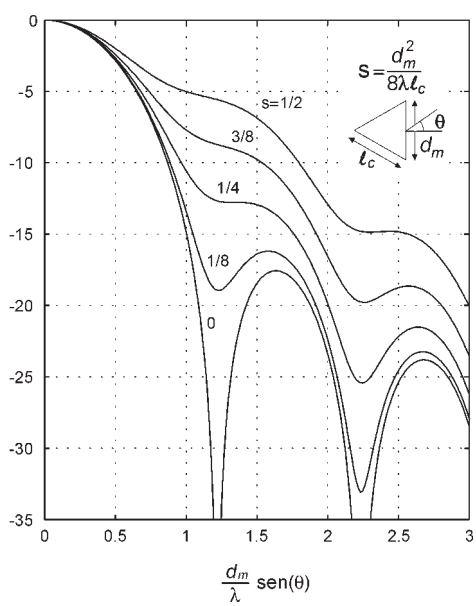
$$NLPS^E \approx 13\,\text{dB}, \quad NLPS^H \approx 20\,\text{dB}$$

$$D = 0{,}52\left(\frac{\pi d_m}{\lambda}\right)^2, \quad \eta_{il} = 0{,}52$$

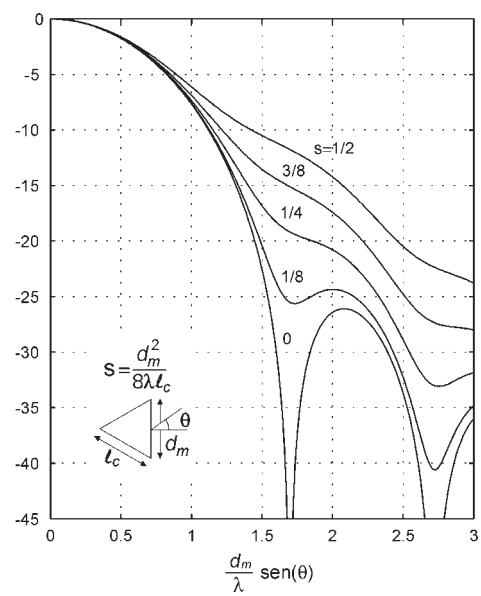
© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



a)



b)



c)

Fig. 6.17 Bocina cónica. Directividad (a), intensidad relativa de campo en plano E (b) y en plano H (c)

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Ejemplo 6.2 Para alimentar un reflector parabólico se requiere una bocina con un ancho de haz $\Delta\theta^{H}_{-3\text{dB}} \approx 20°$. Las dimensiones de una bocina cónica óptima serían

$$d_m = \frac{70}{20}\lambda = 3{,}5\lambda$$

$$\ell_c = \frac{d_m^2}{3\lambda} = 4{,}1\,\lambda, \quad L = 3{,}7\lambda$$

y tendría una directividad obtenida de la figura 6.17 o a partir de

$$D = 0{,}52\left(\frac{\pi d_m}{\lambda}\right)^2 = 63 = 18\,\text{dB}$$

Si la bocina no tuviera error de fase ($L/\lambda \to \infty$) habría resultado un valor de 20 dB.

Una variación de la bocina cónica de paredes lisas es la bocina cónica de paredes corrugadas, como la que muestra la figura 6.18b. El efecto de las corrugaciones en las paredes es el de modificar la distribución de campos, en especial en el plano E, convirtiendo la distribución uniforme original en una cosenoidal. Las líneas de campo también se modifican, y quedan prácticamente paralelas a la dirección de polarización. En la figura 6.18 se muestran los campos del modo dominante HE_{11} de la bocina corrugada y las del modo TE_{11} de la bocina lisa; puede observarse la mayor pureza de polarización de la primera. La finalidad de este tipo de bocinas es conseguir diagramas más simétricos que se traducirán en niveles de polarización cruzada más bajos en el diagrama secundario.

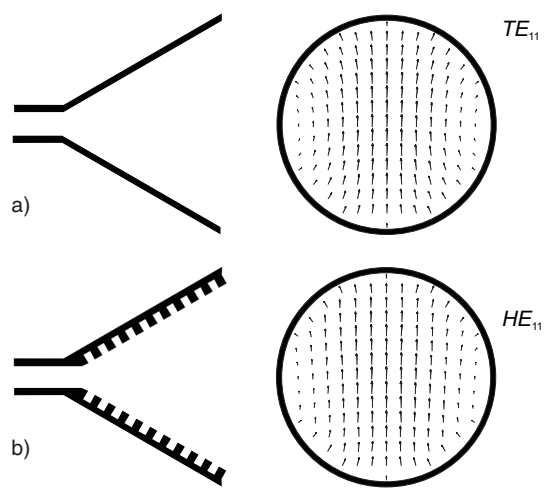


Fig. 6.18 Campos en la boca de las bocinas cónicas: a) lisa y b) corrugada

6.3 Ranuras

Una ranura es un corte en un conductor metálico que se alimenta conectando en sus bordes una línea de transmisión bifilar o coaxial, o bien mediante una cavidad. Vamos a considerar el caso más simple, que es una ranura rectangular en un plano conductor infinito, tal y como se ha representado en la figura 6.19, y que se excita con una fuente o generador de tensión entre sus lados más próximos. Vamos a suponer conocido el campo eléctrico en la ranura

$$E_y = \begin{cases} E_y(z, y) & |z| < \dfrac{\ell}{2}, \qquad |y| < \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \tag{6.66}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

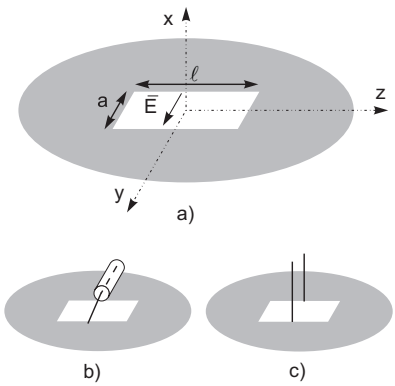


Fig. 6.19 a) ranura en un plano metálico infinito, b) ranura alimentada con un cable coaxial y c) ranura alimentada con una línea bifilar

su imagen, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que la alimentación se hace sólo por el campo eléctrico y la correspondiente fuente magnética o generador de tensión.

El segundo modelo del principio de equivalencia nos permite sustituir, a efectos del semiespacio $x \geq 0$, la distribución de campo eléctrico en la ranura por una lámina de corriente magnética equivalente, $\vec{M}_S = -\hat{n} \times \vec{E}$ sobre un conductor eléctrico, lo que permite considerar el conductor eléctrico extendido a todo el plano x=0. Además de las corrientes magnéticas equivalentes, sobre el conductor se inducen corrientes eléctricas que producirían campos de radiación en el espacio libre, pero que en presencia del conductor no radian. Por imágenes podemos sustituir el efecto del conductor por una distribución de corriente magnética imagen que, por ser una corriente magnética paralela, será igual y del mismo sentido. La situación se muestra esquemáticamente en la figura 6.20.

Aunque hubiésemos conocido el campo magnético en la ranura, la corriente equivalente eléctrica sería anulada por

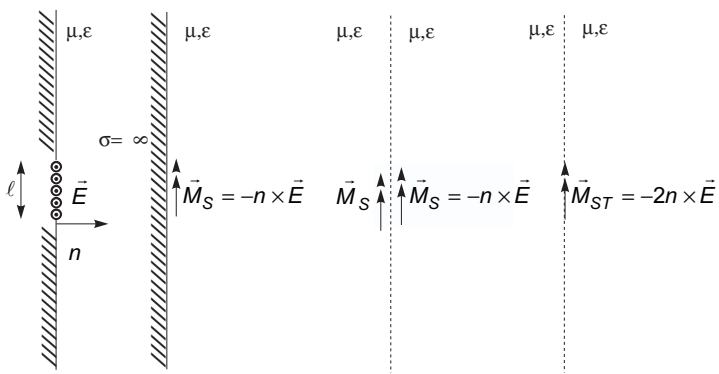


Fig. 6.20 Modelo electromagnético de una ranura sobre un plano metálico infinito

6.3.1 Ranura elemental

Para una ranura elemental de dimensión menor a y mayor ℓ, satisfaciendo $a << \ell << \lambda$, centrada en el plano yz (Fig. 6.19) e iluminada por un campo uniforme E_y, tenemos con $\vec{E} = -E_0\,\hat{y}$

$$\vec{M}_S = -\hat{x} \times \hat{y}(-E_0) = E_0 \hat{z} \tag{6.67}$$

que es una corriente magnética dirigida según $\hat{z}$. Éste es un problema dual del caso de un dipolo eléctrico elemental. La corriente magnética total será

$$\vec{M}_{ST} = 2E_0 \hat{z} \tag{6.68}$$

que produce un potencial vector magnético $\vec{F} = F_z\,\hat{z}$ dado por (3.76)

$$F_z = \frac{\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \int_S 2E_0\, ds' = 2\frac{\varepsilon (a E_0)\ell e^{-jkr}}{4\pi r} \tag{6.69}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

con $aE_0 = V$, la tensión aplicada en la ranura. Si se compara con el potencial vector del dipolo de igual longitud (4.4)

$$A_z = \frac{\mu I \ell e^{-jkr}}{4\pi r}$$

queda patente la dualidad con la sustitución $\mu \leftrightarrow \varepsilon$, $\eta \leftrightarrow 1/\eta$, $I \leftrightarrow 2V$, $E_{ranura} \leftrightarrow -H_{dipolo}$, $H_{ranura} \leftrightarrow E_{dipolo}$, y se obtiene por dualidad o bien por cálculo directo a partir de (6.69)

$$\begin{aligned} E_\phi &= -jk\frac{V\ell}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\operatorname{sen}\theta \\ H_\theta &= jk\frac{V\ell}{2\pi\eta}\frac{e^{-jkr}}{r}\operatorname{sen}\theta \\ K &= \frac{V^2\ell^2k^2}{4\pi^2\eta}\operatorname{sen}^2\theta \end{aligned} \qquad (6.70)$$

Se observa que el diagrama de radiación es idéntico al del dipolo eléctrico, salvo que la polarización es ortogonal. La directividad es $D = 3/2$ y la potencia total radiada por la ranura en ambos semiespacios resulta por integración de la intensidad de radiación K

$$P_r = \frac{V^2\ell^2k^2}{4\pi^2\eta}2\pi\frac{4}{3} = V^2\frac{8}{3}\frac{\pi}{\eta}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \qquad (6.71)$$

de la que se puede definir una conductancia de radiación G_r por

$$G_{r\ ranura\ elem} = \frac{P_r}{V^2} = \frac{8}{3}\frac{\pi}{\eta}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \qquad (6.72)$$

Si se compara con la resistencia de radiación del dipolo, $R_{r\ dipolo\ elem} = \frac{2}{3}\pi\eta\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$, se obtiene

$$\frac{R_{r\ dipolo}}{G_{r\ ranura}} = \frac{\eta^2}{4} \qquad (6.73)$$

que resulta ser un caso particular de la expresión más general para cualquier par de antenas complementarias. Se dice que dos antenas planas son complementarias cuando al superponerlas resulta un plano conductor infinito, como es el caso de un dipolo y una ranura, y se tiene para ellas, de acuerdo con el teorema de Babinet, [Kraus, 88],

$$Z_{dip}\ Z_{ran} = \frac{\eta^2}{4} \qquad (6.74)$$

De la misma forma que el dipolo elemental incumplía la ecuación de continuidad en sus extremos, una ranura elemental con distribución uniforme viola en $z = \pm\ell/2$ la condición de contorno para el campo eléctrico tangencial al conductor, por lo que, en general, si $\ell \ll \lambda$ la distribución será realmente triangular.

Si la dimension longitudinal ℓ de la ranura es comparable a λ, la distribución de campo en la ranura será aproximadamente sinusoidal y similar en su forma a la de la corriente en un dipolo.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.3.2 Ranura resonante

Si $\ell = \lambda/2$, el campo en la ranura será

$$E_y = -E_m \cos kz \tag{6.75}$$

y la corriente magnética equivalente total

$$\vec{M}_{ST} = 2E_m \cos kz\, \hat{z} \tag{6.76}$$

que produce un vector de radiación

$$L_z = a \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} 2\, E_m \cos kz'\, e^{jkz'\cos\theta}\, dz' = 4\, a\, E_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\,\mathrm{sen}^2\theta} \tag{6.77}$$

y, con $V_m = aE_m$, campos de valor

$$\begin{aligned} H_\theta &= j\frac{V_m}{\pi\eta}\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\mathrm{sen}\theta} \\ E_\phi &= -j\frac{V_m}{\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\mathrm{sen}\theta} \end{aligned} \tag{6.78}$$

Los diagramas de radiación, la directividad y el área efectiva de la ranura radiando en todo el espacio son los mismos que para el dipolo en $\lambda/2$ y la longitud efectiva es el doble. Se puede definir una conductancia de radiación G_r que satisfará la misma relación

$$\frac{R_{r\,dipolo\,\lambda/2}}{G_{r\,ranura\,\lambda/2}} = \frac{\eta^2}{4}$$

Dado que la resistencia del dipolo es del orden de 70 Ω, la resistencia de la ranura es alta, del orden de 370 Ω, lo que puede presentar problemas de adaptación. La relación anterior también la satisfacen las impedancias de la ranura y del dipolo.

$$Z_r(\lambda/2) = \frac{\eta^2}{4\,Z_{dip}(\lambda/2)} = \frac{\eta^2}{4(73 + j\,42{,}5)} = 363 - j\,211\,\Omega$$

Una forma de reducir esta impedancia, dividiéndola por cuatro, es construyendo una ranura doblada (Fig. 6.21a), cuya impedancia vale

$$Z_{r\,doblada} = \frac{\eta^2}{4\,Z_{dip\,doblado}} = \frac{\eta^2}{4\cdot 4\,Z_{dip}(\lambda/2)} = 90{,}5 - j\,52{,}8\,\Omega$$

Otras ranuras habituales son una espira magnética, que se realiza por alimentación a partir de un coaxial, y las ranuras alimentadas por una cavidad. También se utilizan extensamente como radiadores (en VHF y UHF) ranuras axiales sobre cilindros circulares conductores, que producen polarización horizontal y, situando adecuadamente varias ranuras colineales, se obtiene un diagrama con un haz vertical estrecho y omnidireccional en el plano horizontal.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La ranura coaxial de la figura 6.21.b es el extremo de un cable coaxial abierto en un plano conductor. Su análisis se realiza a partir de las expresiones de los campos radiados por ranuras, pero por la simetría que posee y la forma de excitarse, a partir de un generador de tensión, resulta el problema dual de una espira circular conductora recorrida por una corriente eléctrica. En el ejemplo 6.3 se analiza la radiación de un coaxial de 50 Ω de uso común.

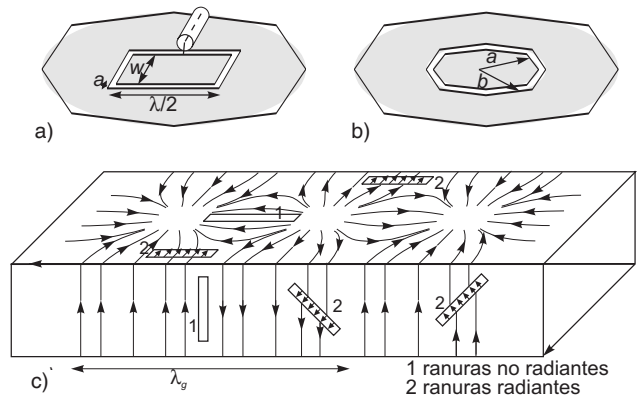


Fig. 6.21 Realizaciones habituales con ranuras: a) ranura doblada, b) coaxial abierto en un plano conductor y c) guía rectangular ranurada

En microondas es frecuente también el uso de guías con ranuras excavadas en sus paredes (Fig. 6.21c). La excitación de las ranuras se produce cuando éstas interceptan líneas de corriente. Así, las ranuras situadas longitudinalmente sobre la línea central de la cara ancha de la guía o transversalmente sobre la cara estrecha, no radiarán. Al separar la ranura del eje central de la cara ancha o inclinarla en la cara estrecha, sí se produce radiación y se puede controlar su nivel mediante un mayor o menor desplazamiento o inclinación.

Ejemplo 6.3 Un cable coaxial del tipo RG58 se deja con su extremo abierto. Vamos a analizar su radiación a 100 MHz utilizando un modelo de ranura, es decir, como si se hubiese abocado en un plano conductor. Los diámetros interior y exterior de la ranura, $2a = 0{,}9$ mm, $2b = 2{,}95$ mm, son los del alma y la malla del cable.

Situando la sección transversal del coaxial centrada en el plano *xy* (Fig. 6.21b), el modo TEM fundamental tendrá campos dados por

$$E_\rho = \frac{V}{\ln(b/a)}\frac{1}{\rho'} = \frac{A}{\rho'}$$

$$H_\phi = \frac{E_\rho}{Z_0}$$

de los que resulta una corriente magnética equivalente total

$$\vec{M}_{ST} = -2\hat{z}\times E_\rho\,\hat{\rho}' = -\frac{2A}{\rho'}\hat{\phi}'$$

y un vector de radiación

$$\vec{L} = -2A\int_a^b\int_0^{2\pi} e^{jk\rho'\,\mathrm{sen}\theta\cos(\phi-\phi')}\,\hat{\phi}'\,d\rho'\,d\phi'$$

que sólo produce una componente L_ϕ, al igual que una espira circular de corriente eléctrica solo produce N_ϕ (sección 4.1.2)

$$L_\phi = -2A\int_a^b d\rho'\int_0^{2\pi} e^{jk\rho'\,\mathrm{sen}\theta\cos(\phi-\phi')}\cos(\phi-\phi')\,d\phi'$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Como a,b << λ, la exponencial puede desarrollarse en serie, con el resultado

$$L_\phi = -j\,2\,A\,k\,\mathrm{sen}\,\theta \int_a^b \rho'\,d\rho' \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi - \phi')\,d\phi' = -j\,A\,k\,\pi\left(b^2 - a^2\right)\mathrm{sen}\,\theta$$

que es dual de (4.29). El diagrama de radiación es del tipo $\mathrm{sen}^2\theta$ y presenta una directividad de 1,5. Los campos radiados valen

$$H_\phi = -\frac{k^2}{4\eta}\,\frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\,V\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$E_\theta = -\frac{k^2}{4}\,\frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\,V\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e, integrando la densidad de potencia en un semiespacio se obtiene la potencia radiada y la conductancia de radiación

$$G_r = \frac{\pi^2}{180}\left[\frac{\pi\left(b^2 - a^2\right)}{\lambda^2 \ln(b/a)}\right]^2 \quad \text{siemens}$$

que para los parámetros del cable resulta $1{,}85\cdot10^{-14}$ S. Si se compara con la resistencia de radiación de la espira, $R_{r\ espira}$, obtenida a partir de N_ϕ de forma equivalente a como se ha obtenido G_r, podría comprobarse que verifica la relación (6.73).

6.3.3 Antenas impresas

El uso cada vez más extendido de circuitos impresos como líneas de transmisión hasta frecuencias más elevadas, por sus ventajas de coste, peso y facilidad de reproducción, ha propiciado el interés por su uso también como elemento radiante. La utilización de una misma tecnología para fabricar líneas de transmisión y los elementos radiantes se convierte en una posibilidad enormemente atractiva.

Las antenas impresas (*microstrip antennas*) consisten en un parche metálico dispuesto sobre un sustrato dieléctrico colocado encima de un plano metálico, tal como se muestra en la figura 6.22a. El parche es habitualmente de forma rectangular o circular y de dimensiones del orden de media longitud de onda. Es posible, asimismo, construir agrupaciones de parches combinando líneas y radiadores impresos.

Sus principales limitaciones son su reducido ancho de banda, por tratarse de una estructura resonante, y su baja eficiencia, puesto que de la energía acumulada en la cavidad formada entre el parche y el plano de masa sólo una pequeña porción es radiada al espacio.

Para calcular la radiación de esta estructura, analizamos en primer lugar la distribución de campos en su interior. En la figura 6.22b se muestran las líneas de campo para el caso habitual en el que d es aproximadamente media longitud de onda en el interior del dieléctrico ($\lambda_{ef}/2$). La estructura puede modelarse como una cavidad delimitada por los dos conductores (parche y plano de masa) y las cuatro ranuras formadas por las paredes verticales. La radiación se originará en las cuatro ranuras que cierran la cavidad. Cada una de ellas puede modelarse por una lámina de corriente magnética equivalente. Cuando se considera la curvatura de las líneas de campo, podemos descomponer éstos en una componente según $\hat{x}$ y otra según $\hat{y}$. Las componentes según $\hat{y}$ están en contrafase en $x = \pm d/2$ y sus contribuciones se cancelan. Quedan únicamente las componentes según $\hat{x}$ y, por ello, las láminas de corriente pueden situarse directamente sobre el sustrato, tal como se muestra en la figura 6.22c. Puede observarse que las corrientes situadas en $z = \pm\ell/2$ tienen sentidos opuestos y varían como

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

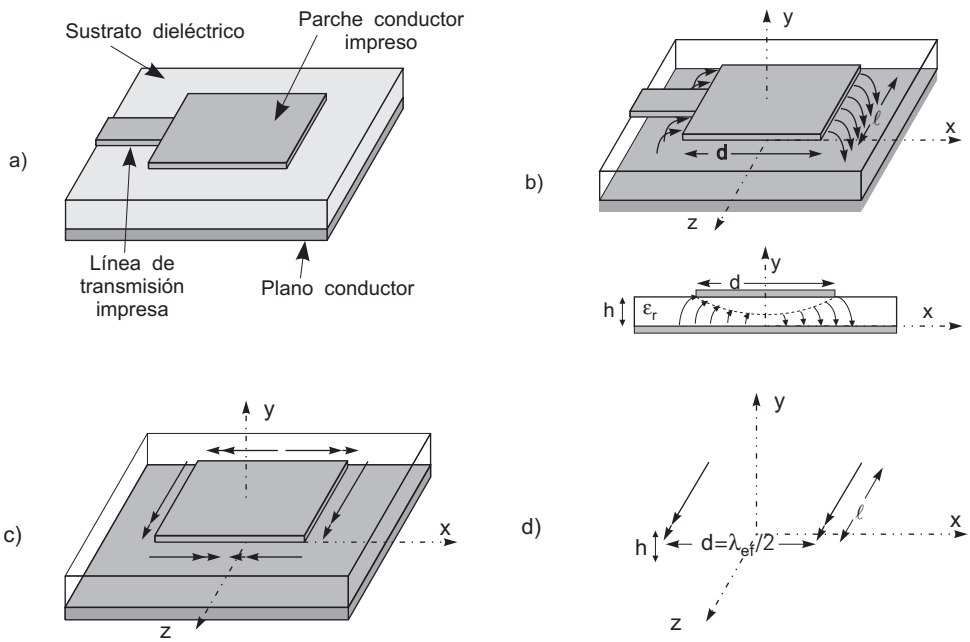


Fig. 6.22 Antenas impresas: a) esquema, b) distribución de campos en la estructura, c) láminas de corrientes magnéticas equivalentes y d) equivalente electromagnético

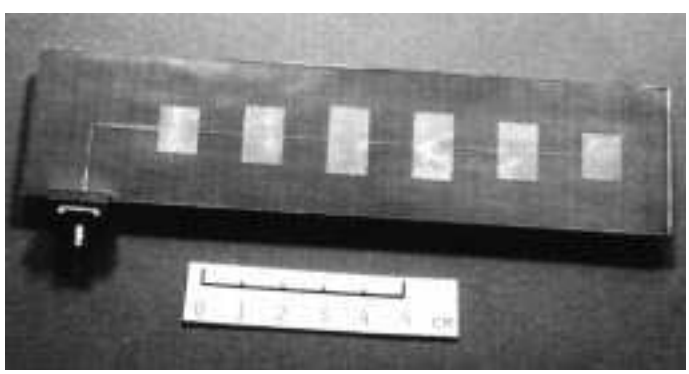


Fig. 6.22e Agrupación de seis parches rectangulares

sen($\pi x/d$) y, por tanto, no producen radiación en la dirección normal al plano de la antena (eje *y*); ésta también es prácticamente despreciable en las otras direcciones.

Finalmente, la estructura puede modelarse por dos láminas de corriente magnética de anchura h, longitud ℓ, dirigidas según el eje *z*, separadas una distancia *d* y situadas sobre el dieléctrico muy próximas al plano conductor. Al aplicar imágenes, suponiendo el conductor infinito, quedan finalmente dos corrientes magnéticas dirigidas según *z* y separadas $\lambda_{ef}/2$, figura 6.22d. Puesto que las líneas de alimentación se eligen habitualmente para excitar el modo TEM, la componente *x* en las ranuras y, por tanto, las corrientes magnéticas, pueden suponerse constantes según *z*.

Ejemplo 6.4 Un parche metálico rectangular de dimensiones ℓ = 3,75 cm y *d* = 4,6 cm (Fig. 6.22b), está colocado sobre un sustrato dieléctrico de permitividad $\varepsilon' = 2{,}62$ y grosor h = 1mm. Para obtener su diagrama de radiación, a una frecuencia de 2 GHz, vamos a calcular en primer lugar la dimensión eléctrica *d*. La longitud de onda a 2 GHz para un modo TEM

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

en el interior de la cavidad, con el dieléctrico dado, es

$$\lambda_{ef} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{15\ \text{cm}}{\sqrt{2{,}62}} = 9{,}27\ \text{cm}$$

y, en consecuencia,

$$d = 4{,}6\ \text{cm} = \frac{\lambda_{ef}}{2}$$

Se cumplen, por tanto, las hipótesis y podemos modelar la antena, suponiendo el plano conductor infinito, por dos láminas de corriente magnética orientadas según z de valor

$$\vec{M}_{sT} = 2\,E_0\,\hat{z}\begin{cases} -\ell/2 \le z' \le \ell/2 \\ -h/2 \le y' \le h/2 \end{cases}$$

situadas en $x' = \pm d/2$, que producen unos campos radiados

$$E_\theta = 0$$

$$E_\phi = -j\frac{2hE_0}{\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\left(k\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right)$$

donde

$$k\frac{\ell}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

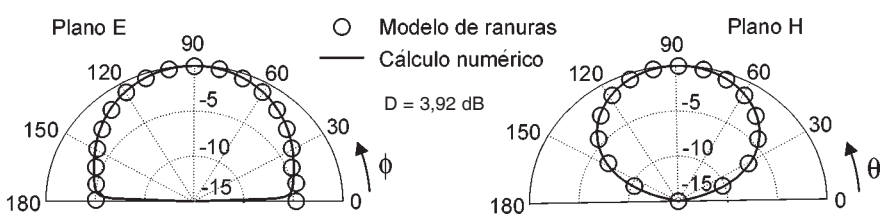
$$k\frac{d}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_{ef}}{4} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon'}} = 0{,}31\pi$$

Particularizando para los planos principales se obtiene, con $E_0 h = V_0$

Plano E: $\theta = \pi/2$ $\qquad E_\phi = -j\frac{V_0}{2}\frac{e^{-jkr}}{r}\cos(0{,}31\pi\cos\phi)$

Plano H: $\phi = \pi/2$ $\qquad E_\phi = -j\frac{2V_0}{\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\operatorname{sen}(0{,}25\pi\cos\theta)}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta$

En la figura se representan los dos cortes del diagrama para el semiespacio y>0,



comparando los resultados obtenidos mediante las expresiones equivalentes a (6.78) con los de un método numérico riguroso (método de los momentos).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.4 Reflectores

A medida que subimos en frecuencia es posible ir consiguiendo elevadas dimensiones eléctricas de las antenas y, por tanto, directividades importantes. Aumentar la directividad significa disponer de geometrías capaces de focalizar la energía en regiones angulares cada vez menores. Ésta es la finalidad que se persigue con las distintas formas de reflector y de lente: concentrar la radiación de fuentes primarias, en general poco directivas, en una determinada dirección o región del espacio (Fig. 6.23). Los reflectores y las lentes se colocan en frente de un radiador primario (dipolo, boca de guía, bocina), para convertir las ondas aproximadamente cilíndricas o esféricas generadas por el radiador primario en un frente de onda que puede ser considerado como localmente plano sobre la apertura del reflector. Este frente de onda es capaz de concentrar la radiación en un reducido sector angular del espacio y obtener así directividades elevadas.

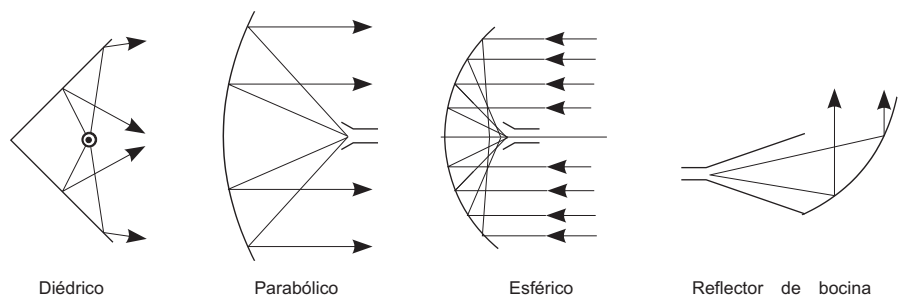


Fig. 6.23 Distintas geometrías de reflector

6.4.1 Reflectores diédricos

Una de las formas más simples de concentrar la radiación de una fuente primaria es mediante reflectores diédricos como los representados en la figura 6.24. Su estudio se realiza mediante la teoría de las imágenes, que permite analizar diedros reflectores con $\beta = 180º/n$, donde n es un entero. Una configuración usual es el reflector en ángulo de 90°, que puede analizarse mediante las tres imágenes representadas en la figura 6.24. La ubicación y sentido de las corrientes imágenes debe ser tal que su superposición asegure el cumplimiento de las condiciones de contorno sobre las paredes del diedro y en particular sobre el vértice central. Otra forma de interpretarlo es viendo que las imágenes 2 y 4 provienen de la reflexión simple en una cara del diedro, mientras que la imagen 3 proviene de la doble reflexión en ambas caras. También son habituales reflectores de 60°, que darían origen a 5 imágenes.

La figura 6.24 muestra los valores de las imágenes para una configuración en la que la antena, un dipolo en este caso, se encuentra situada paralelamente a la arista del diedro. El análisis de imágenes es exacto si los planos se extienden hasta el infinito y se obtienen, para separaciones d del dipolo a la arista en el margen 0,3λ - 0,7λ, directividades próximas a 10 dB para $\beta = 90º$ y 13 dB para $\beta = 60º$, sobre el valor de un dipolo aislado.

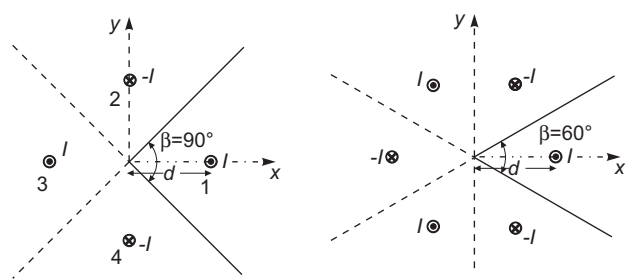


Fig. 6.24 Reflectores diédricos y sus imágenes

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Para el diedro de 90º o recto, tenemos, para un dipolo en λ/2 situado a una distancia *d* sobre el eje *x* y orientado según el eje *z*, la siguiente impedancia de entrada, como generalización a 4 puertos de la matriz de impedancias (3.151):

$$Z_e = Z_{11} - Z_{12} + Z_{13} - Z_{14} \tag{6.79}$$

Si el dipolo radia P_r vatios, su corriente valdrá

$$I = \sqrt{\frac{P_r}{R_{11} - 2R_{12} + R_{13}}} \tag{6.80}$$

y el campo eléctrico se obtendrá por la suma de dos agrupaciones uniformes, una según el eje *x* y espaciado 2*d*, y la otra sobre el eje *y* con idéntico espaciado, o equivalentemente de una agrupación plana de 2x2 elementos

$$E_\theta(\theta,\phi) = j60\frac{e^{-jkr}}{r} I \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta} 2\left(\cos\left(kd\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right) - \cos\left(kd\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\right)\right) \tag{6.81}$$

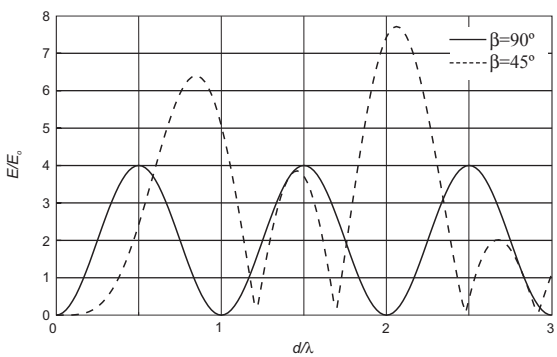


Fig. 6.25 Variación relativa del campo radiado en la dirección del eje *x* según la separación entre dipolo y vértice, alimentados a intensidad constante

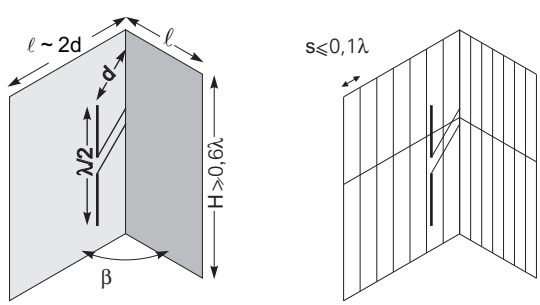


Fig. 6.26 Configuración de un reflector diédrico sólido y de varillas

En la figura 6.25 se representa el valor del campo en la dirección del eje *x*, producido por un dipolo más un reflector diédrico de paredes infinitas, normalizado al valor del campo producido por el dipolo aislado, E_0, en función de la separación *d* entre el dipolo y el vértice del diedro, para dos valores del ángulo β. Se observa que, al disminuir β, la relación E/E_0 aumenta, pero al precio de aumentar *d*, con el resultado de una mayor complejidad mecánica.

En general los planos conductores no son infinitos, suelen truncarse a una longitud ℓ del orden de dos veces la distancia del dipolo a la arista, $\ell \approx 2d$ (Fig. 6.26). Con frecuencia el reflector no es sólido, sino que consiste en un conjunto de conductores paralelos próximos con una separación $s \leq 0{,}1\lambda$; en la figura 6.26 se muestra una configuración con las varillas paralelas al dipolo. Los reflectores con ángulos de 90º y 60º se utilizan con cierta frecuencia junto con antenas Yagi aunque, en general, su longitud ℓ es mucho menor que el criterio anterior y no se obtiene plenamente la mejora de ganancia indicada, pero resulta una buena relación delante-atrás. Es de notar que los reflectores de varillas sólo actúan para la polarización paralela a las mismas y son prácticamente transparentes a la otra polarización.

Es interesante señalar la propiedad de los reflectores diédricos de 90º, cuando se utilizan como blancos pasivos, de reflejar la potencia en la misma dirección de incidencia, figura 6.27, que puede ser

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de interés en aplicaciones de radar o comunicaciones. Debido a esta propiedad en un blanco radar habrá que utilizar o evitar geometrías de este tipo en función de que queramos aumentar o disminuir su sección recta.

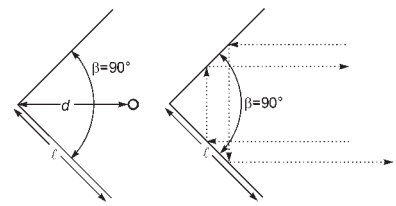


Fig. 6.27 Reflector diédrico de 90º como antena (izquierda) y como reflector pasivo (derecha)

Ejemplo 6.5 Para el reflector diédrico de 90º de la figura 6.24, alimentado por un dipolo de media onda, situado a λ/2 de la arista, se obtienen las impedancias del dipolo y de sus imágenes mediante la figura 4.24, con el resultado

$$Z_{11} = 73 + j42\ \Omega, \quad Z_{12} = Z_{14} = -24\ \Omega, \quad Z_{13} = 3 + j18\ \Omega$$

y una impedancia de entrada

$$Z_e = 124 + j60\ \Omega$$

La reactancia puede cancelarse acortando el dipolo, lo que provoca una gran disminución de X_{11} (figura 4.22) y deja prácticamente inalterados los valores de las impedancias mutuas. Si se quisiera conectar el dipolo a un cable coaxial de 50 Ω se tendría que intercalar un simetrizador; si se elige del tipo de red en celosía de la figura 4.32 se requiere a 300 MHz

$$L_b = 41{,}8\ \text{nH}, \quad C_a = 6{,}7\ \text{pF}$$

El campo radiado se obtiene de (6.81) y vale

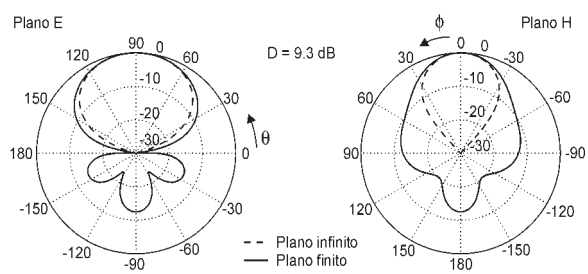
$$|E_\theta| = 60\frac{I}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\,2\left[\cos(\pi\operatorname{sen}\theta\cos\phi) - \cos(\pi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\right] \quad \left(|\phi| \le \frac{\pi}{4}\right)$$

Los cortes del diagrama de radiación en los dos planos principales son

$$t_E(\theta) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right]^2 \operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\right) \quad (\phi = 0)$$

$$t_H(\phi) = \operatorname{sen}^2\left[\frac{\pi}{2}(\cos\phi + \operatorname{sen}\phi)\right]\operatorname{sen}^2\left[\frac{\pi}{2}(\cos\phi - \operatorname{sen}\phi)\right] \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2},\ |\phi| \le \frac{\pi}{4}\right)$$

En la figura se representan los dos cortes del diagrama para el diedro de paredes infinitas descrito y se comparan con los resultados que se obtendrían mediante un método numérico riguroso (método de los momentos) para un diedro de paredes finitas de dimensiones, figura 6.26, H = 0.7λ y $\ell = \lambda$.



© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Debido al diagrama omnidireccional del dipolo en el plano H, es en este corte donde se hace más evidente la diferencia entre los diagramas correspondientes a un diedro con paredes infinitas y a uno con paredes finitas.
La directividad vale

$$D = \frac{\wp_{máx}\, 4\pi r^2}{P_r} = \frac{\left(60\frac{I}{r}4\right)^2 \frac{1}{\eta} 4\pi r^2}{124\, I^2} = 15{,}5 = 11{,}9\,(\text{dB})$$

Si se radiara 1 W, la corriente en el dipolo (6.80) valdría I=90 mA, y a una distancia de 1 km se produciría un campo de 21,6 mV/m.

6.4.2 Reflectores parabólicos

Un reflector diédrico presenta, en general, una ganancia muy reducida y se requieren grandes superficies y ángulos reducidos para conseguir directividades apreciables. Una configuración que permite obtener directividades elevadas utiliza un reflector parabólico como superficie reflectante. El principio de su funcionamiento, heredado de la óptica, consiste en focalizar la potencia incidente en el reflector sobre una fuente primaria situada en su foco.

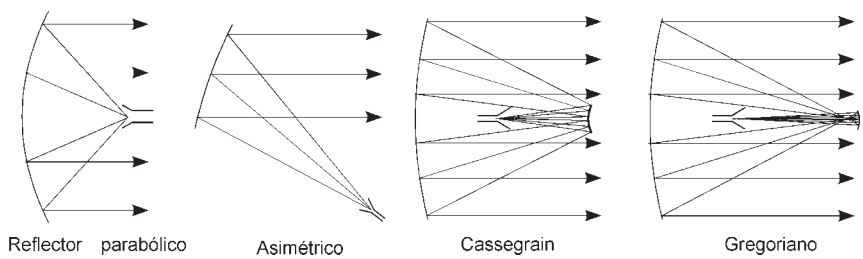


Fig. 6.28a Distintas configuraciones de reflector parabólico

Las antenas con reflector parabólico (Fig. 6.28a) han sido utilizadas de forma intuitiva desde los inicios de la era de la radio (finales del siglo XIX), pero no fue hasta finales de la II Guerra Mundial que, debido a las demandas cada vez más exigentes de los sistemas de radar, se estimuló un desarrollo teórico y tecnológico en este campo. Un interés posterior por la radioastronomía y los radioenlaces terrestres de microondas establecieron, a finales de la década de los 40, los principios y requerimientos para los sistemas simétricos con alimentador en el foco. Una antena de esta época es el reflector de bocina de la figura 6.28b, que se utilizó en las primeras

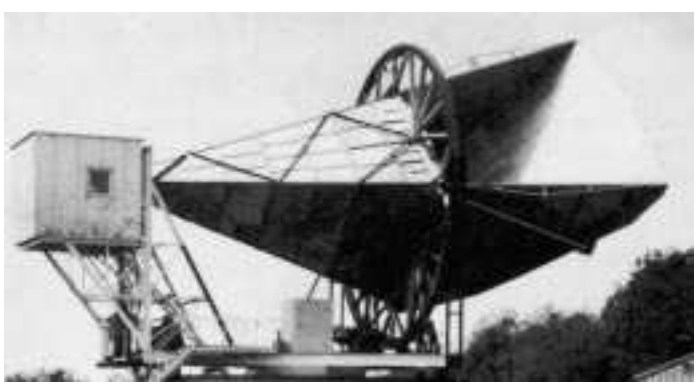


Fig. 6.28b Reflector de bocina utilizado en radioastronomía

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

comunicaciones por satélite y que permitió identificar la radiación de ruido de fondo; ha sido declarada monumento nacional en EE.UU. Las antenas Cassegrain (con un subreflector adicional) fueron introducidas en la década de los 60, ligadas a la aparición de los satélites de comunicaciones. En este mismo contexto, una estructura alternativa, que utiliza una configuración de reflector asimétrico respecto al eje de la parábola (*offset*), adquiere una importancia creciente al no existir bloqueo de la apertura por el alimentador y permitir un mejor control del diagrama y una disminución del acoplamiento entre el alimentador y el reflector.

La necesidad de maximizar la ganancia, o la relación ganancia a temperatura de ruido (G/T), supuso el desarrollo de técnicas más sofisticadas para conformar la iluminación en la apertura del reflector. Entre las técnicas utilizadas sobresalen: la conformación del subreflector (en la configuración Cassegrain) y la del reflector principal, la utilización como alimentadores de bocinas corrugadas, bocinas multimodo o de modos híbridos, y la utilización de alimentadores múltiples.

Vamos analizar la estructura más simple del reflector parabólico, la configuración simétrica con el alimentador en el foco. Sus resultados pueden generalizarse fácilmente a las otras geometrías.

6.4.2.1 Análisis geométrico

La geometría de un reflector parabólico queda totalmente caracterizada por un corte que comprenda el eje, cuya forma es la de una parábola: curva que equidista de un punto (foco) y una recta (generatriz). Su ecuación, referida a la figura 6.29, es:

en coordenadas cartesianas: $$y'^2 = 4f(f - z') \tag{6.82}$$

en coordenadas polares: $$r' = f / \cos^2(\theta'/2) \tag{6.83}$$

en coordenadas paramétricas: $$\begin{cases} y' = 2f\,\mathrm{tg}(\theta'/2) \\ z' = f\left(1 - \mathrm{tg}^2(\theta'/2)\right) \end{cases} \tag{6.84}$$

Consideremos la parábola de la figura 6.29 caracterizada por su distancia focal f. Vamos a establecer, mediante la aproximación de óptica geométrica, que cualquier onda emanada del foco será reflejada en el reflector de acuerdo con la ley de Snell, de lo que resultará que la dirección de salida es paralela al eje y que, además, los caminos recorridos son iguales, lo que da origen a una onda plana en la boca del paraboloide. Esta aproximación equivale a despreciar localmente la curvatura de la parábola al calcular la reflexión de cada rayo. Esta aproximación es suficientemente buena si el radio de curvatura es mayor que λ, lo cual sucede siempre en los reflectores parabólicos habituales.

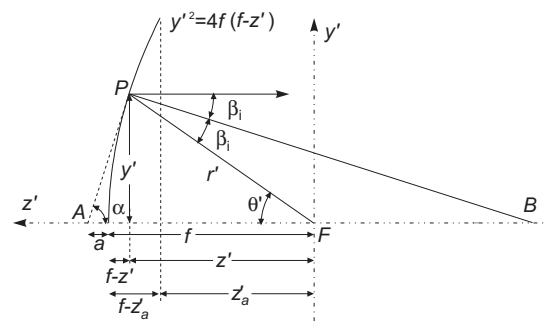


Fig. 6.29 Geometría de un reflector parabólico

Verificamos primero la igualdad de caminos. La tangente a la parábola en un punto P, representada por $\overline{AP}$, forma un ángulo α con el eje dado por las relaciones

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{dy'}{dz'} = \frac{2f}{y'} = \frac{y'}{a + f - z'} \tag{6.85}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de la que se obtiene, teniendo en cuenta que $y'^2 = 4f(f - z')$

$$a = f - z' \tag{6.86}$$

La distancia recorrida desde el foco al punto de incidencia es

$$r' = \overline{FP} = \sqrt{y'^2 + z'^2} = \sqrt{4f(f - z') + z'^2} = 2f - z' = f + a \tag{6.87}$$

y la distancia total desde el foco hasta la apertura del reflector

$$r' + (f - z'_a) - a = (f + a) + (f - z'_a) - a = 2f - z'_a = cte.$$

de donde se desprende la igualdad de caminos, de forma consistente con el punto anterior.

Veamos ahora que la dirección de salida es paralela al eje de la parábola, para lo que hemos de probar que $2\beta_i = \theta$. El triángulo APF es isósceles, ya que $\overline{AF} = \overline{PF} = r' = f + a$ y el ángulo que forma la dirección de incidencia con la normal, β_i, es el complementario de α

$$\beta_i = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \theta'}{2}\right) = \frac{\theta'}{2} \tag{6.88}$$

lo que completa la prueba.

Otras relaciones útiles son las siguientes

$$\overline{FB} = r', \quad F\hat{B}P = \beta_i = \theta'/2 \tag{6.89}$$

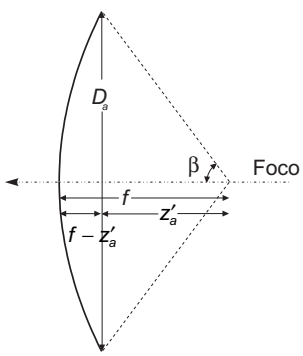


Fig. 6.30 Corte bidimensional de un paraboloide

En un reflector ha de dimensionarse su diámetro D_a de forma que se obtenga la ganancia deseada, pero queda todavía la libertad de elegir la distancia focal *f*. El cociente f / D_a es de gran importancia en el diseño, ya que fija la posición del foco y la curvatura de la parábola, y condiciona el diagrama de radiación del alimentador. Definiendo β como el ángulo respecto al eje bajo el que se ve el borde del paraboloide desde el foco, se tiene, basándose en la figura 6.30 y en (6.84)

$$\begin{aligned} (D_a/2)^2 &= 4f(f - z'_a), \\ f - z'_a &= D_a^2/16f \end{aligned} \tag{6.90}$$

y

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{z'_a}{D_a/2} = \frac{2f}{D_a} - \frac{1}{8f/D_a} \tag{6.91}$$

$$\frac{D_a}{2} = 2f \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad f/D_a = \frac{1}{4\operatorname{tg}(\beta/2)} \tag{6.92}$$

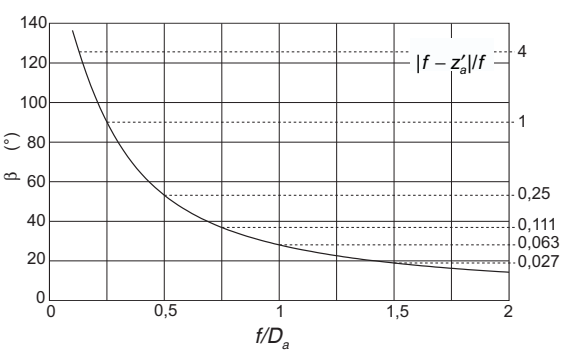


Fig. 6.31 Relación entre β y f/D_a

La figura 6.31 muestra, en función de la relación distancia focal-diámetro, el ángulo bajo el que se ve el borde y la profundidad del reflector.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.4.2.2 Análisis electromagnético

Para la obtención del campo radiado por un reflector parabólico (diagrama secundario), existe un cierto número de técnicas bien conocidas. Los métodos básicos están descritos en los textos clásicos de [Silver '49], [Collin y Zucker '69] y [Rusch y Potter '70]. Un gran número de aplicaciones y perfeccionamientos han ido apareciendo posteriormente en la literatura. Los más conocidos y utilizados son el método de la apertura y el de las corrientes inducidas.

El método de análisis más habitual es el de la apertura que, como se ha expuesto en el apartado 6.1, presupone el conocimiento de la distribución de campos en la apertura de la antena, en este caso la boca del reflector. A partir de esta distribución de campos se obtienen las corrientes equivalentes en la apertura y, de ellas, los parámetros de radiación de la antena. Este método es el de aplicación más fácil y los resultados son precisos cuando las dimensiones eléctricas del reflector son grandes. Para ciertas aplicaciones donde se requiera más precisión en el cálculo del diagrama o en las que las dimensiones eléctricas del reflector sean moderadas, puede ser necesario utilizar el método de las corrientes inducidas. En este caso el principio de análisis es más complejo y consiste en calcular las corrientes inducidas, apartado 3.4, sobre la superficie del reflector para, a partir de ellas, calcular directamente los campos radiados, integrando la contribución de todas las corrientes inducidas sobre la superficie del reflector.

El análisis electromagnético puede realizarse considerando la incidencia de una onda emanada del foco sobre el reflector, que localmente puede considerarse plano, ya que habitualmente las dimensiones, distancia focal, diámetro y radio de curvatura, son grandes en términos de la longitud de onda. En el análisis que sigue se supondrá que el reflector se encuentra en el campo lejano del alimentador, lo cual suele ser cierto para los alimentadores más usuales. Supongamos que en el foco se sitúa una antena de diagrama de radiación $D_f(\theta', \phi')$, para un sistema de ángulos θ', ϕ' referidos al foco, que radie una potencia P_r; la intensidad de radiación será

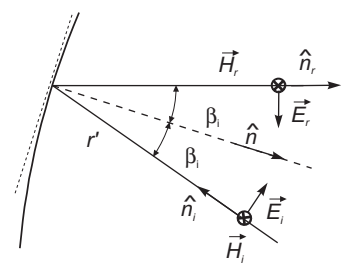


Fig. 6.32 Incidencia en la superficie del reflector

$$K_f = \frac{P_r}{4\pi} D_f(\theta', \phi') \tag{6.93}$$

El campo eléctrico incidente sobre el reflector $\vec{E}_i$, referido a la figura 6.32, se calcula a partir de esta expresión y de $K_f = r'^2 \left|\vec{E}_i\right|^2 / \eta$, valiendo

$$\vec{E}_i = \frac{e^{-jkr'}}{r'} \sqrt{\frac{\eta P_r D_f(\theta', \phi')}{4\pi}}\, \hat{e}_i \tag{6.94}$$

Los campos reflejados $\vec{E}_r$ los fijan las condiciones de contorno (3.14)

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_i + \vec{E}_r\right) = 0$$

y, al haber supuesto que el reflector está en el campo lejano del alimentador, obtenemos los campos magnéticos incidente y reflejado sobre la superficie del reflector

$$\vec{H}_i = \left(\hat{n}_i \times \vec{E}_i\right)\frac{1}{\eta}, \quad \vec{H}_r = \left(\hat{n}_r \times \vec{E}_r\right)\frac{1}{\eta}$$

A partir de este punto los dos métodos de análisis son distintos y se comentan a continuación por separado.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Método de las corrientes inducidas (Óptica física)

Si nos referimos a la figura 6.33, el campo radiado en un punto (r,θ,ϕ) se obtiene a partir del conocimiento de la distribución de corrientes eléctricas inducidas sobre la superficie del reflector S_1 cuando es iluminado por el alimentador.

Las corrientes en el reflector pueden obtenerse usando

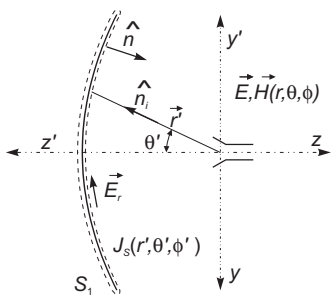


Fig. 6.33 Superficie de integración para el método de las corrientes inducidas

$$\vec{J}_s = \hat{n}\times\vec{H} = \hat{n}\times\left(\vec{H}_i+\vec{H}_r\right) \tag{6.95}$$

Si la superficie del reflector puede aproximarse localmente por una superficie plana infinita (aproximación de óptica física, apartado 8.4.1), entonces aplicando imágenes resulta

$$\hat{n}\times\vec{H}_i = \hat{n}\times\vec{H}_r \tag{6.96}$$

y

$$\vec{J}_s = \begin{cases} 2\,\hat{n}\times\vec{H}_i \approx \dfrac{2}{\eta}\left[\hat{n}\times\left(\hat{n}_i\times\vec{E}_i\right)\right] \\ 2\,\hat{n}\times\vec{H}_r \approx \dfrac{2}{\eta}\left[\hat{n}\times\left(\hat{n}_r\times\vec{E}_r\right)\right] \end{cases} \tag{6.97}$$

y el campo radiado referido al sistema (r,θ,ϕ) de la figura 6.33 puede escribirse a partir de (3.81) como

$$\begin{aligned} E_\theta(\theta,\phi) &= -j\frac{\eta}{2\lambda r}e^{-jkr}\iint_{S_1}\hat{\theta}\cdot\vec{J}_s\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,ds' \\ E_\phi(\theta,\phi) &= -j\frac{\eta}{2\lambda r}e^{-jkr}\iint_{S_1}\hat{\phi}\cdot\vec{J}_s\,e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,ds' \end{aligned} \tag{6.98}$$

Este método exige una integración complicada en casos generales, aunque puede simplificarse algo para reflectores con simetría de revolución.

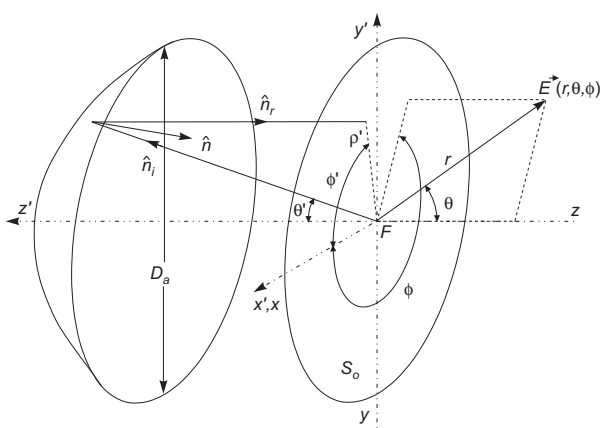


Fig.6.34 Apertura equivalente del reflector parabólico

Método de la apertura

Aplicando el teorema de equivalencia, la boca del reflector puede ser considerada como una apertura (Fig. 6.34). El campo eléctrico $\vec{E}_a$ sobre la apertura, cuya abscisa vamos a tomar como z'_a, se calcula a partir de la reflexión óptica del campo eléctrico radiado por el alimentador como

$$\vec{E}_r = 2\left(\hat{n}\cdot\vec{E}_i\right)\hat{n}-\vec{E}_i = E_r\,\hat{e}_r \tag{6.99}$$

Considerando que después de la reflexión el campo viaja como una onda plana, la distribución en la boca puede trasladarse sin error apreciable hasta el plano focal y ponerse como

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{E}_a = \vec{E}_r\, e^{-jkz'} \tag{6.100}$$

con el resultado

$$\vec{E}_a = \sqrt{\frac{\eta\, P_r\, D_f\,(\theta', \phi')}{4\pi}}\, \frac{1}{r'}\, e^{-jk(r'+z')}\, \hat{e}_r \tag{6.101}$$

Teniendo en cuenta que $r'+z' = f+a+f-a = 2f = cte.$, vemos de nuevo que en el plano de la apertura el frente de onda es plano. Para calcular el campo radiado por el reflector, se puede utilizar una de las tres formas del principio de equivalencia. Utilizando la primera de ellas, que considera una distribución de corrientes eléctricas y magnéticas equivalentes, se obtiene, referido al sistema (r,θ,ϕ) de la figura 6.34

$$\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\iint_{S_0}\left[E_x^a\cos\phi + E_y^a\,\mathrm{sen}\,\phi\right]e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}'}\,ds' \\ E_\phi &= j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\iint_{S_0}\left[-E_x^a\,\mathrm{sen}\,\phi + E_y^a\cos\phi\right]e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}'}\,ds' \end{aligned} \tag{6.102}$$

que resulta de combinar las expresiones halladas en la sección 6.1.2 para dos polarizaciones ortogonales y con $Z_0 = \eta$.

Un balance de los dos métodos permite extraer las siguientes conclusiones:

- Para reflectores de diámetro superior a 20 λ, las dos técnicas proporcionan prácticamente idénticas predicciones para el lóbulo principal y los primeros lóbulos secundarios, tanto para la polarización de referencia como para la cruzada. Para ángulos más alejados del eje, las predicciones difieren, especialmente cuando aumenta la curvatura del reflector. En este caso ambas técnicas necesitan una corrección para tener en cuenta el efecto de los bordes del reflector.
- Para reflectores de diámetro inferior a 20 λ, las discrepancias empiezan a ser más discernibles, y es en estas circunstancias cuando es recomendable la utilización del método de las corrientes inducidas, generalmente aceptado como el más exacto de los dos.

En la mayoría de situaciones la precisión obtenida con el método de la apertura será suficiente, por lo que es el que se utiliza habitualmente. En lo que sigue nos referiremos básicamente a este método.

6.4.2.3 Parámetros

Vamos a estudiar los parámetros que tienen una influencia mayor en el diseño y en las prestaciones de un reflector parabólico.

Polarización cruzada

En general, la distribución de campo reflejado en la apertura de un paraboloide como el descrito en la figura 6.34, contiene las dos componentes de polarización $\hat{x}$ e $\hat{y}$, tal como se muestra en la figura

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

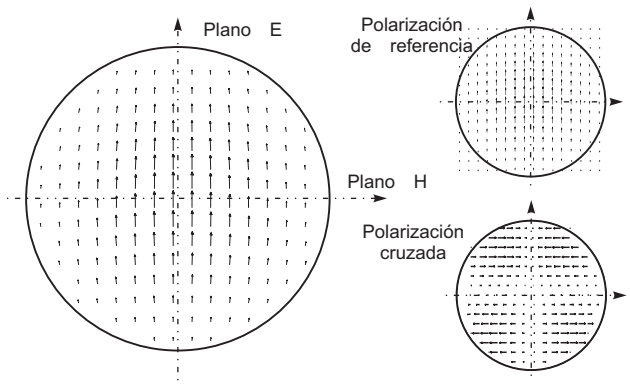


Fig. 6.35 Campo eléctrico en la superficie de un reflector parabólico

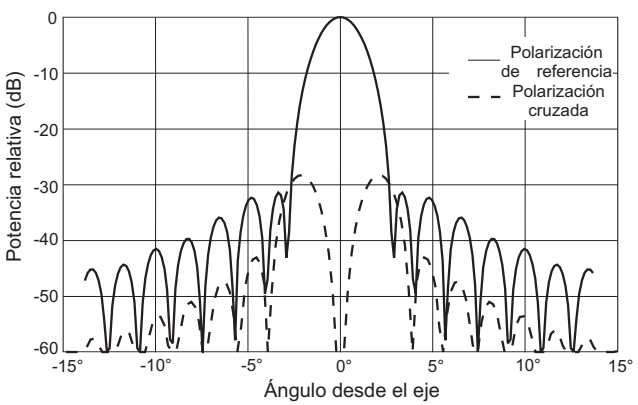


Fig. 6.36 Diagrama de radiación típico de un reflector parabólico. Corte de plano *E* para la polarización de referencia y a $\phi = \pi/4$ para la polarización cruzada

6.35, aún cuando el reflector hubiera sido iluminado por un alimentador linealmente polarizado según $\hat{y}$. Ello es debido a la componente transversal (según $\hat{x}$) creada por la reflexión en el reflector como se desprende de las ecuaciones (6.99) para el caso del método de la apertura. Consideraciones similares pueden realizarse para el método de las corrientes inducidas. A la componente principal coincidente con la del alimentador se la denomina polarización de referencia ("copolar"), y a la componente ortogonal polarización cruzada ("crosspolar"). Esta situación no es por lo general deseable, puesto que ello supone un trasvase de potencia de una polarización a su ortogonal y, por tanto, un acoplamiento entre las dos. Ello puede dificultar, por ejemplo, la utilización de las dos polarizaciones como canales independientes para la transmisión de información.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, un alimentador "ideal" desde el punto de vista de polarización, sería aquel que asegurase que la polarización inicial, de referencia, con la que excitamos la antena, mantenga su pureza a lo largo del proceso de generación del diagrama primario del alimentador y de su posterior transformación en el diagrama secundario del reflector, de forma que en el diagrama final resultante exista únicamente esta componente de polarización.

Para el caso de polarización lineal, la especificación de polarización de referencia y cruzada respecto a este criterio, se conoce como la tercera definición de Ludwig [Wood, 80], que para el caso de orientación según $\hat{y}$, adopta la forma:

$$\hat{i}_{ref} = \text{sen}\phi\hat{\theta} + \cos\phi\hat{\phi} = -\left\{(1-\cos\theta)\,\text{sen}\phi\cos\phi\right\}\hat{x} + \left\{1-\text{sen}^2\phi(1-\cos\theta)\right\}\hat{y} - \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\hat{z}$$

$$\hat{i}_{crz} = \cos\phi\hat{\theta} - \text{sen}\phi\hat{\phi} = \left\{1-\cos^2\phi(1-\cos\theta)\right\}\hat{x} - \left\{(1-\cos\theta)\,\text{sen}\phi\cos\phi\right\}\hat{y} - \text{sen}\theta\cos\phi\hat{z}$$

Vemos que para obtener únicamente la componente de referencia, $\hat{y}$ en este caso, en el diagrama secundario, haría falta un alimentador capaz de producir en cada dirección (θ, ϕ) del espacio, unas

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

componentes como las descritas para dI_{ci}. Un alimentador con estas características, puede conseguirse superponiendo un dipolo eléctrico y uno magnético elementales de la misma intensidad, que se conoce como fuente de Huygens. En la práctica nos interesará, pues, utilizar alimentadores que se aproximen al máximo a las características de una fuente de Huygens.

Para iluminar reflectores parabólicos y lentes, es habitual utilizar alimentadores con geometría de revolución, como es el caso de las guías y bocinas circulares. El diagrama de estos alimentadores, puede aproximarse por una función "seudo-circular", [Wood, 80]:

$$\vec{E}(\theta,\phi) = E_E(\theta)\,\mathrm{sen}\phi\hat{\theta} + E_H(\theta)\cos\phi\hat{\phi}$$

donde $E_E(\theta)$ y $E_H(\theta)$ son los cortes del diagrama del alimentador en los dos planos principales, plano E y plano H. En ocasiones esta expresión se utiliza también de forma aproximada para las guías y bocinas de sección rectangular. Utilizando las expresiones de polarización de referencia y cruzada correspondientes a la tercera definición de Ludwig, la expresión anterior puede rescribirse como:

$$\vec{E}(\theta,\phi) = \left[E_E(\theta)\,\mathrm{sen}^2\phi + E_H(\theta)\cos^2\phi\right]\hat{i}_{ref} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\phi\left[E_H(\theta) - E_E(\theta)\right]\hat{i}_{crz}$$

De esta expresión pueden extraerse dos conclusiones:

- La distribución de polarización cruzada en la apertura del reflector (figura 6.35) y, como consecuencia, en el diagrama secundario (figura 6.36), tiene una repartición espacial muy característica, nula en los dos planos principales ($\phi = 0,\ \pi / 2$) y máxima en los planos diagonales ($\phi = \pm\pi / 4$).
- Un diagrama del alimentador con simetría de revolución, $E_E(\theta) = E_H(\theta)$, puede comprobarse que es un caso particular de la tercera definición de Ludwig, y que por lo tanto resulta en un diagrama secundario con polarización cruzada nula.

Decaimiento en los bordes

En la expresión (6.101) se observa que la distribución de campos en la apertura del reflector tiene una fase constante, debido a la igualdad de caminos, mientras que la amplitud no es uniforme. Esta falta de uniformidad es debida a dos causas:

a) La dependencia con $1/r'$, debida a que el campo decae como el de una onda esférica hasta incidir en el reflector. A partir del reflector y hasta llegar a la apertura, la propagación se realiza como onda plana y, por lo tanto, sin decaimiento de la amplitud. La propagación como onda plana hasta la apertura es una aproximación que dejaría de ser válida si pretendiéramos calcular el campo en un plano alejado de la boca del reflector.
Con esta suposición la relación de densidades de potencia para un ángulo θ' respecto al eje del paraboloide ($\theta' = 0$) se obtiene utilizando (6.83)

$$\frac{\wp(\theta')}{\wp(\theta' = 0)} = \frac{f^2}{r'^2} = \cos^4\frac{\theta'}{2} \qquad (6.103)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

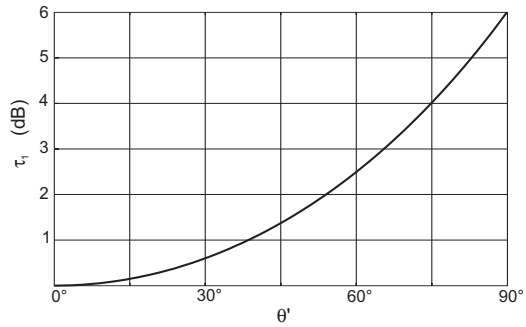


Fig. 6.37 Valores del decaimiento de la iluminación en función del ángulo

con el resultado, en dB, de una ley de decrecimiento de la iluminación

$$\tau_1(\theta') = 40\log\cos\frac{\theta'}{2} \quad (\text{dB}) \qquad (6.104)$$

La figura 6.37 representa este valor para el margen habitual de ángulos.

b) A ella habrá que añadir, en general, el decaimiento producido por la direccionalidad del diagrama de radiación del alimentador. Si suponemos que éste radia el máximo en la dirección del eje, tendremos $D_f(\theta', \phi') = D_f t_f(\theta', \phi')$, donde $t_f(\theta', \phi')$ es el diagrama de radiación normalizado y

$$\tau_2(\theta', \phi') = 10\log t_f(\theta', \phi') \quad (\text{dB}) \qquad (6.105)$$

La superposición de las dos contribuciones supone una variación de la amplitud en función de los ángulos θ', ϕ', bajo los que se ven los puntos del reflector desde el foco, dada por

$$\tau(\theta', \phi') = \tau_1 + \tau_2 = 40\log\cos\frac{\theta'}{2} + 10\log t_f(\theta', \phi') \quad (\text{dB}) \qquad (6.106)$$

Las ecuaciones paramétricas de la parábola nos permiten escribir esta distribución en términos de las coordenadas lineales del plano de la apertura.

En la figura 6.38 se representa un corte ($x' = 0$) de la distribución de campo en la apertura del reflector, donde se observa el decaimiento entre el centro y el borde del reflector.

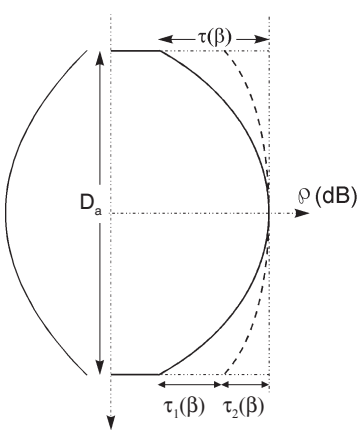


Fig. 6.38 Distribución de campo en la apertura del reflector

Habitualmente, el valor de decaimiento máximo se obtiene en los bordes del reflector y viene dado, para el caso de simetría de revolución, por

$$\tau(\beta) = 40\log\cos\frac{\beta}{2} + 10\log t_f(\beta) \quad (\text{dB}) \qquad (6.107)$$

En general, al aumentar el decaimiento, la distribución de campos presenta una discontinuidad más suave en los extremos, lo que implica diagramas secundarios con lóbulos más bajos y, por tanto, con NLPS más elevados.

En la figura 6.39 se muestra una curva de la relación NLPS en función de τ en los bordes $\tau(\beta) = \tau_1(\beta) + \tau_2(\beta)$, aunque en la práctica es, en general, difícil de obtener un NLPS>40 dB.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

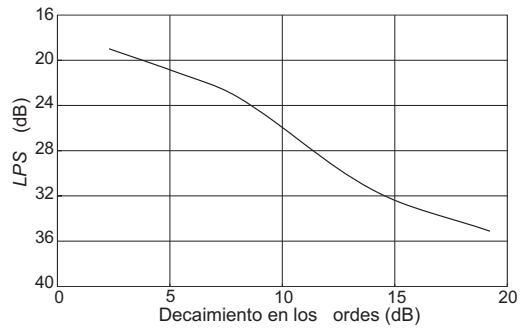


Fig. 6.39 Relación entre el decaimiento y el nivel de lóbulo principal a secundario (β = 53º)

Eficiencia y directividad

La finalidad de un reflector parabólico es concentrar la potencia radiada por el alimentador en una determinada dirección del espacio con un diagrama que cumpla unas especificaciones determinadas, habitualmente de directividad, nivel de lóbulos secundarios y polarización cruzada.

Si nos centramos en la directividad vamos a ver que un parámetro muy significativo es la eficiencia. Hemos definido la directividad de una antena en general mediante la expresión

$$D = \frac{\wp_{máx}}{P_r / \left(4\pi r^2\right)} = \frac{4\pi r^2 \left|E_{máx}\right|^2}{\eta P_r} \qquad (6.108)$$

donde (Fig. 6.40) $\wp_{máx}$ y $E_{máx}$ son, respectivamente, la densidad de potencia y el campo eléctrico radiados por el reflector en la dirección del máximo, y P_r es la potencia radiada por el alimentador.

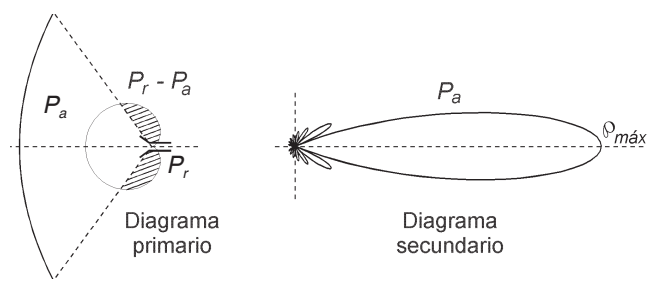


Fig. 6.40 Balance de potencias en un reflector parabólico

Si estudiamos detenidamente la forma en que se produce la concentración de potencia desde el alimentador hasta el lóbulo principal de radiación podremos reescribir la expresión anterior de forma más intuitiva. En efecto, de la potencia P_r radiada por el alimentador, sólo una parte P_a es interceptada por el reflector. La diferencia P_r-P_a no alcanza el reflector y no contribuye, por tanto, a la formación del diagrama secundario. A esta potencia se la conoce como potencia de desbordamiento, y en general interesa que sea lo menor posible. Podemos reescribir la ecuación (6.108) como

$$D = \frac{\wp_{máx}\, 4\pi r^2}{P_a} \; \frac{P_a}{P_r} \qquad (6.109)$$

El cociente P_a/P_r se define como la eficiencia de desbordamiento (*spillover*) y se denota por η_s.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\eta_s = \frac{P_a}{P_r} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\beta} D_f(\theta',\phi')\,\mathrm{sen}\,\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D_f(\theta',\phi')\,\mathrm{sen}\,\theta'\,d\theta'\,d\phi'} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\beta} D_f(\theta',\phi')\,\mathrm{sen}\,\theta'\,d\theta'\,d\phi' \qquad (6.110)$$

La potencia P_a genera en la boca del reflector una distribución de campos de la forma

$$\vec{E}_a(\rho',\phi') = E^a_{co}(\rho',\phi')\hat{e}_{co} + E^a_{cx}(\rho',\phi')\hat{e}_{cx} \qquad (6.111)$$

donde E^a_{co} y E^a_{cx} son las distribuciones de campo en la polarización de referencia y cruzada respectivamente en la apertura, y la potencia radiada por cada una de las dos componentes es P_{co} y P_{cx}. Puesto que estamos interesados únicamente en la potencia contenida en la polarización de referencia, se puede definir una eficiencia de polarización, η_x, como el cociente P_{co}/P_a. Podemos reescribir la ecuación (6.108) como

$$D = \frac{\wp_{máx}\,4\pi r^2}{P_{co}}\,\frac{P_{co}}{P_a}\,\frac{P_a}{P_r} \qquad (6.112)$$

Si modelamos la boca del reflector como una apertura, podemos escribir en función de la eficiencia de iluminación η_{il}

$$\frac{\wp_{máx}\,4\pi r^2}{P_{co}} = D_{apertura} = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{geométrica}\,\eta_{il} \qquad (6.113)$$

Nos queda finalmente, para la directividad de la antena completa,

$$D = \frac{\wp_{máx}\,4\pi r^2}{P_{co}}\,\frac{P_{co}}{P_a}\,\frac{P_a}{P_r} = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{geom}\,\eta_{il}\,\eta_x\,\eta_s = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{geom}\,\eta_t = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{ef} \qquad (6.114)$$

La eficiencia total, η_t, se obtiene, por lo tanto, como producto de las eficiencias de desbordamiento, η_s, de polarización, η_x, y de iluminación, η_{il}. Posteriormente introduciremos otros factores de eficiencia debidos a limitaciones prácticas de diseño. Las expresiones explícitas para η_x y η_{il}, en función de las coordenadas de la apertura son

$$\eta_x = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D_a}{2}}\left|E^a_{co}(\rho',\phi')\right|^2\rho'\,d\rho'\,d\phi'}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D_a}{2}}\left(\left|E^a_{co}\right|^2+\left|E^a_{cx}\right|^2\right)\rho'\,d\rho'\,d\phi'} \qquad (6.115)$$

$$\eta_{il} = \frac{1}{\pi\left(\frac{D_a}{2}\right)^2}\,\frac{\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D_a}{2}}E^a_{co}(\rho',\phi')\,\rho'\,d\rho'\,d\phi'\right|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D_a}{2}}\left|E^a_{co}(\rho',\phi')\right|^2\rho'\,d\rho'\,d\phi'} \qquad (6.116)$$

donde ρ' y ϕ' son el sistema de coordenadas polares sobre la boca del paraboloide. Es posible expresar también estas eficiencias en función de las coordenadas angulares del alimentador primario.

Supongamos una antena parabólica iluminada por un alimentador cuyo diagrama tiene simetría de revolución y, por lo tanto, $\eta_x = 1$. Para conocer su directividad (6.108) se tiene que calcular el campo máximo radiado por el paraboloide. Calculamos en primer lugar el campo en la dirección del máximo,

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

que estará en la dirección θ = 0. A partir de (6.102), y considerando la ausencia de componentes longitudinales del campo radiado, se obtiene

$$\vec{E}_{\text{máx}} = j\frac{e^{-jkr}}{\lambda r}\iint_{S_0}\vec{E}_a\,ds' \tag{6.117}$$

Para un alimentador linealmente polarizado y reflectores con f/D_a elevada, como los empleados habitualmente en antenas, puede considerarse que el vector de (6.101) es constante y coincide con la polarización del alimentador. En este caso

$$\left|E_{\text{máx}}\right| = \frac{1}{\lambda r}2\pi\int_0^{\frac{D_a}{2}} E_a\,\rho'\,d\rho' \tag{6.118}$$

y se obtiene de (6.101) el valor del campo en la apertura

$$E_a = \sqrt{\frac{\eta P_r D_f(\theta')}{4\pi}}\frac{1}{r'} \tag{6.119}$$

Sustituyendo estos valores en (6.108) resulta

$$D = \frac{4\pi r^2}{\eta P_r}\left(\frac{2\pi}{\lambda r}\right)^2\frac{\eta P_r}{4\pi}\left|\int_0^{\frac{D_a}{2}}\sqrt{D_f(\theta')}\,\frac{\rho'}{r'}\,d\rho'\right|^2 \tag{6.120}$$

Si nos referimos a la figura 6.41 podemos escribir

$$r' = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta'}{2}}$$

$$\rho' = r'\,\text{sen}\,\theta' = 2f\,\text{tg}\frac{\theta'}{2} \tag{6.121}$$

$$d\rho' = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta'}{2}}d\theta'$$

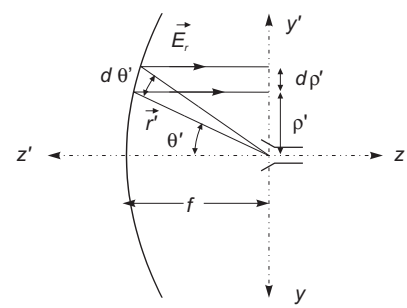


Fig. 6.41 Geometría del reflector iluminado con un diagrama con simetría de revolución

y una vez sustituidos en la expresión de la directividad se obtiene

$$D = \frac{16\pi^2}{\lambda^2}f^2\left|\int_0^{\beta}\sqrt{D_f(\theta')}\,\text{tg}\frac{\theta'}{2}d\theta'\right|^2 \tag{6.122}$$

Teniendo en cuenta (6.92) se llega a

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}\pi\left(\frac{D_a}{2}\right)^2\text{cotg}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|\int_0^{\beta}\sqrt{D_f(\theta')}\,\text{tg}\frac{\theta'}{2}d\theta'\right|^2 \tag{6.123}$$

Si se compara con la relación (6.114)

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{geom}\, \eta_t$$

se deduce que el producto de las eficiencias vale

$$\eta_s\, \eta_{il} = \operatorname{cotg}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|\int_0^{\beta} \sqrt{D_f(\theta')}\, \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} d\theta'\right|^2 \tag{6.124}$$

y recordando la definición de la eficiencia de desbordamiento, η_s (6.110), se obtiene

$$\eta_s = \frac{1}{2}\int_0^{\beta} D'_f(\theta')\operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \tag{6.125}$$

$$\eta_{il} = 2\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\frac{\left|\int_0^{\beta}\sqrt{D_f(\theta')}\, \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} d\theta'\right|^2}{\int_0^{\beta} D_f(\theta')\operatorname{sen}\theta'\, d\theta'} \tag{6.126}$$

Ejemplo 6.6 Un primer ejemplo de un reflector, que puede ser analizado de forma sencilla, es el constituido por un paraboloide de revolución alimentado por una apertura elemental de diagrama (6.15)

288

$$D_f(\theta') = 3\cos^4\left(\frac{\theta'}{2}\right)$$

Los campos en la apertura valen en este caso (6.101),

$$\vec{E}_a = \sqrt{90 P_r}\, \frac{1}{f}\cos^4\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{-jk2f}\, \hat{e}_r$$

y se tiene una ley de iluminación de tipo

$$\tau(\theta') = 80 \log\cos\frac{\theta'}{2} \quad (\text{dB})$$

que, por ejemplo, para f/D_a=0,25 produce un decaimiento en bordes de 12 dB. Las eficiencias de desbordamiento e iluminación se obtienen de (6.125) y (6.126) y valen

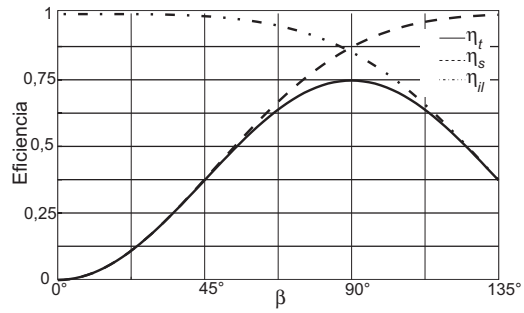
$$\eta_t = \eta_{il}\, \eta_s = \operatorname{cotg}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|\int_0^{\beta}\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta'\right|^2 = \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2\beta$$

$$\eta_s = \frac{3}{2}\int_0^{\beta}\cos^4\left(\frac{\theta'}{2}\right)\operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = 1 - \cos^6\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\eta_{il} = \frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{1-\cos^6(\beta/2)}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Se observa que para una apertura elemental el reflector óptimo posee una f/D_a=0,25 y se obtiene una eficiencia total del 75%.



Relación f/D_a

La elección del parámetro f/D_a es de enorme importancia en el diseño de una antena parabólica. Como vimos anteriormente (Fig. 6.31) está directamente relacionado con el ángulo de visualización del borde del reflector, β. En la figura 6.42 se representa la forma del reflector para cuatro valores de f/D_a. Se observa que, al disminuir su valor, el ángulo β aumenta, la posición del alimentador se va acercando a la parábola y la curvatura del reflector aumenta. En la figura 6.43 se representan dos situaciones extremas de este parámetro. Para f/D_a bajos ($f/D_a \leq 0{,}25$) el alimentador está en el interior de la parábola, con lo cual las pérdidas por desbordamiento y la captación de ruido externo son muy bajos; por contra, la iluminación de la apertura presenta un fuerte decaimiento en los bordes, por lo cual no se utiliza eficientemente la superficie de la parábola; además, la curvatura del reflector y, por tanto, la polarización cruzada, son elevadas. Valores de f/D_a elevados ($f/D_a \geq 0{,}5$) permiten una buena iluminación de la apertura y una polarización cruzada baja, pero tienen elevadas pérdidas por desbordamiento y presentan problemas mecánicos de sujeción del alimentador.

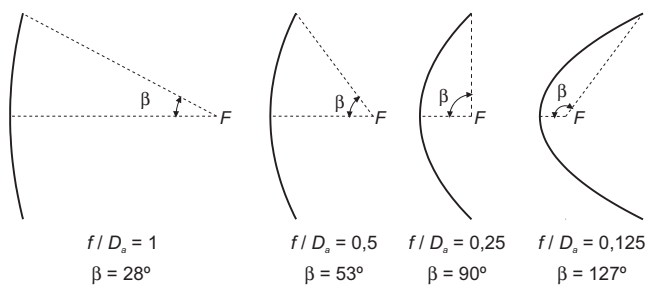


Fig. 6.42 Geometría del reflector para distintos valores de f/D_a

Es habitual trabajar con valores de f/D_a en el margen de 0,25 a 0,5, donde se obtiene una buena solución de compromiso entre las ventajas e inconvenientes descritos anteriormente. Dentro de este margen puede afirmarse con carácter general que al disminuir f/D_a:

- disminuyen las pérdidas por desbordamiento;
- disminuye el ruido externo captado de la tierra, especial-

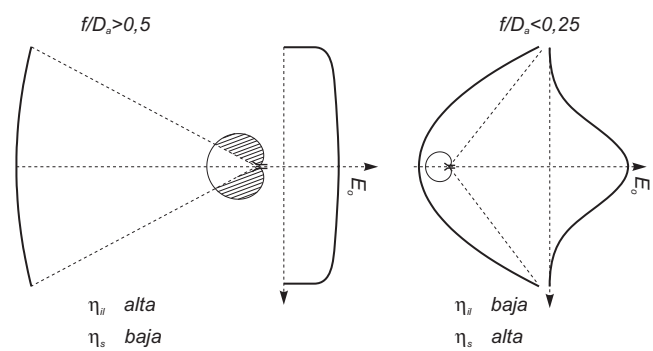


Fig. 6.43 Configuraciones extremas del parámetro f/D_a

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

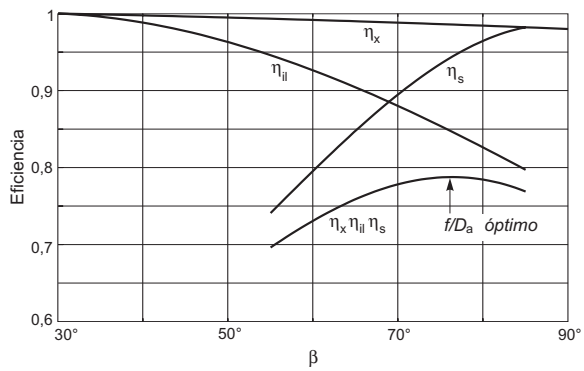


Fig. 6.44 Variación de los parámetros de eficiencia en función de β

mente en aplicaciones de radioastronomía donde la antena está apuntando hacia el cielo;

- disminuye la distancia focal, con las consiguientes ventajas mecánicas;
- disminuye el nivel de los lóbulos secundarios (mejora el NLPS);
- empeora la iluminación de la apertura;
- empeora la polarización cruzada;

En la figura 6.44 se representa una gráfica de la variación de las diferentes eficiencias en función del parámetro f/D_a para un alimentador tipo bocina. Se observa que hay un punto en el que se optimiza la eficiencia total del reflector para ese alimentador en concreto. Al cambiar el alimentador variará la forma de las curvas y, por tanto, el punto óptimo. Cuando se requiera la máxima directividad de un reflector será habitual escoger este punto de trabajo. Sin embargo, para aplicaciones donde se necesitan valores excepcionalmente bajos de polarización cruzada o del nivel de lóbulos secundarios, se utilizarán otros puntos de trabajo que no son óptimos desde el punto de vista de la eficiencia. Se encuentra en general que, para iluminaciones en los bordes del orden de -10 dB respecto al centro, se suelen obtener los mejores diseños en cuanto a directividad, mientras que en torno a -20 dB es el nivel habitual para un buen NLPS.

Ejemplo 6.7 Vamos a realizar un diseño típico de un reflector y una bocina piramidal de forma que se cumplan las siguientes especificaciones:
- frecuencia de trabajo: 10 GHz
- directividad: 37 dB
- nivel de lóbulo principal a secundario: 30 dB
- nivel de polarización cruzada: bajo

Para estimar el diámetro de la antena se puede suponer, inicialmente, un valor de la eficiencia total bajo, $\eta_t = 0{,}5$. Podemos obtener entonces D_a como

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{geom}\, \eta_t = \left(\frac{\pi D_a}{\lambda}\right)^2 \eta_t = 10^{3{,}7}$$

de donde resulta un valor aproximado de $D_a = 1$m. Éste es un valor que habrá que calcular con mayor exactitud cuando al final del diseño se tenga el valor preciso de η_t.
Vamos a iniciar el proceso seleccionando una relación f/D_a. Puesto que el diseño requiere una polarización cruzada baja, escogeremos un valor elevado de f/D_a, es decir f/D_a=0,5, que resulta en un ángulo en el foco $\beta = 53º$.
La iluminación en el borde debido al efecto de la propagación (6.104) será $\tau_1 = -1{,}9$ dB. A fin de obtener en el paraboloide un NLPS = 30 dB, necesitamos (Fig. 6.39) una iluminación total en el borde de valor $\tau = -14{,}5$ dB, por lo que el decaimiento en bordes provocado por el alimentador ha de ser $\tau_2 = \tau - \tau_1 = -12{,}6$ dB. En un diseño general del alimentador habría que buscar en las gráficas 6.13 y 6.15 las dimensiones de la bocina, de forma que el diagrama resultante fuera $\tau_2(\theta'=\beta) = -12{,}6$ dB. Para cualquier antena directiva se tiene, en general, que una curva parabólica es una buena representación del

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

diagrama de radiación en el haz principal, si es simétrico. Se obtiene en función del ancho a -3 dB, $\Delta\theta^{boc}_{-3\,\mathrm{dB}}$

$$\tau_2 \approx -12\left(\beta/\Delta\theta^{\mathrm{boc}}_{-3\,\mathrm{dB}}\right)^2 \ \mathrm{dB}$$

con el resultado de que, para τ_2 = -12,6 dB, se necesita una bocina con un ancho de haz a -3 dB de valor $\Delta\theta^{boc}_{-3\,\mathrm{dB}} = 52°$. Las dimensiones de la boca de la bocina piramidal pueden obtenerse de las gráficas 6.13 y 6.15. Al tratarse de una bocina poco directiva, sus dimensiones totales no serán críticas con lo que podemos trabajar con errores de fase inferiores a los del diseño para directividad óptima y escogemos *s*=*t*=1/8. Se obtiene entonces:

$$\frac{b_1}{\lambda}\mathrm{sen}26^\circ = 0,46, \quad b_1 = 1,1\lambda; \qquad \frac{a_1}{\lambda}\mathrm{sen}26^\circ = 0,62, \quad a_1 = 1,4\lambda;$$

las longitudes de transición de la guía resultan:

$$\ell_\varepsilon = \frac{b_1^2}{8\lambda s} = 1,2\lambda; \qquad \ell_H = \frac{a_1^2}{8\lambda t} = 2,1\lambda$$

Con estas dimensiones deberá ensamblarse la bocina a la guía rectangular, tal y como se representa en la figura 6.16.

La directividad del paraboloide alimentado por esta bocina será la dada por (6.114), y aplicando (6.110), (6.115) y (6.116) se obtiene una eficiencia total de 0.7, y por tanto una directividad de 38,9 dB, para un diámetro de 1 m. Dada esta eficiencia, la directividad de 37 dB se alcanzaría con un reflector de 80 cm. En la figura 6.45 se representa su diagrama de radiación.

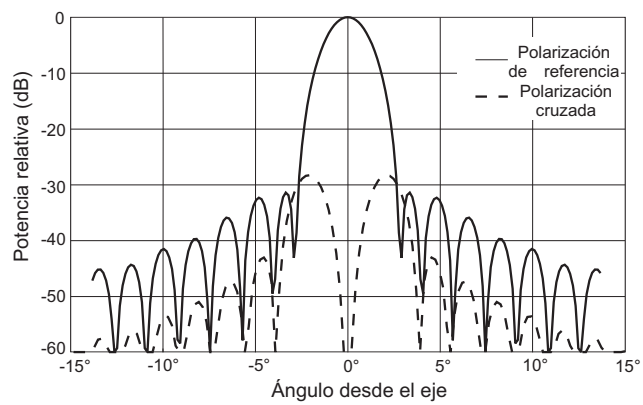


Fig. 6.45 Diagrama de radiación del reflector parabólico

Una opción alternativa para el alimentador, sería escoger una guía circular con un modo híbrido optimizada para unos 50°, tal como se muestra más adelante en la figura 6.49.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.4.2.4 Consideraciones de tipo práctico

Tolerancia del reflector

Hasta ahora se ha supuesto una superficie perfectamente parabólica. Las desviaciones de esta forma producirán, básicamente, errores de fase en la apertura, que significarán una pérdida de eficiencia y la aparición de una radiación difusa parásita. Un estudio de los efectos de la rugosidad de la superficie realizado por Ruze establece que, para un error cuadrático medio de la superficie, σ, la pérdida de directividad puede expresarse como

$$\Delta D = -4{,}3\left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda}\right)^2 \quad \text{(dB)} \tag{6.127}$$

Valores habituales de la tolerancia son errores de pico de λ/16 en aplicaciones comerciales y de λ/32 en aplicaciones profesionales. Para un error de pico de λ/16, que de acuerdo con los valores encontrados experimentalmente se traduce [Skolnik, 62] en un error cuadrático medio de λ/45, se produce una pérdida de directividad de 0,3 dB.

Bloqueo

Uno de los inconvenientes del alimentador frontal, especialmente en el caso Cassegrain por la mayor superficie del subreflector, es el bloqueo que produce el alimentador o el subreflector. La presencia de una superficie opaca en la apertura crea un agujero en la iluminación que disminuye la directividad y aumenta el nivel de los lóbulos secundarios.

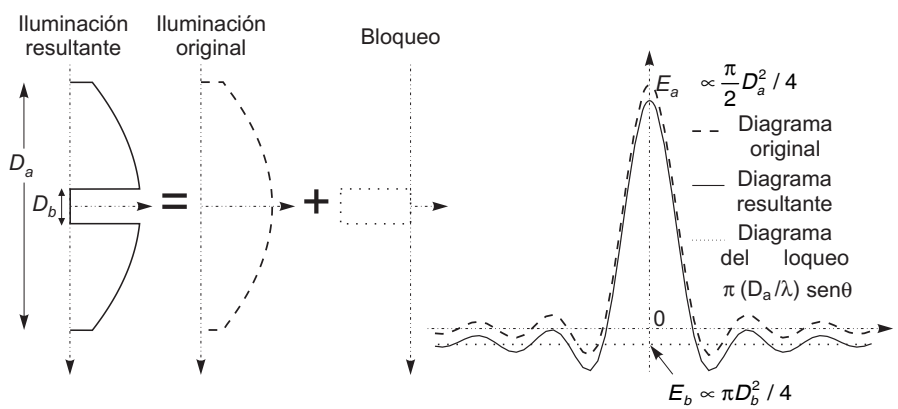


Fig. 6.46 Modelo de bloqueo de la apertura

Para analizar este efecto se puede utilizar una aproximación, basada en la óptica geométrica, de campo nulo sobre la zona de bloqueo, descomponiendo la iluminación resultante en las dos componentes de la figura 6.46. Suponiendo una distribución entre la uniforme y la triangular en la apertura circular de diámetro $D_a \left(E^r_{máx} \propto \frac{1}{2}\pi D_a^2 / 4\right)$, y un obstáculo de diámetro D_b y distribución uniforme, el efecto que se produce es:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

- una pérdida de directividad de valor

$$\Delta D = 20\log\left(1-2\left(\frac{D_b}{D_a}\right)^2\right) \quad \text{(dB)} \tag{6.128}$$

- la aparición de un nivel residual de radiación que se superpone al de los lóbulos secundarios propios de la distribución sin bloqueo, de valor

$$NLPS = 20\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{D_a}{D_b}\right)^2\right] \quad \text{(dB)} \tag{6.129}$$

Para el caso de tener una relación $D_a/D_b = 10$ se tiene ΔD = -0,18 dB y aparece una radiación residual a un nivel de -34 dB respecto al principal. El NLPS de la distribución con bloqueo será el de la distribución original afectada con este nivel residual. En la práctica, excepto para el caso Cassegrain, la relación D_a/D_b será superior a 10 y los efectos producidos serán menores.

Desadaptación de la bocina

Un efecto asociado con el bloqueo es la aparición de una potencia reflejada en el alimentador. Al encontrarse éste en el frente de onda del paraboloide, intercepta parte de la energía reflejada, y se produce en él una desadaptación. El campo incidente sobre el vértice del reflector, que es el que luego viaja hasta el centro de la apertura, vale (6.94)

$$|E_i| = \sqrt{\frac{\eta P_r D_f}{4\pi}}\,\frac{1}{f}$$

La potencia interceptada por el alimentador es

$$P_f = \frac{|E_i|^2}{\eta} A_{ef_f} = \frac{P_r D_f}{4\pi f^2} A_{ef_f}$$

y el coeficiente de reflexión, $|\rho|^2 = P_f / P_r$, toma el valor

$$|\rho| = \frac{D_f \lambda}{4\pi f} \tag{6.130}$$

Para el ejemplo 6.7, con D_f=10 dB y $f = 50\lambda/\pi$, resultaría $|\rho| = 0{,}05$ y una relación de onda estacionaria S = 1,1.

Radiación posterior del alimentador

La radiación posterior del alimentador puede interferir constructiva o destructivamente con la radiación proveniente del reflector. Esto produce una modulación del diagrama cuya importancia depende de la relación entre las dos amplitudes. Para un valor D de la directividad del paraboloide y un valor D_{fp} de la directividad del alimentador en la dirección posterior, la pérdida de directividad en el caso más desfavorable viene dada por

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\Delta D = 20 \log\left(1 - \sqrt{\frac{D_{fp}}{D}}\right) \text{ (dB)} \tag{6.131}$$

Para el caso de un paraboloide con D = 34 dB y D_{fp} = -5 dB, resulta ΔD = -0,1 dB.

Película de agua, hielo o nieve

Uno de los efectos que se deben considerar a la hora de evaluar el rendimiento de una antena, es que se produzca sobre el reflector una lámina de agua, hielo o nieve. La más importante de las tres, por las pérdidas que comporta, es el agua.

La situación se agrava cuando la lámina alcanza un grosor de $\lambda_{ef}/4$ (1 mm a 10 GHz; 0,7 mm a 15 GHz; 0,4 mm a 30 GHz).

Es habitual tomar en consideración estos efectos, y los anteriormente descritos, introduciendo factores adicionales de pérdidas en la expresión de la eficiencia total del reflector (6.114), de tal forma que queda

$$\eta_t = \eta_s \, \eta_x \, \eta_{il} \, \eta_\sigma \, \eta_b \, \eta_l \tag{6.132}$$

donde η_σ tiene en cuenta los efectos debidos a la tolerancia del reflector, η_b los efectos debidos al bloqueo del alimentador o del subreflector, y η_t los efectos debidos a las pérdidas óhmicas de la antena (1.1).

La eficiencia total de una antena de reflector parabólico puede alcanzar valores entre 0,75 y 0,85 en el caso ideal. Cuando se toman en consideración los efectos anteriores este valor puede descender hasta 0,7 en buenos diseños, estando típicamente en torno a 0,6.

6.4.2.5 Tipos de alimentador

En el diseño del alimentador se persiguen dos objetivos básicos: obtener una eficiencia elevada y un nivel de polarización cruzada baja. Otras características del diseño de una antena de reflector parabólico, como el nivel de lóbulos secundarios, dependen más de los criterios de elección del reflector principal.

Para los reflectores simétricos, el alimentador ideal sería aquel que produjera una distribución en la apertura que fuera constante en amplitud y fase y que no radiara fuera del sector angular cubierto por el reflector. En este caso, el diagrama de amplitud del alimentador debería ser inversamente proporcional al $\cos^2\theta$' (atenuación de la onda esférica). Esto, aunque optimizaría la eficiencia de iluminación, generaría un nivel de lóbulos secundarios excesivamente elevado para la mayoría de aplicaciones. En cuanto a la polarización, interesaría que el diagrama secundario resultante fuera nulo en todo el espacio. Para ello el alimentador debería radiar un diagrama con simetría de revolución, como ya se comentó anteriormente.

Se puede hacer un análisis alternativo considerando la antena en recepción. En estos términos, el alimentador ideal sería aquel que captara toda la potencia interceptada por el reflector, cuando una onda plana linealmente polarizada incidiera normalmente sobre él. El alimentador debe de ser capaz de adaptarse a la distribución de campos generada en el plano transversal que contiene el foco por la onda incidente. Un análisis óptico permite obtener que, para el caso de un reflector con simetría de revolución, la distribución de amplitud debe de ser la función de Airy $(2J_1(u)/u)$, que no es más que la transformada de Fourier de una distribución circular uniforme. Aunque este análisis es escalar, indica que, para obtener eficiencias elevadas, por reciprocidad los análisis en transmisión y en recepción son

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

equivalentes, hay que tender a alimentadores cuya distribución de campos en la boca se acerque a la función de Airy, lo que es equivalente a la conformación progresiva del alimentador.

Esta conformación del diagrama del alimentador no será en general posible, debido a que la posibilidad de conformación aumenta con las dimensiones del alimentador, pero ello supone un bloqueo creciente, lo cual impone una solución de compromiso en las dimensiones.

Los diferentes alimentadores pueden agruparse en dos categorías, según sea el tipo de modos que soporten: modos transversales puros (TE, TM) y modos híbridos (HE, EH).

Modos transversales puros (TE, TM)

Es la forma más sencilla de alimentador (Fig. 6.47), y consiste en una guía o bocina propagando el modo fundamental. El ejemplo más significativo es la guía y bocina circulares con el modo TE_{11}. El diagrama de radiación es ligeramente asimétrico, lo que crea una pérdida de eficiencia y un aumento de la polarización cruzada. Este inconveniente puede ser reducido escogiendo un radio adecuado de la guía, a/λ. Hay que destacar en esta categoría los alimentadores multimodo que permiten obtener eficiencias de hasta un 85%, con f/D_a elevadas, pero con anchos de banda reducidos.

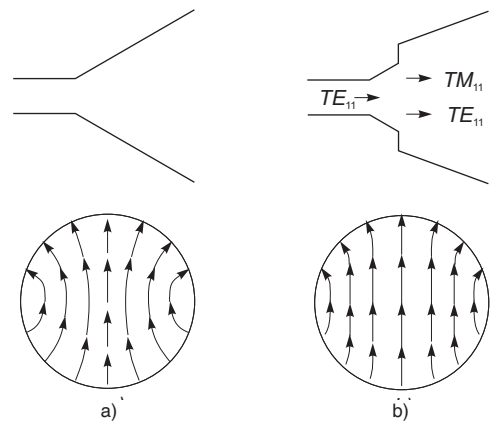


Fig. 6.47 Bocinas con modos transversales puros: a) cónica excitada con el modo TE_{11} y b) multimodo (2 modos)

Modos híbridos (HE, EH)

El término híbrido describe los modos que tienen componente de campo eléctrico y simultáneamente de campo magnético en la dirección de propagación. Una superposición de estos modos puede radiar un diagrama circularmente simétrico con diagrama de polarización cruzada nulo. Las dos estructuras básicas que los soportan son las superficies corrugadas y los conos dieléctricos (Fig. 6.48).

Estas estructuras permiten obtener eficiencias elevadas, debido a la simetría del diagrama y, por tanto, de la iluminación del reflector, con niveles de polarización cruzada bajos. Sus principales inconvenientes pueden ser su mecanización laboriosa y la complejidad de análisis.

En el caso monomodo se consiguen mejoras de eficiencia respecto al

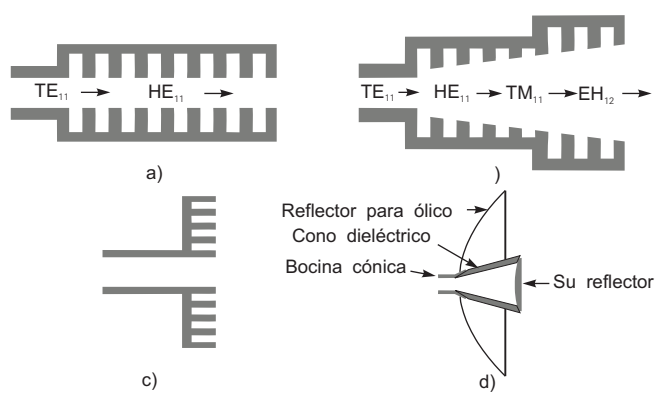


Fig. 6.48 a) guía circular corrugada monomodo, b) bocina cónica arrugada multimodo, c) bocina corrugada abierta a 90º y d) bocina con cono dieléctrico

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

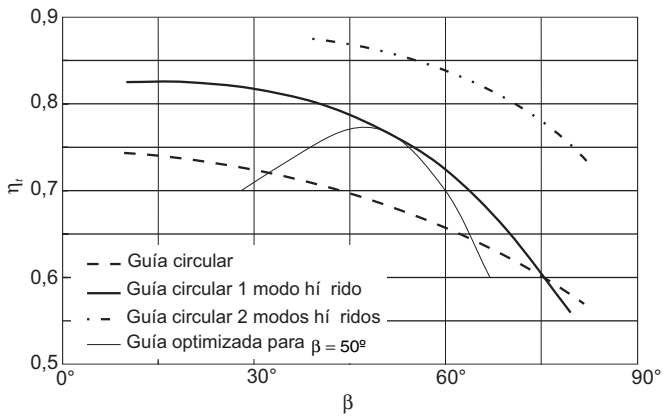


Fig. 6.49 Eficiencias teóricas óptimas de diferentes alimentadores

monomodo transversal puro, del orden de un 5%, pero con una clara mejora de la polarización cruzada, y prestaciones similares a las conseguidas con bocinas multimodos transversales, a igualdad de diámetro. Con la utilización de multimodos híbridos se consigue una mejora de la eficiencia de un 10% respecto al monomodo, con el inconveniente de un ancho de banda limitado (<10%). Ha de tenerse en cuenta que el ancho de banda típico de una guía circular es del orden del 30%.

Una solución interesante la constituyen las bocinas corrugadas abiertas a 90º (Fig. 6.48c). Al retirar gradualmente el plano corrugado hacia atrás, desde el plano de la boca de la guía, se obtiene una progresiva conformación del diagrama.

Hay que citar por último los conos dieléctricos (Fig. 6.48d), especialmente adaptados a la geometría Cassegrain, por la posibilidad de soportar el subreflector, que permiten eficiencias teóricas superiores al 80%.

En la figura 6.49 se representan de forma indicativa las eficiencias teóricas que pueden obtenerse con los diferentes tipos de alimentador. Cada una de las curvas corresponde a la envolvente de las eficiencias totales máximas para un determinado tipo de alimentador, optimizando sus dimensiones para cada valor de β. A título indicativo se ha superpuesto también la curva de eficiencia para el caso de un alimentador en guía circular con un modo híbrido optimizado para β = 50º.

6.4.2.6 Geometrías de reflector

La geometría estudiada hasta el momento consiste en un paraboloide circular alimentado desde su parte frontal por un radiador primario centrado. Esta configuración ha sido ampliamente utilizada por razones de sencillez y economía.

Las relaciones f/D_a habituales están comprendidas entre 0,25 y 0,5 y las eficiencias totales reales entre el 55 y el 70%. Eficiencias teóricas de hasta un 80% pueden obtenerse utilizando alimentadores más complejos. Los inconvenientes de esta geometría están relacionados con la situación del alimentador delante del reflector. Esto significa un acceso difícil y un bloqueo de la radiación; este bloqueo produce una pérdida de directividad y un aumento de los lóbulos secundarios y de los niveles de polarización cruzada.

Reflector asimétrico (*offset*)

Una manera de evitar el bloqueo consiste en utilizar un alimentador descentrado que ilumine una porción de superficie parabólica localizada asimétricamente a un lado del eje, como se representa en la figura 6.50. Esta solución permite un control mayor de la radiación proveniente del reflector en cuanto a directividad, lóbulos secundarios (es posible obtener niveles de -40 dB) y polarización

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

cruzada. Permite también utilizar relaciones f/D_a superiores al caso de alimentación frontal y la colocación en el foco de varios alimentadores. Una ventaja adicional es el desacoplo entre el alimentador y el reflector, lo que significa que el coeficiente de reflexión en la apertura del alimentador será independiente del reflector.

La principal desventaja de esta geometría es que produce un nivel de polarización cruzada superior al caso de alimentación frontal debido a la falta de simetría de la estructura. Si se utiliza polarización circular el reflector no despolariza el campo radiado, sino que produce un ligero desapuntamiento del haz.

A pesar de que se trata de una estructura mecánica y analíticamente más compleja que la simétrica, la demanda creciente que se exige en las prestaciones de las antenas ha propiciado un rápido incremento de su utilización. Es el tipo de reflector que se utiliza habitualmente a bordo de los satélites.

El método de análisis es similar al de un paraboloide completo. Las eficiencias que se pueden obtener son ligeramente superiores al caso de alimentación frontal, y esto es debido básicamente al hecho de utilizar relaciones f/D_a mayores. Con relaciones f/D_a superiores a 0,5 las eficiencias teóricas están comprendidas entre el 70 y el 80%.

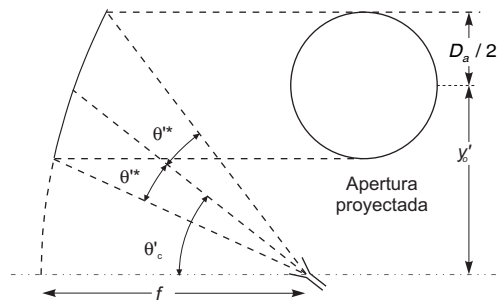


Fig. 6.50 Geometría de reflector asimétrico (*offset*)

Antenas con múltiples reflectores. Antena Cassegrain

En aplicaciones espaciales donde se requiere una gran directividad de la antena, una elevada potencia en el transmisor y un receptor de bajo ruido, incluso refrigerado en algunos casos, utilizar una gran antena reflectora implica grandes distancias del transmisor o receptor al foco y la imposibilidad de colocar equipos en él, por lo que una solución es emplear un segundo reflector o subreflector y colocar la alimentación cerca o en el vértice del paraboloide. Los subreflectores típicos son hiperboloides o elipsoides cuyo foco coincide con el del paraboloide o reflector principal. La configuración más utilizada es la Cassegrain, derivada del telescopio del mismo nombre, que consiste (Fig. 6.51) en un reflector principal parabólico combinado con un subreflector hiperbólico.

En la figura 6.51 se indican, para un alimentador en posición arbitraria, los ángulos y distancias significativos y, en particular, el bloqueo de la apertura. El diámetro resultante de bloqueo será el máximo de los bloqueos producidos directamente por el subreflector de diámetro D_s y por la sombra que proyecta el alimentador desde el foco sobre el paraboloide, de diámetro D_s'. Un aumento del

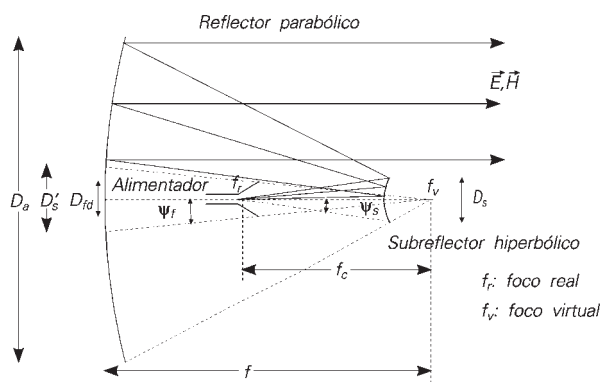


Fig. 6.51 Geometría de un reflector Cassegrain

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

diámetro del alimentador, D_{fd}, reducirá su ancho de haz, lo que permitirá reducir el tamaño del subreflector y, por tanto, el bloqueo que éste produce, pero en contrapartida aumentará el diámetro D_s' de la zona de sombra y, por consiguiente, el tamaño del bloqueo resultante. En el otro sentido, una disminución del tamaño del alimentador nos llevaría a la necesidad de aumentar la dimensión del subreflector. Se concluye que el bloqueo es mínimo cuando se consigue que $D_s = D_s$'. Si para evitar pérdidas por desbordamiento el alimentador se dimensiona de forma que el primer cero de radiación caiga en el borde del subreflector, se tiene que su ancho de haz entre ceros es

$$2\psi_s \approx 2\frac{\lambda}{D_{fd}} \tag{6.133}$$

Si la estructura que soporta el alimentador tiene dimensiones apreciables, el cociente K entre el diámetro del alimentador y el de la superficie efectiva de bloqueo (ordinariamente $K \leq 1$) aparece en la expresión anterior en el denominador, y mediante consideraciones geométricas puede establecerse para el diámetro del subreflector D_s, que minimiza el bloqueo cuando $f_c = f$ (alimentador en el vértice), el valor

$$D_s \approx \sqrt{2\lambda f / K} \tag{6.134}$$

Desde el punto de vista de la radiación, esta geometría puede analizarse como si fuera un paraboloide alimentado frontalmente pero con una distancia focal (y, por tanto, una relación f/D_a) mayor. Este reflector parabólico equivalente se obtiene geométricamente tal como se muestra en la figura 6.52.

Esta configuración permite conseguir una iluminación del reflector más uniforme y unas pérdidas por desbordamiento más bajas. Las eficiencias reales típicas son del orden del 65 al 75%, que son casi un 10% mayores que en el caso de alimentación frontal. Si se disminuye el diámetro del reflector principal, los efectos del bloqueo aparecen de forma importante, por lo que la configuración Cassegrain es la solución adecuada cuando se desean directividades elevadas, habitualmente por encima de 40 dB. Esta es la razón del uso prácticamente exclusivo de estas antenas como grandes reflectores para radioastronomía, comunicaciones espaciales y en estaciones terrenas de comunicaciones vía satélite.

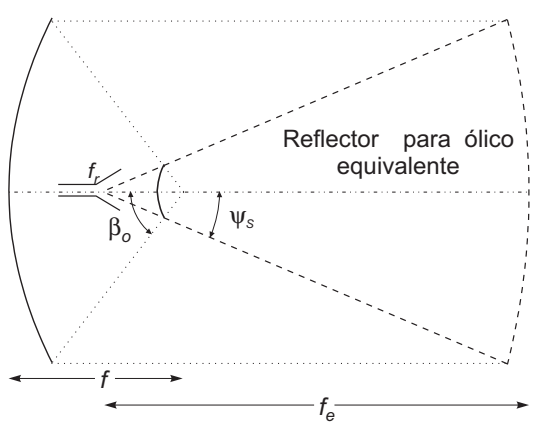


Fig. 6.52 Reflector parabólico equivalente para la geometría Cassegrain

Cuando la posición del alimentador, situado en uno de los focos del hiperboloide, se mueve hacia el subreflector, éste va disminuyendo su concavidad hasta convertirse en plano, cuando las distancias al subreflector de los dos focos del hiperboloide coincidentes con la posición del alimentador y del foco de la parábola se hacen iguales. Si ahora movemos el foco de la parábola solidario con el del subreflector hacia el reflector principal hasta colocarse entre ambos, el subreflector se transforma en un elipsoide cóncavo y la configuración se denomina Gregoriana por analogía con el telescopio del mismo nombre (Fig. 6.28).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cilindro parabólico

Antenas basadas en el principio de la parábola pueden construirse por la traslación de la parábola sobre una generatriz. Un ejemplo de ello es el cilindro parabólico recto (Fig. 6.53). En este caso la alimentación ha de hacerse desde una línea focal, lo que producirá una onda cilíndrica que será reflejada en el cilindro parabólico. El análisis se realiza de manera similar al del reflector simétrico, salvo que en este caso la apertura será rectangular y el factor de atenuación desde el foco al reflector será el correspondiente a una onda cilíndrica, $\wp \propto 1/\rho$.

Se emplea este tipo de geometrías en algunas antenas de radares de cobertura, en los que se precisa un haz estrecho en el plano horizontal y ancho en el vertical.

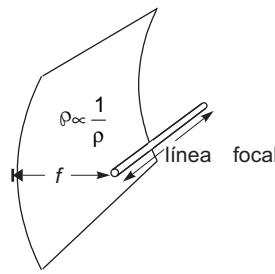


Fig. 6.53 Reflector parabólico cilíndrico

6.5 Lentes

Un procedimiento distinto para, a partir de fuentes puntuales, lograr grandes superficies radiantes con campos en fase consiste en hacer viajar la radiación por un medio con distinta constante de propagación que el aire, que iguale los caminos eléctricos recorridos por distintos rayos que lo atraviesan provenientes de un centro de fase esférica. Esta estructura no es más que una lente en el sentido clásico de óptica.

6.5.1 Análisis electromagnético

Supongamos un medio de índice de refracción n. La velocidad de fase en este medio será $v = c/n$ y el tiempo Δt empleado en recorrer una distancia Δz' en él será

$$\Delta t = \frac{\Delta z'}{v} = \frac{n \Delta z'}{c} \tag{6.135}$$

que permite referir los tiempos empleados a los que se habrían requerido en el vacío, sin más que multiplicar por el índice de refracción o, equivalentemente, definir caminos ópticos o longitudes eléctricas mediante (Δz')n. Si el medio es tal que n > 1, las ondas se propagarán en él con una velocidad de fase menor que en el vacío; si n < 1, se propagarán con una velocidad de fase mayor que en el vacío al tratarse de un medio dispersivo, siempre teniendo en cuenta que la velocidad de grupo sigue siendo menor que la de la luz. Un ejemplo del primer caso es un dieléctrico y del segundo una guía de ondas, donde

$$\begin{aligned} \beta &= k\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2} \\ \lambda_g &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \\ v_g &= \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \\ n &= \sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2} < 1 \end{aligned} \tag{6.136}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Además de los dieléctricos naturales, que tienen n > 1, se han fabricado, para ser usados a frecuencias de microondas, diversos dieléctricos artificiales; algunos de ellos presentan n > 1, pero otros tienen n < 1. En general, los medios con n > 1 no presentan dispersión, mientras que los de n < 1 sí. Con ellos se han construido lentes que no tienen equivalentes ópticos.

Vamos a analizar el caso más sencillo correspondiente al de una lente de una cara, y a partir de la condición de igualdad de caminos obtener la ecuación de su perfil. Por ejemplo, para la figura 6.54 se tiene, para dos rayos, uno incidente según un ángulo arbitrario θ' y otro según el eje *z'*, la siguiente relación para los tiempos empleados según se siga uno u otro camino

$$\frac{r'}{c} = \frac{f}{c} + \frac{r'\cos\theta - f}{c} n \tag{6.137}$$

de donde se obtiene la ecuación de la superficie de la lente, en coordenadas esféricas, cuando su eje coincide con el eje *z*'

$$r' = \frac{(n-1) f}{n\cos\theta' - 1} \tag{6.138}$$

expresión también válida para el caso n < 1. En la aproximación paraxial de las lentes ópticas $(\theta' \approx 0,\ r' \approx f)$ este perfil se considera esférico de radio R = (n-1)*f*.

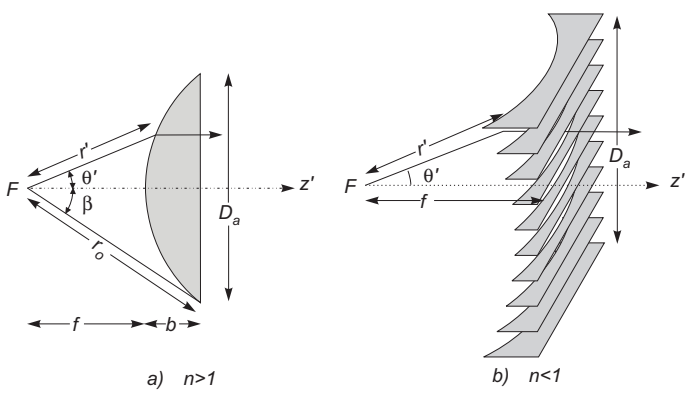


Fig. 6.54 Geometría de la lente

De nuevo, aunque la fuente situada en el foco fuera isótropa, la iluminación a la salida de la lente no sería uniforme, ya que los caminos recorridos por la onda esférica son distintos. En general, para n > 1 la iluminación es menor en los bordes que en el centro, mientras que para n < 1 es mayor, lo que repercute en el alimentador si se desea una iluminación prefijada. Lentes con n < 1 pueden construirse creando con múltiples guías el medio y configurándolo según la forma de la figura 6.54.

Un segundo factor que se debe tener en cuenta es la atenuación producida por las pérdidas en el medio y por la energía reflejada en la superficie de la lente. Para incidencia normal sobre un dieléctrico el coeficiente de reflexión ρ, vale

$$\rho = \frac{n-1}{n+1} \tag{6.139}$$

y las pérdidas totales por reflexión se obtendrán integrando sobre todas las direcciones de incidencia los coeficientes de reflexión (2.7) y (2.8) para ambas polarizaciones. Para la mayoría de las lentes puede utilizarse el siguiente valor aproximado

$$L = 8{,}69 \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \quad \text{(dB)} \tag{6.140}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Ejemplo 6.8 A frecuencias milimétricas se pueden construir lentes de reducidas dimensiones. Los materiales más utilizados son el teflón, la alúmina y el cuarzo fundido. En este ejemplo diseñaremos una lente para una frecuencia de 90 GHz, utilizando este último material ($\varepsilon' = 3{,}78$; $\mathrm{tg}\delta = 10^{-3}$), de dimensiones $D_a = f = 10$ cm (30λ). El ángulo β bajo el que se ve el borde está relacionado con el f/D_a de forma semejante a un reflector. La dependencia se establece a partir de (6.138)

$$r_0 = f\frac{n-1}{n\cos\beta - 1}$$

y de $r_0 \mathrm{sen}\,\beta = D_a/2$, resulta

$$\frac{f}{D_a} = \frac{n\cos\beta - 1}{2(n-1)\mathrm{sen}\,\beta}$$

Se obtiene en este caso $\beta = 24{,}2^\circ$ y $r_o = 12{,}2$ cm. El grosor máximo de la lente, d, que se calcula a partir de $r_o \cos\beta = f + d$, vale $d = 1{,}14$ cm ($3{,}4\lambda$).
La ley de iluminación para un alimentador isótropo es

$$\tau_1(\theta') = 10\log\frac{\wp(\theta')}{\wp(0)} = 20\log\frac{f}{r} = 20\log\left(\frac{n\cos\theta' - 1}{n-1}\right) \quad \text{(dB)}$$

y el decaimiento en bordes vale en este caso $\tau_1(\beta) = -1{,}7$ dB.
El coeficiente de reflexión en una cara puede obtenerse para el eje mediante (6.139) y vale $\rho = 0{,}32$, al que corresponden unas pérdidas por reflexión en cada cara de 0,5 dB. Utilizando (6.140) se obtiene, para las pérdidas totales por reflexión en ambas caras, un valor de 0,9 dB. Este valor puede disminuirse con un recubrimiento antireflectante (lámina en $\lambda/4$ de índice de refracción $\sqrt{n}$) o corrugando la superficie de la lente para adaptar las impedancias. Las pérdidas por propagación en el material dependen del camino óptico de cada rayo y deben integrarse sobre toda la lente. Tomando la longitud mayor d, la pérdida vale

$$L = 8{,}69 \cdot \frac{1}{2} k_0 \sqrt{\varepsilon'}\,\mathrm{tg}\,\delta\, d = 0{,}2\ \mathrm{dB}$$

Esta lente podría alimentarse con una bocina corrugada del tipo indicado en la figura 6.18. Si la bocina ilumina el borde de la lente con una caída a 10dB, se tiene

$$\Delta\theta_{-3\,\mathrm{dB}} = 48{,}2^\circ, \quad \theta_0 = 35^\circ, \quad d_{boc} = 4\lambda, \quad D_{boc} = 20\,\mathrm{dB}$$

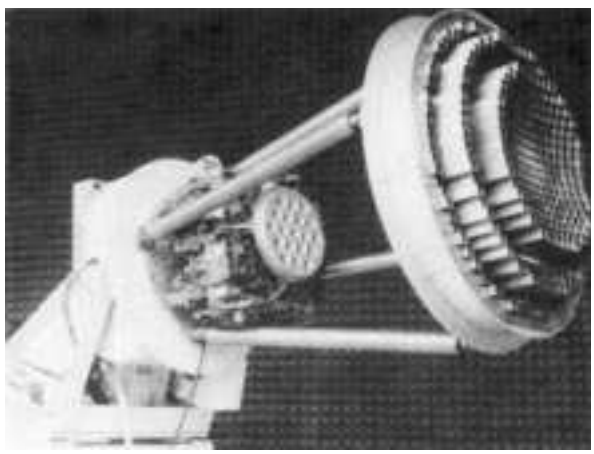
donde θ_o es el ángulo respecto al eje de apertura de la bocina. Las corrugaciones tendrán en este caso una profundidad de 0,9 mm y una separación entre ellas de 0,8 mm.
Para este conjunto de bocina y lente resulta $D = 38$ dB y $\mathrm{NLPS} \approx 20$ dB , valor, éste último, típico de las lentes, debido a la limitación que imponen las reflexiones en las caras.

6.5.2 Lentes escalonadas (*zoned lenses*)

En lentes de microondas es conveniente eliminar el máximo posible de material (una lente de 1 metro de radio puede llegar a pesar una Tm), y una forma de conseguirlo es eliminando de forma escalonada (Fig. 6.55) cilindros de material de grosor Δ, tal que la diferencia de caminos eléctricos en cada escalón sea un número entero de longitudes de onda

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\Delta n - \Delta = m\lambda \quad m = 1, 2, \ldots$$
$$\Delta = m\frac{\lambda}{n-1} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6.141}$$



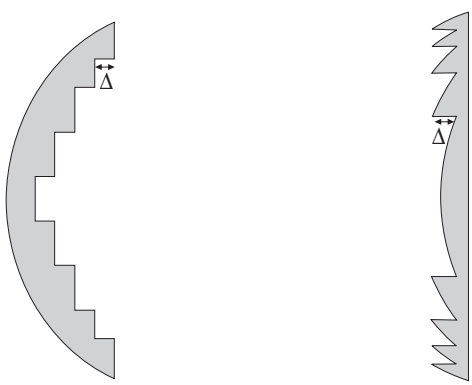


Fig. 6.55 Geometría de una lente escalonada

En general, se obtiene que esta condición hace la lente muy dependiente de la frecuencia. En particular, si existen *N* zonas a partir del centro de la lente, la diferencia máxima de caminos al variar la frecuencia será $\delta = (N\text{-}1)(\Delta\lambda)$, y si tomamos el criterio habitual $\delta = \lambda/8$ se obtiene, para el ancho de banda relativo de la lente y teniendo en cuenta que $(\Delta\lambda)/\lambda = 1/8(N\text{-}1)$,

$$B = 2\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0{,}25}{N-1} \approx \frac{25}{N}\% \tag{6.142}$$

Además de las lentes clásicas comentadas, existe una gran variedad de lentes homogéneas en las que se modifica la curvatura para obtener enfoque en distintas direcciones o para corregir aberraciones. La aplicación de la condición de Abbé o el uso de meniscos esféricos correctores de Schmidt, por ejemplo, son técnicas ópticas utilizadas en microondas. Se usan también lentes hemisféricas, bifocales y multifocales, uno de cuyos tipos se comenta a continuación.

6.5.3 Lentes TEM

Para generar múltiples haces o barrer una región del espacio se emplean lentes multifocales. Si se utilizan guías de onda para fabricar la lente surge el problema de la dispersión y, en consecuencia, de la estrechez de banda ya comentada. Para que resulte una lente de banda ancha ha de construirse de forma que los retardos de grupo sean idénticos para todos los rayos; para ello han de utilizarse en la lente líneas de transmisión TEM.

La forma más general de llevar esto a la práctica es haciendo que las dos superficies de la lente sean dos agrupaciones de antenas (con sus elementos separados menos de una longitud de onda para evitar la aparición de lóbulos de difracción) y el cuerpo de la lente sea un conjunto de cables flexibles que las unen elemento a elemento. Los cables restringen los caminos ópticos de la lente y los grados

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de libertad que introducen sus longitudes y la forma de las superficies hacen aparecer hasta cuatro puntos focales.

Una forma muy simple de esta lente es la indicada en la figura 6.56a. En ella todos los cables son de igual longitud y una superficie es esférica y la otra plana. En la figura se observa que el aspecto de las lentes TEM recuerda a los cordones de una bota, de ahí el nombre en inglés de *bootlace* con el que también se las conoce. Su ancho de banda sólo lo limita el de los elementos radiantes que forman sus caras y su adaptación a las líneas de transmisión, con lo que se obtienen anchos de banda superiores a una octava. Si en los cables se intercalan atenuadores y desfasadores controlados electrónicamente, se crea una antena reconfigurable de barrido electrónico, multihaz y con la posibilidad de tener diferente polarización a la entrada y a la salida de la lente.

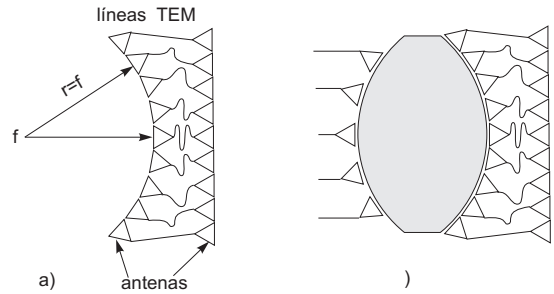


Fig. 6.56 Lente en modo TEM: a) modo TEM y b) lente de Rotman

Una de las lentes de este tipo más conocida y utilizada es la lente de Rotman, representada en la figura 6.56b. Es una estructura plana en la que la agrupación de salida es lineal y está situada perpendicularmente al eje de la lente. La curvatura de entrada y la longitud de los cables permiten tener tres puntos focales sobre un arco de circunferencia, si bien puede alimentarse con aberraciones mínimas desde cualquier punto intermedio situado sobre este arco focal. Entre la línea focal y la curva de entrada de la lente se colocan dos placas metálicas paralelas que actúan como guía de onda entre los alimentadores y la entrada de la lente.

De la lente de Rotman se deriva la lente de Archer; en ella la región entre las placas contiene un dieléctrico, lo que reduce sus dimensiones en un factor $n = \sqrt{\varepsilon'}$, y en lugar de cables se utilizan líneas microtira (*microstrip*) o triplaca (*stripline*) impresas sobre este mismo sustrato, lo que elimina un número importante de conexiones y hace la lente mucho más compacta.

Estas lentes, por ser agrupaciones lineales, pueden alimentar un cilindro parabólico, o bien si se apilan, formar una agrupación plana.

6.5.4 Lente de Luneburg

Una configuración distinta a las anteriores, que utiliza para enfocar un medio heterogéneo, es decir, con n dependiendo de la distancia, es la lente de Luneburg. Consiste en una esfera cuyo índice varía parabólicamente con el radio y tiene la propiedad de enfocar para cualquier punto situado en su superficie. Una fuente esférica en un punto de su superficie produce una onda plana al otro lado, en la dirección del diámetro que pasa por el alimentador, y a la inversa en recepción. Su índice de refracción es

$$n(r) = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \qquad (6.143)$$

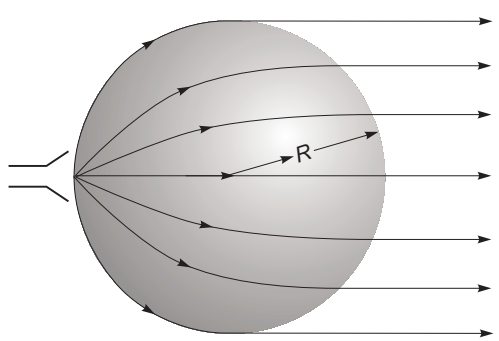


Fig. 6.57 Lente de Luneburg

y la propagación en ella está representada en la figura 6.57.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

La lente suele producirse con conchas esféricas de materiales de índice de refracción diferentes a fin de aproximar el perfil (6.143). Como el índice decrece con el radio, se produce la curvatura de los rayos como se indica en la figura. Se han obtenido en Banda X lentes de Luneburg con una iluminación en bordes de 20 dB respecto al centro, una ganancia de 31 dB y una eficiencia de iluminación de 0,63.

6.5.5 Compararación entre reflectores y lentes

Al comparar, para unas especificaciones y dimensiones equivalentes, las prestaciones de una antena de reflector parabólico y una lente pueden realizarse las siguientes consideraciones:

- Las tolerancias mecánicas en las lentes son menos críticas.
- Las lentes no tienen el inconveniente del bloqueo producido por el alimentador.
- La posibilidad de exploración por desplazamiento del alimentador fuera del foco es mayor en las lentes.
- Los reflectores tienen un diseño más simple.
- Inherentemente, las lentes son medios con pérdidas.
- Las lentes presentan reflexiones en ambas caras, lo cual produce una pérdida adicional de señal.
- Por las dos razones anteriores las lentes tienen ganancias inferiores.
- En general por razones de economía de peso y de coste, las lentes se utilizan a frecuencias mayores que los reflectores.

En la figura 6.58 se muestra una relación de ganancia, frecuencia y diámetro para reflectores y lentes.

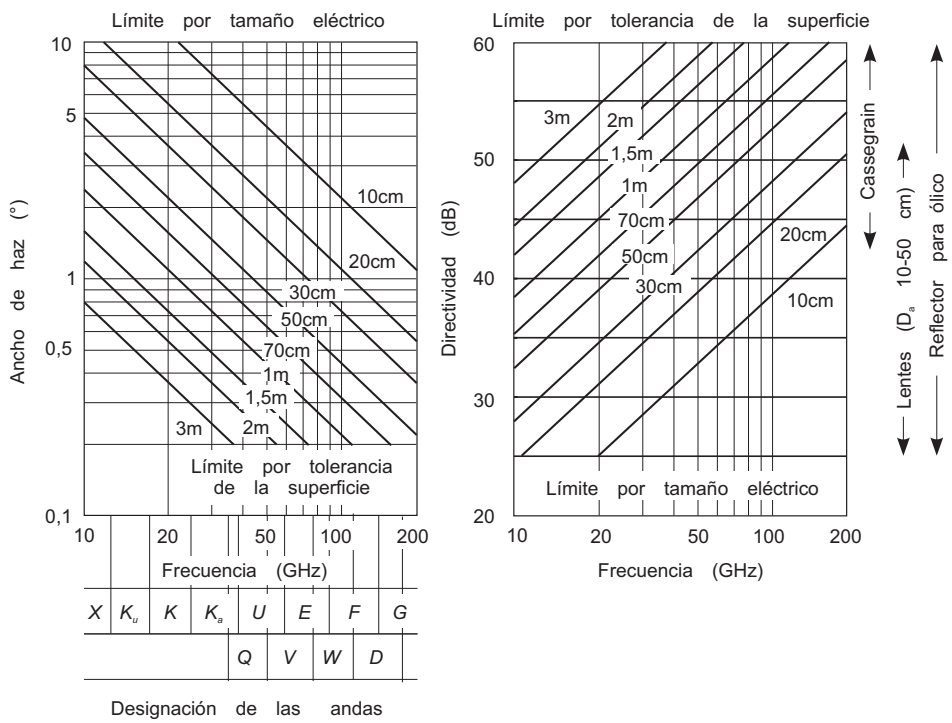


Fig. 6.58 Relación de directividades y dimensiones para reflectores y lentes

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

6.1 Una apertura elemental cuadrada, de lado 1 cm, recibe una señal de 150 MHz. Su área efectiva es:

a) 1mm^2 b) 1 cm^2 c) 1 dm^2 d) 1 m^2

6.2 Una apertura rectangular iluminada por un campo E_0 y de dimensiones $a \times b$ radia un campo en la dirección normal de valor $E_1 = C_1/r$. Al reducir las dimensiones de la apertura a $a/2 \times b/2$, manteniendo el mismo campo E_0, el campo radiado en la dirección normal es de valor $E_2 = C_2/r$. La relación C_1/C_2 vale:

a) 16 b) 8 c) 4 d) 2

6.3 Una apertura rectangular situada en el plano *xy*, de dimensiones a (según *x*) y b (según *y*), tiene una distribución de campo triangular según *x*, y triangular según *y*. Su eficiencia de iluminación será:

a) 0,81 b) 0,75 c) 0,56 d) 0,25

6.4 Una apertura rectangular uniformemente iluminada, situada en el plano *xy*, tiene unas dimensiones de 8λ según el eje *x* y 16λ según el eje *y*. ¿En cuál de los cortes del diagrama de radiación se obtiene un NLPS mayor?

a) $\phi = 0º, 180º$ b) $\phi = 90º, 270º$
c) $\phi = 63{,}4º, 243{,}4º$ d) es el mismo en los tres cortes anteriores

6.5 ¿Cuál es la disminución de la directividad de una apertura circular uniforme cuando se produce un bloqueo en la zona central, de forma circular y radio 10 veces inferior al radio máximo?

a) 0,04 dB b) 0,4 dB c) 0,2 dB d) 1 dB

6.6 En una bocina sectorial de plano E, de dimensiones a en el plano H, b_1 en el plano E y longitud ℓ_E, al aumentar sus dimensiones, manteniendo constante a y la relación b_1/ℓ_E, el error de fase en la boca:

a) Se mantiene constante en ambos planos.
b) Aumenta en el plano E y se mantiene constante en el plano H.
c) Disminuye en el plano E y se mantiene constante en el plano H.
d) Aumenta en ambos planos.

6.7 ¿Cuál de las siguientes bocinas sectoriales de plano H, de dimensiones a_1 en el plano H, $b = \lambda$ en el plano E y longitud $\ell_H = 8\lambda$, posee una directividad mayor?

a) $a_1 = 3\lambda$ b) $a_1 = 5\lambda$ c) $a_1 = 7\lambda$ d) $a_1 = 9\lambda$

6.8 Para una bocina cónica óptima, iluminada con el modo TE_{11}, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) El diámetro es mayor que la dimensión en el plano E de una bocina piramidal óptima de igual longitud.
b) El diámetro es mayor que la dimensión en el plano H de una bocina piramidal óptima de igual longitud.
c) La polarización de los campos radiados en la dirección del máximo es circular.
d) Ninguna de las anteriores.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.9 La impedancia de entrada a 300 MHz de una ranura de longitud total 42 cm y anchura a << λ, vale:

a) 190 + j 337 Ω b) 190 + j 0 Ω
c) 190 - j 337 Ω d) 190 - j 641 Ω

6.10 En general, en una antena impresa, al aumentar la permitividad del sustrato dieléctrico:

a) La acumulación de energía en el dieléctrico disminuye.
b) La potencia radiada por la antena aumenta.
c) El ancho de banda de la antena aumenta.
d) Se reducen las dimensiones del parche metálico.

6.11 Se sitúa un dipolo de λ/2 paralelo a las paredes de un diedro de 90º, en la bisectriz del mismo. Si se suponen efectos mutuos despreciables y una separación del vértice de $s = 0{,}5\lambda$, tendremos que la directividad vale:

a) 2,1 dB b) 14,2 dB c) 10 dB d) 6 dB

6.12 Si un dipolo elemental, alimentando a un paraboloide de relación $f/D_a = 0{,}4$, radia 1 vatio, la amplitud del campo eléctrico en el borde del reflector en el plano H del dipolo, para una distancia focal f = 1 m, valdrá:

a) 4,8 V/m b) 2,4 V/m c) 1,2 V/m d) 0,6 V/m

6.13 En un reflector parabólico de $f/D_a = 0{,}25$, alimentado por una apertura elemental, el decaimiento en bordes respecto al centro vale:

a) -3 dB b) -6 dB c) -12 dB d) -18 dB

6.14 En un reflector parabólico, al aumentar el decaimiento en bordes:

a) La eficiencia de iluminación mejora. b) La directividad aumenta.
c) El NLPS aumenta. d) El ancho de haz disminuye.

6.15 Para que un paraboloide con $f/D_a = 0{,}25$ posea en su apertura una distribución de campo constante, debe tener un alimentador en el foco cuyo diagrama de radiación de potencia sea proporcional a:

a) $1/\cos^4(\theta/2)$ b) $\cos^4(\theta/2)$
c) $\cos^2(\theta/2)$ d) $1/\cos^2(\theta/2)$

6.16 Se desea alimentar un reflector parabólico de $f/D_a = 0{,}5$, para máxima directividad (caída en bordes $\tau \approx -10$ dB). ¿Cuál sería la directividad aproximada del alimentador?

a) 5 dB b) 10 dB c) 15 dB d) 20 dB

6.17 ¿Qué precisión de mecanizado mínima (±δ) exigiría a un reflector parabólico trabajando a 30 GHz para no tener errores de fase en la apertura superiores a ±45º?

a) $\delta = 2{,}5$ mm b) $\delta = 1{,}2$ mm c) $\delta = 0{,}6$ mm d) $\delta = 0{,}1$ mm

6.18 La lente de una cámara fotográfica se puede analizar como una antena. Al reducir el diámetro del diafragma de $D_a = f/8$ a $D_a = f/16$, la potencia de luz que llega al film se reducirá en un factor:

a) 1/2 b) 1 c) 2 d) 4

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.19 Una antena de comunicaciones a 10 GHz, consistente en una lente circular escalonada, tiene que soportar un ancho de banda de 0,5 GHz. ¿Cuál es el número máximo N de escalones que podría utilizarse?

a) 2 b) 5 c) 10 d) 20

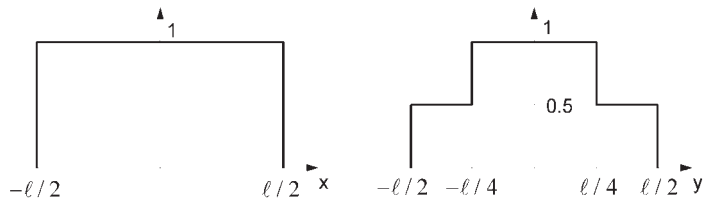
6.20 Con una antena de 40 dB de directividad y 1 vatio de potencia transmitida iluminamos, a la frecuencia de 10 GHz, una lente de Luneburg de 30 cm de diámetro, situada a 200 m. Si la lente está metalizada en el punto focal de reflexión, la potencia recibida en la antena, después de reflejarse en la lente, será aproximadamente de:

a) -27 dBm b) -53 dBm c) -67 dBm d) -83 dBm

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

6.1 Una apertura cuadrada de lado ℓ situada en el plano xy tiene una distribución de amplitud uniforme según x y una distribución con pedestal según y, con una polarización lineal según $\hat{x}$.



La distribución de fase se supone uniforme.

a) Hallar el diagrama de radiación en el plano E.
b) Demostrar que el diagrama de radiación en el plano H puede escribirse como

$$E(\theta) = E_0(\theta)\left|\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} u}{u} + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen} u/2}{u/2}\right| \qquad u = \frac{1}{2}k\ell\operatorname{sen}\theta$$

c) Calcular la eficiencia y la directividad de la apertura, y compararlas con las de una distribución uniforme.
d) Dibujar el diagrama en ambos planos, especificando la posición del primer nulo.

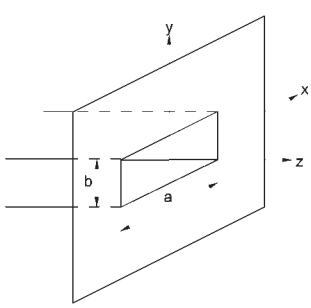
308

6.2 Una apertura rectangular de dimensiones $20\lambda \times 10\lambda$ está iluminada por un campo linealmente polarizado $\vec{E}_a$, de frecuencia 2 GHz

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_a &= \hat{y}\cos\left(\frac{\pi x}{20\lambda}\right)\left(1-\frac{|y|}{5\lambda}\right) mV/m \\ \vec{H}_a &= -\hat{x}E_a/\eta\end{aligned}\right\} \quad |x| \le 10\lambda,\ |y| \le 5\lambda$$

a) Calcular el campo máximo radiado a 10 km de distancia.
b) Calcular el ancho de haz entre ceros en los planos E y H.
c) Calcular la eficiencia de iluminación de la apertura.
d) Calcular la directividad y el área efectiva.

$$\int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{jux}dx = \left(\frac{\operatorname{sen} u/2}{u/2}\right)^2; \qquad \int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{jux}dx = \frac{\pi\cos u}{(\pi/2)^2-u^2}$$



6.3 Una boca de guía que propaga el modo TE_{10} se abre en un plano conductor infinito. La distribución de campo en la boca es:

$$\vec{E} = E_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{y}; \qquad \vec{H} = \frac{-E_y}{Z_0}\hat{x}$$

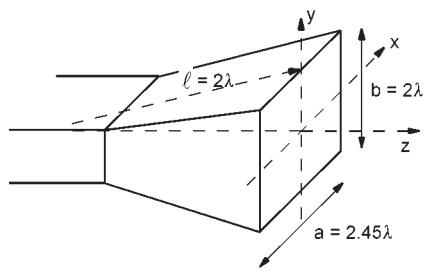
a) Aplicando el principio de equivalencia obtener una distribución de corrientes equivalentes en el plano $z = 0$ que permita prescindir del plano conductor.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) Obtener la expresión del diagrama de radiación para el semiespacio z>0.
c) Particularizar la expresión para los planos E y H y dibujar en ellos el diagrama de forma aproximada para $a = \lambda$ y $b = \lambda/2$.
d) Obtener una expresión de la directividad en función de a, b y λ. Particularizarla para $a = \lambda$ y $b = \lambda/2$.

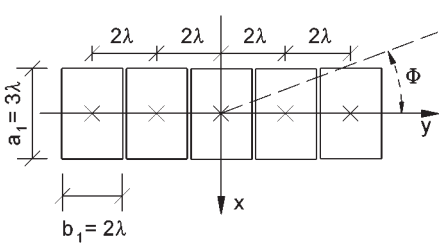
6.4 Una bocina piramidal de dimensiones a=2,45 λ, b=2 λ se alimenta con una guía rectangular que propaga el modo TE_{10}. La distancia desde el vértice a la boca en ambos planos es la misma y vale $\ell = 2\ \lambda$.

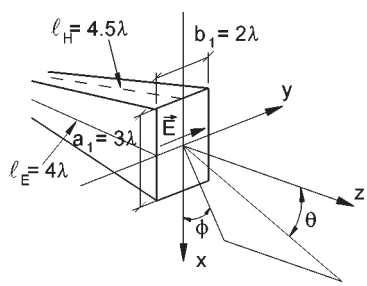
a) Representar gráficamente la distribución de campo eléctrico (amplitud y fase) en los dos ejes (x,y) de la boca.
b) Calcular la relación lóbulo principal-secundario en el plano E del diagrama de radiación.
c) Calcular el ancho de haz a -3 dB en el plano H del diagrama de radiación.
d) Si ℓ se hiciera muy grande, calcular la eficiencia de la bocina.
e) Con las mismas condiciones del apartado anterior, calcular la directividad.



6.5 Sea una agrupación de 5 bocinas alimentadas uniformemente y dispuestas como se representa en la figura. Utilizando los diagramas normalizados de campo de las bocinas sectoriales:

a) Representar, para la bocina central aislada, los diagramas de radiación y los anchos de haz a -3 dB en plano-E y plano-H.
b) Calcular el factor de la agrupación. Representarlo gráficamente en función del ángulo eléctrico ψ y en función del ángulo real Φ indicando las posiciones de los máximos.
c) Representar los diagramas de radiación en plano-E y en plano-H de la agrupación de 5 bocinas.



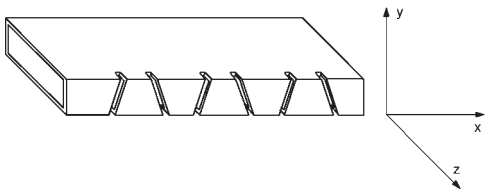


6.6 Analizar una agrupación de 6 ranuras sobre una guía de ondas. El espaciado entre elementos es 0,66 λ. Las ranuras pueden considerarse elementales sobre un plano de masa infinito y excitadas por un campo de la misma amplitud. Cada una de las ranuras se encuentra rotada alternativamente ± 45º en el plano $x,y,$ de forma que el campo en ellas es:

$$\vec{E}_{par} = E_0(-\hat{x} + \hat{y}) \text{ , para las ranuras pares (n=0,2,4)}$$

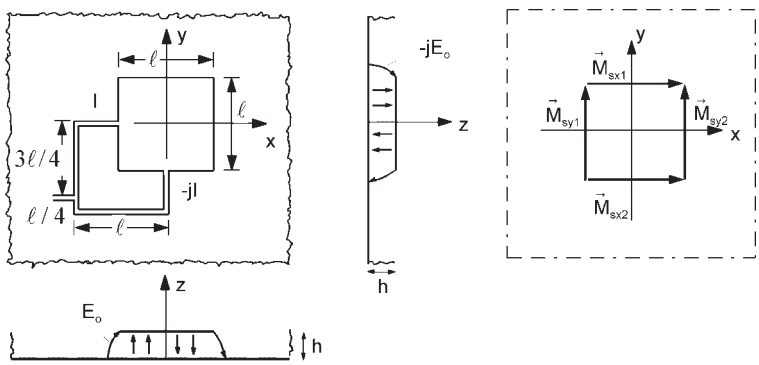
$$\vec{E}_{impar} = E_0(-\hat{x} - \hat{y}) \text{ , para las ranuras impares (n=1,3,5)}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



a) Dibujar la agrupación de corrientes magnéticas equivalentes.
b) Sabiendo que una corriente magnética elemental puede descomponerse en dos ortogonales, descomponer la agrupación anterior en la superposición de dos agrupaciones, indicando los coeficientes de excitación de cada una de ellas.
c) Empleando el método gráfico, representar para cada una de las dos agrupaciones el factor de agrupación en el espacio real indicando, en cada caso, la dirección del máximo y la posición de los ceros adyacentes.
d) Dibujar el diagrama de radiación de la componente de campo eléctrico según $\hat{y}$, en el plano *z,x*.

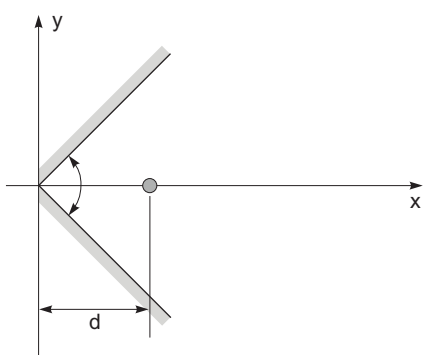
6.7 Una antena basada en un resonador *microstrip* (antena impresa) está formada por un parche metálico cuadrado de lado $\ell = 4{,}6$ cm colocado sobre un sustrato dieléctrico de permitividad ε' = 2,62 y grosor h = 1mm, y se alimenta, a una frecuencia de 2 GHz, en dos puntos simultáneamente con un desfase de 90º, tal como se indica en la figura.



a) Teniendo en cuenta el efecto del plano de masa (supuesto infinito), encontrar el valor de las corrientes magnéticas equivalentes orientadas según cada uno de los dos ejes.

b) Obtener el diagrama de radiación resultante.
c) Indicar el valor del campo y la polarización de la onda radiada en la dirección del eje *z*.

6.8 Demostrar que para dos dipolos paralelos separados una distancia r>>λ, la impedancia mutua se puede calcular utilizando la expresión



$$Z_{12} = \frac{jk\eta e^{-jkr}}{4\pi r} \cdot \ell_{ef_1} \cdot \ell_{ef_2}$$

donde ℓ_{ef_1} y ℓ_{ef_2} son las longitudes efectivas.

a) Usando la expresión anterior calcular el valor exacto de la directividad de un dipolo de brazo H=λ/4, situado en el interior de un diedro de 90º de planos conductores, a una distancia d=0,45λ del eje del diedro.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) Dibujar el módulo del campo eléctrico recibido en el punto $z = 0$, y = 0, $x = 1.000\lambda$ cuando la distancia d varía de 0 a 2λ, y la corriente de entrada es de 1 A, especificando los valores para incrementos de d de 0,25λ.

6.9 Un reflector parabólico simétrico de 60 cm de diámetro, trabajando a 10 GHz, se encuentra alimentado por una bocina piramidal óptima. Las dimensiones de la apertura de la bocina son 9 cm en el plano H y 4,5 cm en el plano E. La distancia focal es $f = 60$ cm. Encontrar:

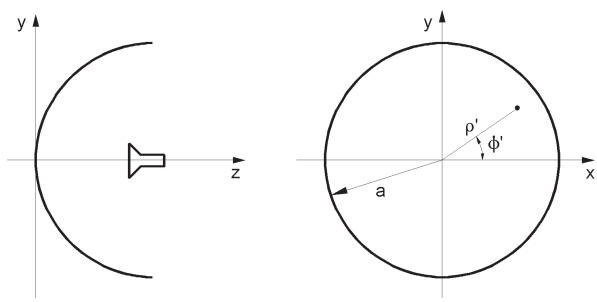
a) La iluminación en el plano H de la apertura del reflector para $\rho' = 0$, $D_a/4$, $D_a/2$.
b) La eficiencia de iluminación, suponiendo la distribución de campos en la apertura, triangular sobre pedestal y con simetría de revolución.
c) Suponiendo $\eta_s = 0{,}95$, hallar la directividad del reflector, el ancho de haz a -3 dB, el ancho de haz a -10 dB y el NLPS.

6.10 Un reflector parabólico de diámetro 120 cm funcionando a 9 GHz se alimenta con una bocina, con lo que se obtiene una distribución de campo en la apertura del reflector, referido a la figura, de la forma:

$$\vec{E} = E_0 f(\rho')\hat{x}$$

$$\vec{H} = \frac{E_x}{\eta}\hat{y}$$

$$f(\rho') = \begin{cases} 1-(\rho'/a)^2, & \rho' \le a \\ 0, & \rho' > a \end{cases}$$



311

a) Obtener el diagrama de radiación, el ancho de haz entre ceros y el nivel de lóbulo principal a secundario.
b) Suponiendo nulas las pérdidas por desbordamiento, calcular la eficiencia de iluminación del reflector y a partir de ella la directividad. Obtener una aproximación del ancho de haz a - 3 dB.

$$E_\theta = j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\cos\phi(1+\cos\theta)\iint_S E_x e^{jk\rho'\operatorname{sen}\theta\cos(\phi-\phi')}d\phi'\,\rho'\,d\rho'$$

$$E_\phi = -j\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\operatorname{sen}\phi(1+\cos\theta)\iint_S E_x e^{jk\rho'\operatorname{sen}\theta\cos(\phi-\phi')}d\phi'\,\rho'\,d\rho'$$

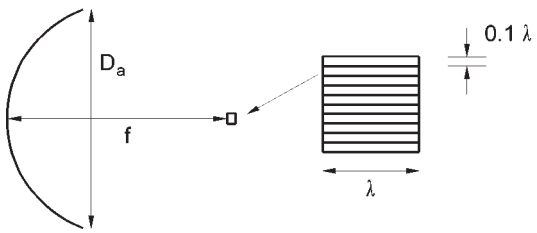
$$\int_0^{2\pi} e^{jz\cos x}dx = 2\pi J_0(z)$$

$$\int_0^{u}[u^2 - z^2]J_0(z)z\,dz = 2u^2 J_2(u)$$

$$J_2(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2, \quad u \to 0$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.11 Un reflector parabólico, situado en un satélite en órbita geoestacionaria, se alimenta en su foco mediante una agrupación vertical de 10 bocas de guía, tal como se indica en la figura, cada una de las cuales propaga el modo TE_{10}.

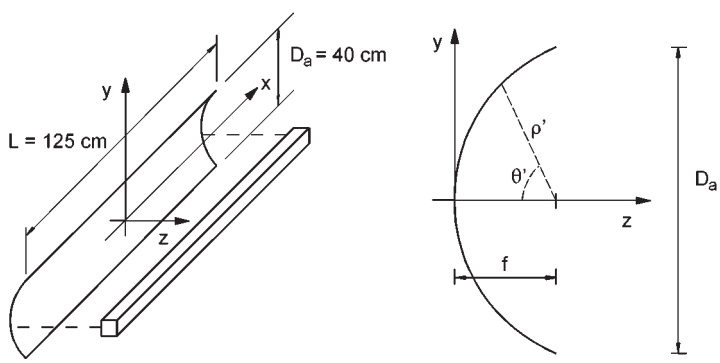


Datos del problema:
Frecuencia: 10 GHz
Distancia de la tierra en la órbita geoestacionaria: 36.000 km.
Posición del satélite: longitud 3,5º Oeste.
Diámetro del paraboloide: 2,5 m.
Relación $f/D_a = 0{,}5$
Dimensiones de las guías = 30 mm × 3 mm
Espaciado vertical de la agrupación d = 3 mm
Utilizar las gráficas del diagrama de radiación de bocinas sectoriales cuando se precise.

a) Obtener el polinomio de la agrupación P(z) de forma que los anchos de haz de los diagramas en los planos E y H sean los mismos.
b) Calcular la posición de los dos primeros ceros en el plano Z, utilizando para ello la gráfica del diagrama de radiación de una bocina en plano H.
c) Calcular y representar gráficamente la amplitud de la iluminación del paraboloide en un plano horizontal en función de la distancia al eje del paraboloide.
d) El máximo del diagrama de radiación está apuntando a un punto cercano a Madrid, cuya posición es 3,5º Oeste de longitud y 40,5º Norte de latitud. Dibujar las zonas de cobertura a -3 dB y -10 dB del máximo, indicando las distancias en km.
e) Calcular la desviación del haz del paraboloide si la antena del foco se desplaza verticalmente 3 mm. Calcular para ello la fase en los dos extremos del paraboloide y suponer una variación lineal.
f) Proponer una solución para la cobertura de Baleares utilizando la misma antena.

6.12 Una antena de radar, que opera a una frecuencia de 12 GHz, consiste en un cilindro parabólico de dimensiones 125x40 cm, como el de la figura, alimentado por una guía ranurada situada a lo largo de la línea focal. El alimentador, que radia una potencia P_T polarizada según $\hat{x}$, está caracterizado para θ‘ < 90º, por su diagrama de intensidad de radiación:

$$K_f(\theta',x') = \frac{3}{4L} P_T \left(\frac{1-\mathrm{tg}(\theta'/2)}{\cos(\theta'/2)} \right)^2, \qquad |x'| \le L/2, \quad \theta' \le \pi/2$$

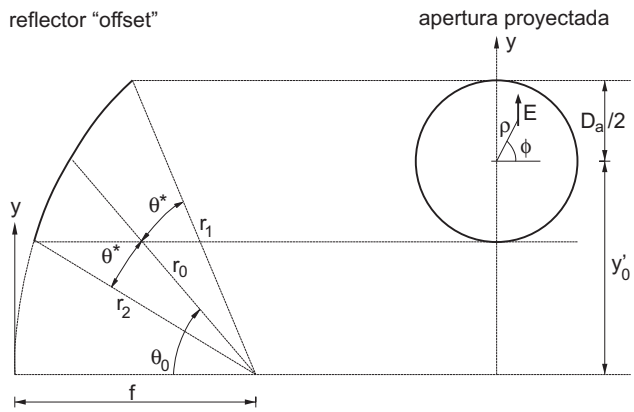


© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

a) Hallar el campo incidente en cada punto del paraboloide $E_i(\rho',\theta')$ y dibujar la distribución de campo en la boca de la apertura $E_a(x',y')$.
b) Calcular la relación f/D_a para tener un decaimiento en y'=±D_a/2, con respecto a y'=0, de -14 dB.
c) Calcular la eficiencia de iluminación y la directividad de la apertura.
d) Estimar el ancho de haz a -3 dB y el NLPS en los dos planos principales.

6.13 Un reflector *offset*, con la geometría y proyección de la figura, se alimenta a 10 GHz con una bocina en su foco.

$$\theta_0 = 30^\circ, \quad \theta^* = 20^\circ, \quad f = 1\text{m}$$
$$t_f(\theta') = -12\ ((\theta'-\theta_0)\ /\ \Delta\theta_{-3dB})^2\ \text{dB}$$



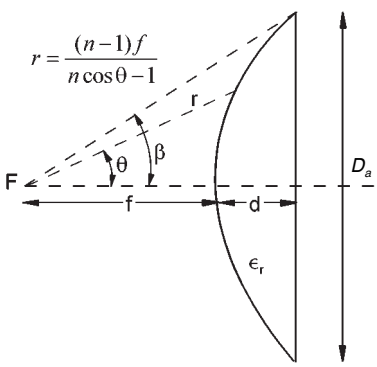
a) Obtener el diámetro de la apertura proyectada y las coordenadas del centro de dicha apertura.
b) Calcular la diferencia de iluminación entre el borde superior y el inferior como consecuencia de la diferencia de caminos.
c) Calcular el ancho de haz a -3 dB en el plano E y las dimensiones en dicho plano de una bocina óptima tal que, al situarla en el foco, resulta un reflector con una iluminación en el borde superior de -12 dB respecto a la del centro.
d) Si se aproxima la ley de iluminación en la apertura proyectada por una distribución de campo triangular E_a = (1-ρ/(D_a/2)), obtener la eficiencia total y la directividad, despreciando las pérdidas por desbordamiento.

6.14 Se desea analizar un reflector parabólico de D_a=10 m de diámetro y f/D_a=1,5, que es equivalente a una antena Cassegrain. Si la frecuencia de funcionamiento es de 3,9 GHz y se requiere un nivel de lóbulo principal a secundario en el plano H de 26 dB:
a) Encontrar la iluminación en el plano H en bordes del reflector utilizando la figura 6.39.
b) Diseñar una bocina cónica óptima que sirva de alimentador, obteniendo sus dimensiones y su directividad.
c) Si los campos en la apertura del reflector se aproximan con una ley cuadrática del tipo, $E_a = 1-(2\rho/D_a)^2$ obtener la eficiencia de iluminación.
d) Suponiendo una eficiencia de desbordamiento η_s = 0,95, obtener la directividad del reflector.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

6.15 Se desea analizar la antena descrita en la figura, formada por una lente dieléctrica alimentada en el foco por un pequeño alimentador.

a) Determinar el ángulo β con el que el alimentador ve el extremo de la lente.
b) Hallar la directividad máxima del alimentador, D_0.
c) Calcular la eficiencia de desbordamiento, η_s, y la de bloqueo, η_b.
d) Calcular la iluminación en bordes de la lente.
e) Aproximando el campo en la apertura de la lente por una distribución triangular sobre pedestal, calcular la eficiencia de iluminación, η_{il}.
f) Calcular la directividad de la antena.



Alimentador: $D_f = D_0 ((1+\cos\theta) / 2)^4$

Frecuencia: 10 GHz
Diámetro de la lente: D_a = 50 cm
Distancia focal: f = 25 cm
Dieléctrico: $\varepsilon_r = 4$
Área alimentador: 10 cm^2

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

7
Antenas de banda ancha

7.1 Introducción

Los diferentes tipos de antenas analizados hasta el momento presentan un comportamiento muy variable con la frecuencia, de forma que sólo pueden ser empleadas en un margen estrecho de frecuencias. Las antenas vistas en los capítulos anteriores tienen las siguientes limitaciones: los dipolos finos presentan impedancias de entrada que varían rápidamente con la frecuencia y, por tanto, sólo pueden adaptarse a los transmisores o receptores en márgenes de frecuencias pequeños; las bocinas están limitadas en banda por la guía que las alimenta, que en general presenta anchos de banda inferiores a una octava (guía rectangular); el comportamiento de las agrupaciones de antenas está en gran parte determinado por la frecuencia, ya que el margen visible del factor de la agrupación está ligado al espaciado de los elementos, medido en términos de la longitud de onda; el empleo de reflectores, aunque son estructuras de banda ancha, también está limitado por el ancho de banda de los alimentadores que, en general, son bocinas.

El interés por obtener antenas de banda ancha se originó, durante y después de la II Guerra Mundial, por la necesidad de reducir y simplificar el número de sistemas radiantes embarcados en aeronaves: comunicaciones en distintas bandas de frecuencias, sistemas de radionavegación, altímetros, etc., de modo que se realizó un esfuerzo importante para desarrollar antenas que permitieran cubrir grandes márgenes de frecuencias.

Por antenas de banda ancha se entienden, habitualmente, aquellas antenas que mantienen alguno de sus parámetros (impedancia, dirección del haz principal, directividad, etc.) constantes o con variaciones pequeñas en un margen de frecuencias grande (por ejemplo, dos o más octavas). Otro concepto asociado es el de antenas independientes de la frecuencia; en este caso se trata de antenas con un comportamiento que no varía con la frecuencia. Teóricamente, esto puede conseguirse con ciertas antenas de dimensión infinita. En la realización práctica de una antena independiente de la frecuencia es necesario acotar sus dimensiones, lo que producirá una variación de los parámetros con la frecuencia; con todo, es posible conseguir mantener las especificaciones de la antena dentro de cotas pequeñas de variación en márgenes de frecuencias de varias décadas.

7.2 Antenas de hilo

Históricamente, las primeras antenas de banda ancha fueron las antenas de hilo largo o antenas de onda progresiva, ya que era la única manera de realizar antenas de tamaño eléctrico apreciable. En los

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

dipolos, según se vio en el modelo de línea de transmisión, la distribución de corriente es la que corresponde a una línea en circuito abierto, es decir, es una onda estacionaria que es el resultado de combinar una onda de corriente progresiva y otra onda de corriente reflejada o regresiva. Por el contrario, en las antenas de onda progresiva sólo existe la primera. Una forma de eliminar la onda de corriente reflejada es mediante la correcta terminación del hilo con una carga adaptada.

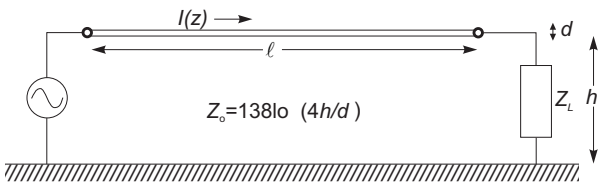


Fig. 7.1 Antena de hilo largo o de Beverage

En la figura 7.1 se muestra una antena de hilo largo o de Beverage. Esta antena está formada por un hilo de varias longitudes de onda terminado con una carga. El hilo y el plano de tierra forman una línea de transmisión con una impedancia característica que es función del diámetro del hilo y de la distancia al plano de tierra. Si el extremo del hilo se carga con la impedancia característica de la línea de transmisión no existirá onda reflejada y sólo se excitará una onda de corriente progresiva. Si las pérdidas óhmicas y de radiación en la línea son pequeñas, la onda de corriente progresiva puede considerarse de amplitud constante con un término de propagación de fase, de forma que la distribución de corriente en la antena es

$$I(z) = I_0\, e^{-j\beta z} \tag{7.1}$$

donde β es la constante de fase en la línea de transmisión. Para el caso en que el diámetro del hilo sea muy pequeño, en términos de λ, la constante de fase en la línea puede aproximarse por la del espacio libre k. En este caso los campos radiados pueden hallarse directamente a partir de (3.58), con los valores

$$E_\phi = 0$$

$$E_\theta = j30\,k\,\ell\,I_0\,\mathrm{sen}\,\theta\, e^{j\frac{k\ell}{2}(1-\cos\theta)}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\,\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{k\ell}{2}(1-\cos\theta)\right)}{\frac{k\ell}{2}(1-\cos\theta)} \tag{7.2}$$

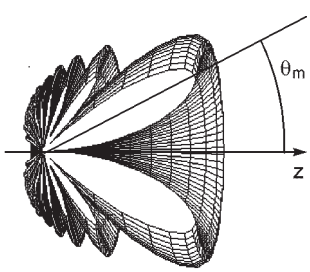


Fig. 7.2 Diagrama de radiación para un hilo largo ℓ 5λ

En la expresión de los campos radiados se reconoce la función sinc debida a la transformada de Fourier de la corriente uniforme de la línea. Debido a la fase lineal de la alimentación, la función sinc está desplazada, de forma que su máximo se encuentra para θ = 0, es decir, en la dirección del hilo; sin embargo, aparece un factor sen θ que introduce un nulo en esa dirección. El diagrama de radiación de la antena se representa en la figura 7.2. Tiene simetría de revolución respecto al eje del hilo y la dirección del máximo se encuentra desplazada por el producto de la función sinc y el seno. La dirección del máximo viene dada, para el caso en que el hilo sea de longitud $\ell >> \lambda$, por

$$\theta_m = \arccos\left(1 - \frac{0{,}371}{\ell/\lambda}\right) \tag{7.3}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Nótese que, al aumentar la longitud del hilo respecto a λ, el ángulo correspondiente a la dirección del máximo disminuye, es decir, es más próximo a la dirección del hilo. Este tipo de antena no es estrictamente de banda ancha ya que la dirección del máximo de radiación varía con la frecuencia para una longitud de hilo dada; sin embargo, la impedancia de entrada de la antena sí que permanece constante ya que ésta es la impedancia característica de la línea, que habitualmente es de unos centenares de ohmios. Como la mayor parte de la potencia se disipa en la carga terminal y en las pérdidas óhmicas del hilo y sólo una fracción se radia, la eficiencia de esta antena es baja, inferior a 0,5.

Hasta el momento no se ha considerado el efecto del suelo en el diagrama de radiación de la antena de hilo. Se puede comprender su efecto mediante la aplicación de la teoría de imágenes. Como primera aproximación supondremos un suelo conductor perfecto, por lo que existirá una corriente imagen dirigida en sentido contrario. El conjunto puede analizarse como una agrupación de dos antenas separadas una distancia 2h y con una fase progresiva π. Se puede elegir una distancia entre el hilo y el suelo de forma que el máximo del factor de agrupación coincida con el máximo del diagrama de radiación del hilo, dado por la ecuación (7.3). La condición necesaria es (5.9)

$$0 = k\,2h\cos(90-\theta_m)-\pi \qquad (7.4)$$

El diagrama de radiación tiene la forma de un pincel, tal como se muestra en la figura 7.3. La condición anterior es, en la práctica, difícil de cumplir, ya que implica alturas del hilo respecto al suelo del orden de λ, lo que puede resultar imposible de lograr en bajas frecuencias. En este caso, el diagrama sigue siendo de tipo pincel, pero existe una disminución en el campo radiado máximo, ya que la contribución del hilo y de la imagen no se suman en fase, es decir, la resistencia de radiación de la antena disminuye.

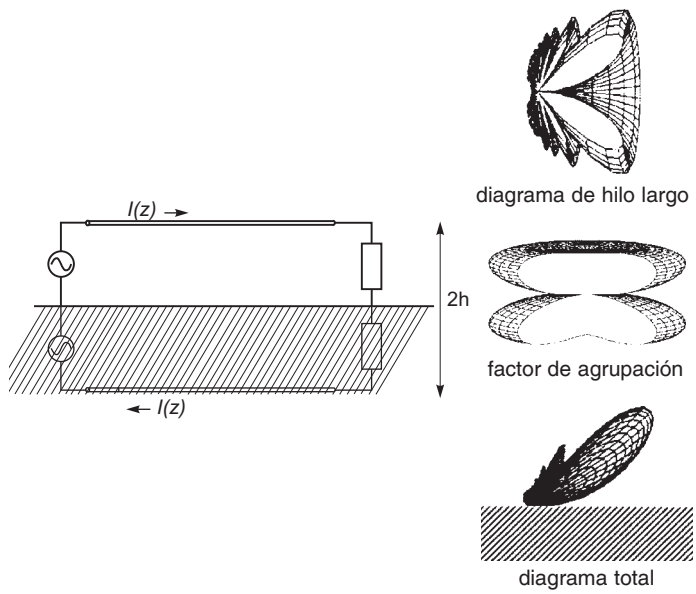


Fig. 7.3 Efecto del suelo en la antena de Beverage

La antena de Beverage tiene unos lóbulos secundarios bastante elevados, del orden de -13 dB respecto al lóbulo principal, debidos a la distribución uniforme de corrientes; además, la dirección del máximo se encuentra desviada respecto a la dirección del hilo y depende de la frecuencia. Es por estas razones que, en la práctica, se utilizan combinaciones de antenas de hilo; las más habituales son las antenas en V y las rómbicas.

En la figura 7.4 se muestra una antena en V. Está formada por dos hilos de longitud ℓ que forman un ángulo α respecto al eje de la V. El diagrama de radiación de esta antena puede analizarse como la superposición del diagrama de radiación de dos antenas de hilo largo. Sin considerar inicialmente el efecto del suelo, el diagrama de radiación de la antena en V es la combinación de dos diagramas de radiación como el mostrado en la figura 7.2. En función de la relación entre el ángulo α, que define la geometría de la antena, y el ángulo θ_m, que corresponde a la dirección del máximo para el hilo de corriente, cabe distinguir tres casos:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

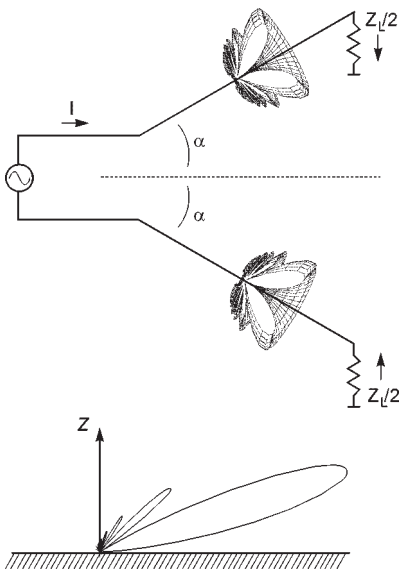


Fig. 7.4 Antena en V

- $\alpha > \theta_m$. Los diagramas de radiación de los dos hilos que forman la V no se intersectan y, por tanto, existen dos haces principales con el mismo nivel.
- $\alpha = \theta_m$. En la dirección del eje de la V se produce una interferencia constructiva de los campos radiados por cada uno de los hilos, de forma que en esa dirección aparece un haz de tipo pincel.
- $\alpha < \theta_m$. La interferencia constructiva se produce para una dirección elevada respecto a la horizontal.

El empleo de estas antenas está generalmente dirigido a comunicaciones ionosféricas, en las que es deseable tener un haz elevado respecto al horizonte, por lo que es habitual emplear antenas con ángulos entre 0,8 y 0,9 θ_m. Finalmente, el efecto del suelo puede estudiarse de forma similar a la antena de Beverage. Como primera aproximación puede considerarse el suelo como un conductor perfecto. La antena en V y su imagen forman una agrupación con un factor similar al representado en la figura 7.3. Variando la altura de la antena sobre el suelo se puede controlar la posición del máximo del factor de la agrupación; si éste se hace coincidir con la dirección en que se forma la interferencia constructiva de los campos radiados por cada uno de los brazos de la V se consigue un diagrama en pincel con lóbulos secundarios menores que en el caso de la antena de hilo largo.

Otra configuración de antena de onda progresiva es la antena rómbica que se muestra en la figura 7.5. Su comportamiento se analiza de forma similar a la antena en V. Si el ángulo α es ligeramente menor que el ángulo θ_m, formado por el máximo del diagrama de radiación de cada uno de los hilos con la dirección del eje, se consigue un haz elevado, que junto al efecto del suelo se acaba convirtiendo en un haz de tipo pincel elevado respecto a la horizontal.

Tal como se ha comentado anteriormente, se acostumbra a emplear estas antenas en comunicaciones ionosféricas en las bandas de LF, MF y HF. La longitud de los hilos puede llegar a ser de varias longitudes de onda. Debido a su baja eficiencia, acostumbran a emplearse en recepción. En este caso se trata de comunicaciones en las que la temperatura de ruido de las fuentes externas es muy elevada, en comparación con las fuentes de ruido interno, por lo que emplear antenas de baja eficiencia no supone inconveniente, en tanto que la relación señal-ruido en el receptor es, en la mayoría de los casos, independiente de las fuentes de ruido internas. Estas antenas presentan haces elevados respecto al suelo, lo que es útil en las comunicaciones ionosféricas. La impedancia de entrada es prácticamente constante y coincide con la impedancia característica de la línea de transmisión.

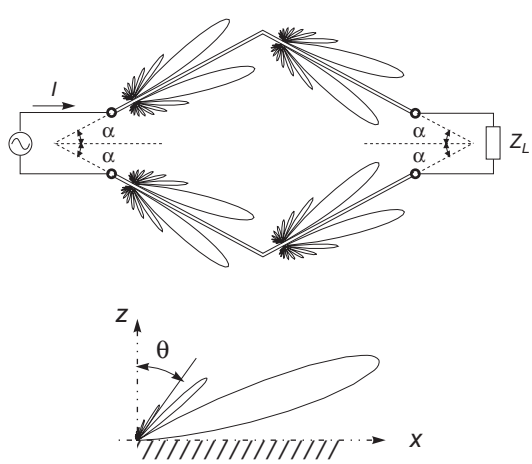


Fig. 7.5 Antena rómbica

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

7.3 Otras antenas de banda ancha

Además de estas antenas de onda progresiva pueden construirse dipolos de banda ancha teniendo en cuenta, como se observa en la figura 4.22, que cuanto más grueso es un dipolo menos varía su reactancia de entrada respecto a la frecuencia. Estos dipolos se utilizan en los sistemas emisores de radiodifusión y en algunos radares de UHF; en la figura 7.6 se muestra una agrupación plana de dipolos en V ortogonales, excitados en cuadratura para obtener polarización circular.

También se utilizan dipolos derivados de la línea bicónica, dos ejemplos de los cuales se representan en la figura 7.7. Uno de ellos tiene forma plana y se conoce en inglés con el nombre de *bowtie*, pajarita, por su forma, mientras que el otro es una combinación de un disco y un cono, que pueden ser fabricados como superficies sólidas o con varillas.

Al igual que ocurre con los dipolos, las ranuras delgadas poseen anchos de banda pequeños, pero si se agrandan, por ejemplo mediante una especie de abocinamiento, se logran grandes anchos de banda. Una estructura de este tipo, construida sobre un sustrato dieléctrico, se representa en la figura 7.8 y recibe el nombre de antena Vivaldi. También se puede aumentar el ancho de banda de una guía y, en consecuencia, de una bocina, introduciendo longitudinalmente en el plano central de simetría dos crestas (*ridges*, en inglés) que progresivamente van reduciéndose al ir abriendo la bocina. En las bocinas linealmente polarizadas, que se derivan de una guía rectangular, las crestas se sitúan paralelas a la cara estrecha de la guía, mientras que en las bocinas duales en polarización, tanto las derivadas de guía cuadrada como de guía circular, se sitúan en dos planos ortogonales. La figura 7.8 muestra un ejemplo de una bocina de banda ancha de este tipo.

Fig.7.6 Agrupación de dipolos ortogonales

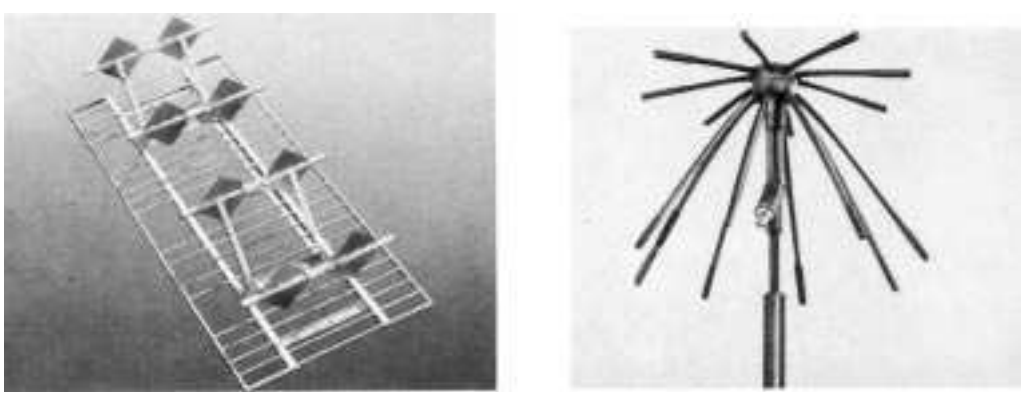


Fig. 7.7 Agrupación de dipolos de banda ancha para la difusión de TV (izquierda) y antena discono (derecha)

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

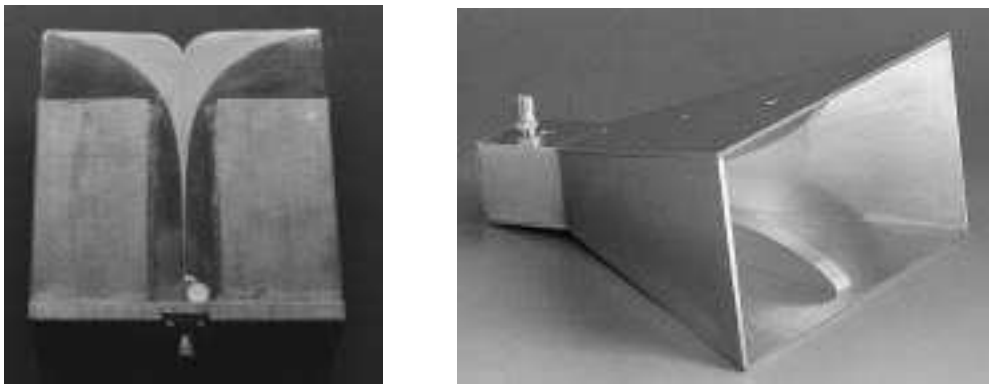


Fig. 7.8 Antena Vivaldi (izquierda) y bocina con doble cresta (derecha)

7.4 Hélices

Un tipo de antena que presenta un comportamiento de banda ancha es la hélice, cuya geometría se representa en la figura 7.9. Una hélice es el resultado de bobinar un hilo conductor sobre un cilindro de diámetro constante. Los parámetros geométricos de diseño de una hélice son: su diámetro, la separación entre dos vueltas o paso de la hélice, el número de vueltas, el diámetro del hilo y el sentido del bobinado (a derechas o izquierdas). La longitud de una vuelta de hélice se puede relacionar con el diámetro y el paso a partir del triángulo representado en la figura 7.9.

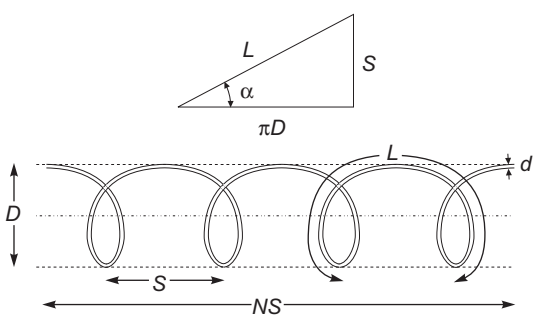


Fig. 7.9 Parámetros geométricos de una hélice

En función de las dimensiones de la hélice existen dos modos básicos de funcionamiento: el modo normal y el modo axial. En el modo normal el máximo de radiación se produce en la dirección normal al eje de la hélice (aquí normal hace referencia a perpendicular, ortogonal) y en el modo axial el máximo de radiación se encuentra en la dirección del eje de la hélice.

Una hélice opera en el modo normal cuando la longitud total del hilo empleado en bobinarla es mucho menor que λ. La longitud de hilo necesaria para realizar una vuelta de hélice es

$$L = \sqrt{S^2 + (\pi D)^2} \tag{7.5}$$

Si la hélice tiene N vueltas, la condición para que radie en modo normal es $NL << \lambda$.

El funcionamiento de la hélice en modo normal puede explicarse del siguiente modo: debido a sus reducidas dimensiones todos los puntos de la misma pueden considerarse alimentados en fase. En este caso, la hélice puede analizarse como una agrupación de elementos (vueltas de hilo) alimentados en fase. Para que se cumpla la condición de radiación normal, la separación entre los distintos elementos de la agrupación debe ser pequeña en términos de λ, lo que implica que el margen visible del factor de agrupación es un intervalo pequeño y, por tanto, en el espacio real, el factor de agrupación

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

es prácticamente isótropo, por lo que el diagrama de radiación de una hélice en modo normal coincide con el diagrama de radiación de una sola vuelta de hélice.

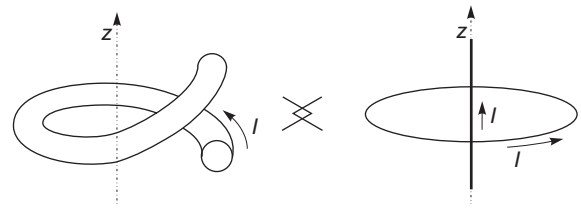


Fig. 7.10 Hélice en modo normal

Tal como se ha comentado anteriormente, la distribución de corriente en una vuelta de hélice en modo normal es uniforme en módulo y en fase. Atendiendo a la figura 7.10, una vuelta de hélice tendrá una corriente con componentes vectoriales según $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$. Es posible descomponer la vuelta de hélice como la superposición de una espira y un dipolo elementales de diámetro D y longitud S, respectivamente, antenas que ya se analizaron en el capítulo 4, por lo que el campo radiado por una hélice en modo normal de N vueltas es

$$\begin{aligned} E_\phi &= N120\pi^2 I\frac{\pi D^2}{4}\frac{1}{\lambda^2}\operatorname{sen}\theta\frac{e^{-jkr}}{r} \\ E_\theta &= jN60\pi IS\frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\frac{e^{-jkr}}{r} \end{aligned} \tag{7.6}$$

Nótese que en la dirección del máximo ($\theta = \pi/2$), el campo eléctrico tiene dos componentes ortogonales en cuadratura, lo que da lugar a una onda elípticamente polarizada con una relación axial

$$RA = \frac{|E_\theta|}{|E_\phi|} = \frac{2S\lambda}{(\pi D)^2} \tag{7.7}$$

Por tanto, es posible conseguir, en función de la geometría de la agrupación, una polarización circular. El sentido de giro de la onda estará controlado por el sentido de giro de la hélice, ya que el sentido de la corriente en la espira equivalente será $\pm\hat{\phi}$, dependiendo del sentido en que esté bobinada la hélice. Esta antena presenta la misma directividad que el dipolo y la espira elementales y su principal inconveniente es que posee una resistencia de radiación baja que, de forma aproximada, estará dada por la combinación en serie de N dipolos elementales de longitud S y N espiras elementales de diámetro D. La eficiencia de radiación puede ser también baja, ya que las pérdidas óhmicas del hilo empleado para realizar la hélice pueden ser comparables a la resistencia de radiación.

Estas hélices se emplean, en forma de monopolos, como antenas de los equipos de comunicaciones móviles de corto alcance conocidos como *walkie-talkies* y, sobre vehículos, en las bandas bajas de comunicaciones móviles (27, 144 MHz). En este último caso la longitud total de hilo es $\lambda/4$ y la antena puede considerarse como un monopolo cargado inductivamente a lo largo de toda su longitud, lo que produce un alargamiento eléctrico y un aumento de su longitud efectiva.

Los inconvenientes de la hélice en modo normal no se presentan en la hélice en modo axial, inventada por Kraus en 1946 y ampliamente utilizada en los primeros tiempos de las comunicaciones espaciales [Kraus'50]. Para que la hélice radie en modo axial debe cumplirse que la antena tenga dimensiones comparables a λ. Las condiciones geométricas para conseguir un funcionamiento óptimo son

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4} < \frac{C}{\lambda} < \frac{4}{3} \\ &S \approx \lambda/4 \end{aligned} \tag{7.8}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde C es el perímetro, y vale πD, y S es el paso de la hélice. El comportamiento de la hélice en modo axial puede analizarse como una antena de onda progresiva. Experimentalmente se ha comprobado que una hélice que cumpla estas condiciones (7.8) es una estructura que soporta una onda progresiva con una velocidad de fase, que depende de la geometría de la hélice, inferior a la velocidad de propagación en el vacío. Para una hélice de dimensiones óptimas la velocidad de fase es aproximadamente 0,8 veces la velocidad de propagación en el vacío. La hélice puede analizarse como una agrupación en la que los elementos están separados una distancia S y existe una fase progresiva dada por $\alpha = -k_p L$, donde k_p es la constante de fase de la onda progresiva en la hélice y L la longitud del hilo de una vuelta de hélice; por lo tanto si se cumplen las condiciones (7.8) se tiene el siguiente desfase progresivo entre las distintas vueltas de la hélice

$$\alpha = -k_p L \approx -\frac{k}{0{,}8}\sqrt{C^2 + S^2} \approx -kS - \delta \tag{7.9}$$

es decir, además del desfase -kS, que corresponde a la condición de radiación axial, existe un desfase adicional -δ, que depende de la geometría de la hélice y de la velocidad de fase de la onda progresiva, pero que, sorprendentemente, para una hélice óptima (que cumpla la condición dada por 7.8) este desfase adicional es aproximadamente -π/N, lo que resulta en una agrupación superdirectiva bajo la condición de Hansen-Woodyard. Por tanto, una hélice en modo axial puede estudiarse como una agrupación uniforme de Hansen-Woodyard en la que los elementos radiantes son vueltas de hélice de longitud del orden de λ. En este caso se trata de una agrupación de grandes dimensiones y, por tanto, su diagrama de radiación dependerá en gran medida del número de elementos (vueltas) que tenga, ya que en general el factor de agrupación es más directivo que el diagrama de radiación de una vuelta de hélice.

El diagrama de radiación de una vuelta de hélice puede calcularse, de forma aproximada, como el de una espira plana circular de la misma área y perímetro, que para una hélice en modo axial es del orden de λ. Dado que para un número grande de vueltas el factor de agrupación es más directivo que el diagrama de radiación del elemento, sólo interesa obtener el diagrama de radiación del elemento en las direcciones próximas al máximo. A partir de la figura 7.11 se observa que en una vuelta de hélice existe, para un instante de tiempo determinado, una distribución de corriente que se desfasa 360º a lo largo de toda la vuelta; por tanto existe una distribución de carga positiva en la mitad de la vuelta y negativa en la otra mitad. Debido a estas distribuciones de carga existe un campo eléctrico prácticamente perpendicular a la dirección del eje de la hélice, por lo que puede estudiarse la radiación de la vuelta de hélice como la radiación de una apertura. Debido a la variación temporal de las corrientes que circulan por la hélice, este campo gira dando lugar a una polarización circular. Para una hélice cuyo eje esté orientado según *z*, el campo radiado normalizado puede escribirse como

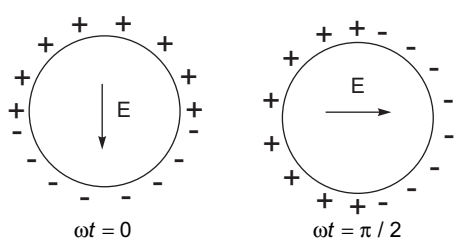


Fig. 7.11 Aproximación de una vuelta de hélice en modo axial

$$\left|E_N(\theta)\right| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2N}\right)\cos\theta\,\frac{\operatorname{sen}\left(N\psi/2\right)}{\operatorname{sen}\left(\psi/2\right)}\right|$$
$$\psi = kS\left(\cos\theta - 1\right) - \frac{\pi}{N} \tag{7.10}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En la práctica, la relación axial de la onda polarizada depende del número de vueltas, y puede calcularse de forma aproximada mediante

$$RA = \frac{2N+1}{2N} \tag{7.11}$$

Para una hélice en modo axial la resistencia de radiación vale aproximadamente

$$R_r \approx 140\frac{C}{\lambda} \tag{7.12}$$

que teniendo en cuenta las condiciones (7.8) lleva a valores prácticos de resistencia de radiación entre 100 y 200 ohmios. Una forma simple de alimentar una hélice a partir de un cable coaxial es montar la hélice sobre un plano de masa circular de diámetro 1 o 2 λ; el conductor interior del coaxial se conecta a la hélice y la malla al plano de masa. Dado que la hélice presenta una radiación baja en la dirección posterior, el plano de masa perturba poco el diagrama de radiación.

El ancho de haz de la hélice toma el valor

$$\Delta\theta_{-3\text{dB}} = \frac{52}{(C/\lambda)\sqrt{NS/\lambda}} \ (^\circ) \tag{7.13}$$

y la directividad

$$D = \frac{15\,N\,C^2\,S}{\lambda^3} \tag{7.14}$$

Con una hélice en modo axial es posible cubrir márgenes de frecuencias de casi una octava, tal como queda reflejado en (7.8), con una relación axial de la onda radiada y una impedancia de entrada prácticamente constantes. Una aplicación clásica de las hélices ha sido para transmitir y recibir las señales de control y telemetría de satélites artificiales. Habitualmente, estas señales se transmiten en las bandas de VHF y UHF, lo que aconseja emplear polarización circular para evitar pérdidas por desacoplo de polarización debidas a la rotación de Faraday. Las hélices tienen ganancias típicas que se sitúan entre los 10 y los 20 dB. En la figura 7.12 se muestra un ejemplo de hélices destinadas a estos fines.

Fig. 7.12 Hélices para comunicación espacial en VHF

Ejemplo 7.1 A una frecuencia de 10 GHz se construye una hélice de N = 10 vueltas, perímetro C = λ y ángulo de avance α = 14º.

El paso de la hélice vale $S = C\,\text{tg}\alpha = 0{,}25\lambda$ y la longitud del hilo en una vuelta $L = C/\cos\alpha = 1{,}03\lambda$, de lo que resultan las siguientes dimensiones:

$C = 3$ cm $\quad D = 0{,}95$ cm $\quad S = 0{,}75$ cm $\quad L = 3{,}1$ cm $\quad NS = 7{,}5$ cm

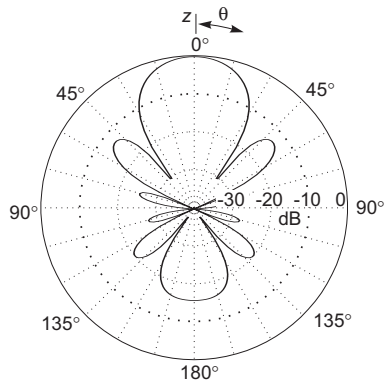
© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El diagrama de radiación se obtiene de (7.10)

$$t(\theta) = \left[\operatorname{sen}(0{,}05\pi)\cos\theta \frac{\operatorname{sen}\left(2{,}5\pi(\cos\theta - 1) - 0{,}5\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(0{,}25\pi(\cos\theta - 1) - 0{,}05\pi\right)} \right]^2$$

y sus parámetros principales son:

$$\Delta\theta_{-3\,\mathrm{dB}} = 33^\circ$$
$$D = 15{,}7\ \mathrm{dB}$$
$$RA = 1{,}1$$



7.5 Antenas independientes de la frecuencia

324

En todas las antenas analizadas hasta el momento, sus parámetros (resistencia de radiación, directividad, etc.) dependen de sus dimensiones: longitud, diámetro, radio, etc., pero no en términos absolutos sino en función de la longitud de onda. De esta forma, si se produce un escalado de una antena, por ejemplo se doblan todas las dimensiones, su comportamiento será el mismo a la frecuencia mitad, ya que en este caso las dimensiones de la antena respecto a λ son las mismas que en el caso original. A partir de esta consideración Rumsey estableció el siguiente principio: una antena cuya geometría pueda ser descrita únicamente en función de ángulos tendrá un comportamiento independiente de la frecuencia, ya que su geometría no varía al realizar un escalado. Un ejemplo de este tipo de estructura es la línea bicónica, que está formada por dos conos colineales alimentados por sus vértices y definida por su ángulo de apertura. Sin embargo, para que esta línea sea auténticamente independiente de la frecuencia debe tener longitud infinita. En la práctica, una realización real de la línea bicónica deberá incorporar unos terminales de alimentación y deberá tener una longitud finita. Este problema es común a todas las estructuras independientes de la frecuencia y en la práctica supone una limitación en el comportamiento frecuencial de estas antenas. Sin embargo, el comportamiento puede ser de banda muy ancha si la onda de corriente que se propaga en la estructura decae rápidamente al alejarse de los terminales de alimentación. Esto puede conseguirse obligando a la estructura a radiar a lo largo del camino de las corrientes, de forma que la corriente disminuya por pérdidas de radiación. En este caso, al truncar la antena no se modifica sustancialmente la distribución de corrientes en ella y por tanto su comportamiento queda inalterado. La línea bicónica, por el contrario, es una estructura que presenta una corriente de amplitud constante y, por tanto, no se puede truncar y no es apta para realizar antenas de banda ancha.

Para otro tipo de estructuras la corriente decae al alejarse del punto de alimentación, de forma que a una cierta distancia de los terminales, en términos de λ, puede considerarse que la corriente es nula. Nótese que, inevitablemente, este truncamiento supone limitar el comportamiento frecuencial de la antena, ya que si bien a una cierta frecuencia la corriente es prácticamente nula en el extremo de la

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

antena, a frecuencias más bajas el extremo de la antena estará más próximo a los terminales en términos de λ y, por tanto, la corriente dejará de ser despreciable. Para que la antena sea útil es necesario que disponga de unos terminales de alimentación. Estos terminales, idealmente, deben comportarse como un punto de alimentación; sin embargo, al aumentar la frecuencia tendrán dimensiones apreciables respecto a la longitud de onda, por lo que dejarán de comportarse idealmente. De forma genérica puede decirse que en la realización práctica de una estructura independiente de la frecuencia la dimensión de los terminales de alimentación fija la frecuencia máxima de utilización, mientras que la dimensión total de la antena está relacionada con la frecuencia más baja de funcionamiento. Estas limitaciones físicas no son excesivamente restrictivas ya que, por ejemplo, puede pensarse en una antena con terminales de dimensión 1 cm y dimensión total de 1 m, lo que de forma aproximada proporcionaría un ancho de banda de relación 1:100, es decir, 2 décadas.

Un concepto unido al enunciado del principio de Rumsey es el de antena autoescalable. Tal como se ha comentado anteriormente, si las dimensiones de una antena que presenta un cierto comportamiento a la frecuencia f se multiplican por una constante k, el comportamiento de la antena es el mismo a una frecuencia f/k. Por tanto, una antena será independiente de la frecuencia si su geometría no varía al multiplicarse por un factor de escala k. En este caso se dice que la antena es autoescalable. Expresado de forma matemática, si la geometría de una antena plana se puede escribir en coordenadas polares en la forma

$$r = F(\phi) \tag{7.15}$$

será autoescalable si

$$k\,F(\phi) = F(\phi + \Delta\phi_0) \tag{7.16}$$

es decir, al multiplicar por una constante, la geometría de la antena es la misma, salvo una posible rotación. Nótese que una rotación de la antena deja invariantes sus parámetros (impedancia de entrada, directividad, etc.) y sólo afecta a la polarización. Un ejemplo de geometría autoescalable son las espirales que se estudiarán en el siguiente apartado.

Otro concepto empleado comúnmente en el diseño de antenas de banda ancha, pero independiente del concepto de autoescalable, es el de antena autocomplementaria. Para una estructura plana formada por conductores, la estructura complementaria es la que resulta de reemplazar el conductor por el vacío y viceversa, de forma que si se superpone una estructura y su complementaria se obtiene una lámina conductora continua. Una antena es autocomplementaria cuando ella y su complementaria tienen la misma forma. En la figura 7.13 se muestran distintos ejemplos de formas autocomplementarias. Para que sean auténticamente autocomplementarias las partes conductoras deben ser ilimitadas. Obsérvese que los conceptos de autoescalable y autocomplementario son independientes. Por ejemplo, la estructura de la figura 7.13b es autocomplementaria pero no autoescalable, la de la figura 7.13a es ambas cosas, pero si el ángulo de abertura no fuera 45º sería autoescalable pero no autocomplementaria. La generación de una estructura autocomplementaria puede realizarse de forma genérica como se indica en la figura 7.13d, rotando tres veces 90º una curva cualquiera.

Las impedancias de dos antenas complementarias están relacionadas por

$$Z_a\, Z_a^{comp} = \frac{\eta^2}{4} \tag{7.17}$$

expresión que ya se encontró en el caso particular de un dipolo y de una ranura, pero cuya forma general se demuestra a partir de una extensión a problemas electromagnéticos del principio de Babinet [Jordan'68].

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

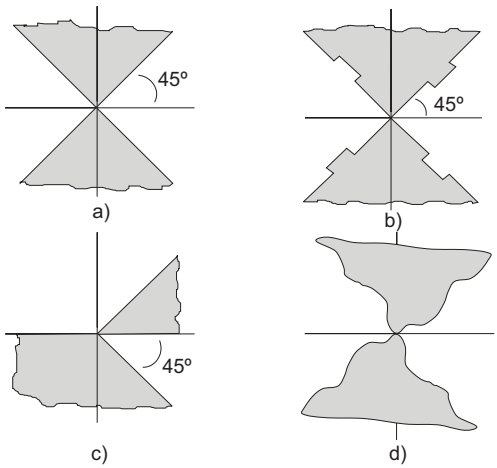


Fig. 7.13 Geometrías autocomplementarias

Para una antena autocomplementaria, su impedancia y la de la complementaria son iguales, por tanto,

$$Z_a = Z_a^{comp} = \frac{\eta}{2} = 60\pi\ \Omega = 188\ \Omega \qquad (7.18)$$

Así pues, una antena autocomplementaria tiene una impedancia independiente de la frecuencia dada por (7.18).

Una antena independiente de la frecuencia no tiene por qué ser necesariamente autocomplementaria, pero que lo sea tiene una serie de ventajas:

- La realización práctica presentará una impedancia más constante con la frecuencia.
- La antena es resonante y con un valor de impedancia manejable.
- El valor de la impedancia de antena es conocido a priori y no es necesario calcularlo.

Es por estos motivos que, cuando es posible, se emplean geometrías autocomplementarias en la realización de antenas independientes de la frecuencia.

7.5.1 Espirales

Una de la geometrías empleadas para la realización de antenas independientes de la frecuencia es la espiral. La espiral equiangular plana se define en coordenadas polares como

$$r = Ae^{a\phi} \qquad (7.19)$$

y es una curva autoescalable con cualquier factor de escala k, ya que

$$k\,r(\phi) = k\,Ae^{a\phi} = Ae^{a\left(\phi+\frac{1}{a}\ln k\right)} = r(\phi+\Delta\phi) \qquad (7.20)$$

Teniendo en cuenta que $r(\phi+2\pi) = r(\phi)e^{a2\pi}$, al término $e^{a2\pi}$ se le denomina el factor de expansión de la espiral y toma, en la práctica, valores menores de 10 (típicamente en torno a 4).

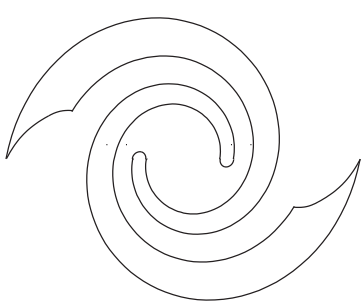


Fig. 7.14 Antena espiral equiangular plana

Una antena espiral puede formarse a partir de cuatro espirales convenientemente rotadas. En la figura 7.14 se muestra una realización de la misma. La antena puede ser autocomplementaria o no, dependiendo de cuánto estén rotadas las diferentes espirales que la definen. Cuando el ángulo de rotación es π/2, como en la figura 7.14, la antena es autocomplementaria.

La espiral debe truncarse cuando la longitud del brazo sea aproximadamente λ, condición que lógicamente debe cumplirse a la frecuencia más baja de funcionamiento. El comportamiento de la antena puede mejorarse si los brazos de la espiral se terminan de forma gradual, tal como se muestra en la figura 7.14.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

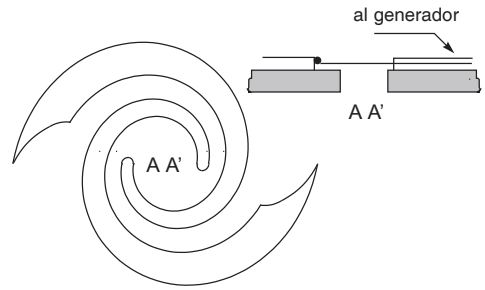


Fig. 7.15 Alimentación de la espiral equiangular plana

Un problema común a todas las antenas de gran ancho de banda es el de alimentarlas correctamente dentro de todo el margen de frecuencias de funcionamiento. La antena espiral equiangular plana debe alimentarse de forma equilibrada, es decir, por cada uno de los brazos de la espiral debe circular una corriente de la misma amplitud. La línea de transmisión que permite cubrir grandes anchos de banda sin pérdidas por radiación es el cable coaxial, pero tiene el inconveniente de que se trata de una línea no equilibrada. Si se conecta directamente el conductor interno del coaxial a un brazo de la espiral y el conductor externo al otro brazo la alimentación será asimétrica, debido a la corriente que circulará por la parte externa del coaxial.

Una manera de realizar un simetrizador es llevar el cable coaxial de alimentación a los terminales de forma que el conductor externo del coaxial esté conectado continuamente a uno de los brazos de la espiral. En el punto de alimentación se conecta el conductor interno del coaxial al otro brazo de la espiral (figura 7.15). De este modo la corriente que circula por la parte externa de la malla del coaxial es, de hecho, la misma que circula por el brazo de la espiral; como la longitud del brazo de la espiral se elige de forma que en su extremo la corriente sea despreciable y, por tanto, el truncamiento de la antena no afecte a sus características de radiación, no existirán corrientes por la parte externa del coaxial una vez abandone el brazo de la antena. Para conservar la simetría de la antena se puede colocar otro coaxial en el otro brazo de la espiral. La dimensión de los terminales de alimentación fija la frecuencia máxima de funcionamiento, ya que cuando la distancia entre los terminales empieza a ser comparable a la longitud de onda ($d > \lambda/10$) existe un desfase entre los dos brazos.

Fig. 7.16 Espirales cónicas

La espiral equiangular plana presenta un diagrama de radiación de campo del tipo cos θ, donde θ es el ángulo que forma la normal al plano de la antena y la dirección de observación. Por tanto, presenta nulos de radiación en las direcciones que deberían estar ocupadas por la antena infinita y radia por igual en las dos direcciones normales al plano de la antena. La polarización es circular dentro del ancho de banda de funcionamiento, incluso para ángulos bastante alejados de la dirección del máximo. En la práctica se consiguen sin excesiva dificultad diseños que cubren una década de frecuencias. Nótese que esta antena, además de ser de banda ancha, tiene un diagrama poco directivo y está polarizada circularmente, por lo que es una antena especialmente indicada para recibir señales de procedencia, polarización lineal y frecuencia desconocidas en actividades de control del espectro electromagnético.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En ciertas aplicaciones es necesario disponer de una antena de banda ancha, pero con un diagrama de radiación unidireccional; por ejemplo, si se desea emplear como alimentador de un reflector. La característica de radiación bidireccional de la espiral equiangular plana puede eliminarse montándola sobre una cavidad; sin embargo, ésta es una solución de banda estrecha y suele ser necesario introducir absorbentes dentro de ella para mejorar la respuesta frecuencial. Una configuración de banda ancha que presenta un diagrama unidireccional es la espiral cónica. La antena se construye montando los dos brazos de la espiral sobre un cono. La geometría continúa siendo autoescalable y puede hacerse autocomplementaria. El ángulo que forma la generatriz del cono con el eje es típicamente de unos 15 grados, y se obtienen relaciones delante-atrás del orden de los 15 dB. En la figura 7.16 se muestra una realización de esta antena. Las características son similares a las de la espiral plana, excepto que presenta un diagrama unidireccional en la dirección del vértice del cono. Se alimenta de la misma manera que una espiral plana.

Es conveniente observar el paso de una hélice a una espiral cónica para comprender mejor su comportamiento independiente de la frecuencia. En una hélice hay dos dimensiones fijas que limitan el ancho de banda: el perímetro C y el paso S; en la espiral cónica ambas se hacen variables, por lo que esta limitación se elimina y queda la estructura definida únicamente por ángulos.

Ejemplo 7.2 Una espiral que tenga que cubrir un ancho de banda de 1:10, con frecuencia inferior de 2 GHz y superior de 20 GHz, tendrá un factor de expansión dependiente del número de vueltas que queramos incluir en la espiral. Si tomamos este número como 2, tendremos para los radios interior y exterior de la espiral

$$\begin{aligned} &\text{alimentación:} && \phi = 0, \quad r_{int} = R_0 \\ &\text{exterior:} && \phi = 4\pi, \quad r_{ext} = R_0\, e^{a4\pi} = 10\, R_0 \end{aligned}$$

de donde resulta a = 0,183 y el factor de expansión

$$e^{a2\pi} = \sqrt{10} = 3{,}16$$

A la frecuencia inferior tendremos λ_{inf} = 15 cm y a la superior λ_{sup} = 1,5 cm. Si tomamos los radios exterior e interior como la cuarta parte de estas longitudes de onda tendremos

$$r_{int} = 3{,}75 \text{ mm}, \quad r_{ext} = 3{,}75 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta la terminación de la espiral, se observa que el diámetro de la antena estará en torno a 10 cm. La región más crítica es la zona de la alimentación, que tendrá que ser realizada con gran precisión.
Como el diagrama de campo de la espiral es del tipo $\cos\theta$, resulta una directividad $D = 3$ (4,8 dB) y una polarización prácticamente circular.

7.6 Antenas logoperiódicas

Las estructuras autoescalables cumplen el principio de Rumsey y por tanto son aptas para realizar antenas independientes de la frecuencia. Considérese inicialmente la configuración plana de la figura 7.17a. Ésta es una estructura autoescalable, y en el caso de que $\beta = 90^\circ$, es autocomplementaria. Sin embargo, tiene una amplitud de corriente total constante en función de la distancia a los terminales,

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

por lo que al truncarla aparecerá una onda estacionaria y la antena dejará de ser independiente de la frecuencia. Si a la estructura se le añaden discontinuidades, tal como se indica en la figura 7.17b, la radiación aumentará, de forma que la corriente decrecerá con la distancia y será posible truncarla. La estructura de la figura 7.17b puede realizarse auto-complementaria si $\alpha = 135º$ y $\beta = 45º$; sin embargo no es autoescalable de forma continua, ya que aparecen las dimensiones R_n -los radios donde se practican las hendiduras- y, por tanto, no será apta para realizar una antena independiente de la frecuencia.

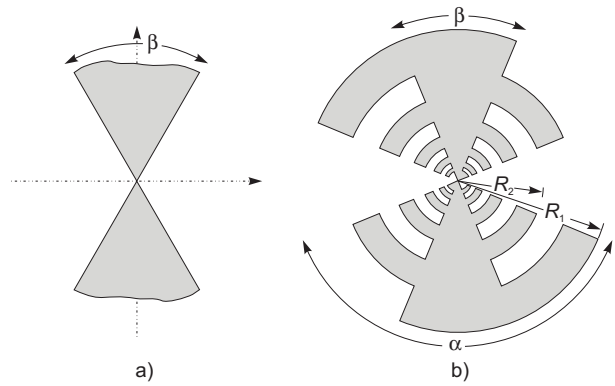


Fig. 7.17 Estructura logoperiódica

Si los radios R_n se eligen de forma que se mantenga entre dos consecutivos una relación constante τ

$$\tau = \frac{R_{n+1}}{R_n} < 1 \tag{7.21}$$

resulta una antena autoescalable, siempre que se aplique un cambio de escala k de valor

$$k = \tau^m; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots \tag{7.22}$$

y, por tanto, el comportamiento de la antena a dos frecuencias distintas f_o y f_m, relacionadas por

$$f_m = \tau^m f_0 \tag{7.23}$$

es el mismo. Si se toman logaritmos en la expresión anterior se obtiene que

$$\log f_m = m \log \tau + \log f_0 \tag{7.24}$$

es decir, si se representa gráficamente cualquier parámetro de la antena en función del logaritmo de la frecuencia, se observará que presenta un comportamiento periódico cuyo periodo es $\log\tau$. Es por este motivo que a estas estructuras se las llama logoperiódicas. Nótese que una antena logoperiódica no sería de banda ancha si los parámetros de la antena variasen dentro de un periodo más de lo permisible. En general todas las estructuras logoperiódicas responden al modelo de la figura 7.17b, en la que existe una celda básica que se repite multiplicando todas las dimensiones de la celda anterior por un factor de escala.

Es inmediato comprobar que una espiral también es logoperiódica. Partiendo de (7.19) se tiene

$$R_n = R_0 e^{a(\phi - 2\pi n)} \tag{7.25}$$

y entre dos radios consecutivos resulta

$$\tau = \frac{R_{n+1}}{R_n} = e^{-2\pi a} \tag{7.26}$$

La primera antena logoperiódica que se construyó es la indicada en la figura 7.17b. Es autocomplementaria, por lo que presenta una impedancia de entrada de 188 Ω y radia

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

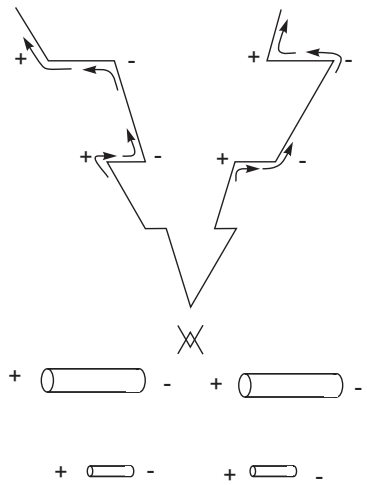


Fig. 7.18 Distribución de cargas en la estructura trapezoidal

bidireccionalmente en la dirección perpendicular al plano de la antena con polarización lineal en el sentido de los dientes. Éstos son precisamente los que producen la radiación y la región activa de la antena a una frecuencia es el conjunto de celdas en las que la longitud de los dientes es del orden de $\lambda/4$. En la figura 7.18 se incluye una forma trapezoidal que tiene prácticamente las mismas características que la antena curva.

La estructura de la figura 7.18, por ejemplo, radia debido a las discontinuidades (dientes o hendiduras), que fuerzan a un cambio en la dirección de la corriente que circula por ella. Estos cambios de dirección implican que en las discontinuidades se produzcan acumulaciones de carga; la corriente que circula por el borde de la estructura sufre giros a derecha e izquierda debido a la existencia de las hendiduras. Por simetría, si suponemos un cierto valor para la divergencia de la corriente en los giros a la derecha, la divergencia de la corriente será de signo opuesto en los giros a la izquierda. A partir de la ecuación de continuidad se establece que se producen acumulaciones de carga oscilantes en las discontinuidades. Estas acumulaciones son de signo opuesto para los giros a derecha e izquierda, de forma que en la estructura trapezoidal se produce una distribución de carga que oscila con el tiempo, que para un instante determinado tiene la distribución de la figura 7.18.

Las partes horizontales de la estructura presentan una distribución de carga similar a la de los brazos de dipolos, es decir, carga opuesta en los extremos, mientras que las corrientes radiales no radian. Por tanto, la radiación desde el punto de vista de polarización es igual a la del dipolo; por otra parte es fácil comprender que la máxima radiación se produce cuando la profundidad de la hendidura es aproximadamente $\lambda/4$, ya que en este caso la estructura es resonante.

Es posible obtener un diagrama unidireccional si se doblan los dos brazos de la antena sobre sí mismos, tal como se muestra en la figura 7.19. El diagrama de radiación presenta un máximo en la dirección del vértice, y se mantienen las características de la antena para ángulos $60º > \psi > 30º$. La directividad en este caso es de unos 8 a 10 dB y los anchos de banda que se consiguen son de una década.

La antena de la figura 7.17b admite una serie de simplificaciones que, sin afectar notablemente a su comportamiento, facilitan su construcción (se muestran en la figura 7.20). Experimentalmente se ha comprobado que la corriente en la estructura trapezoidal se propaga principalmente por el borde de la misma, por lo que no es necesario realizar la antena con una lámina conductora, sino que puede hacerse con hilo conductor, tal como se indica en la figura 7.20b, o de forma más simplificada todavía en zigzag, como se muestra en la figura 7.20c. Con cualquiera de estas configuraciones la antena puede plegarse para obtener un diagrama unidireccional como se hace en la figura 7.19.

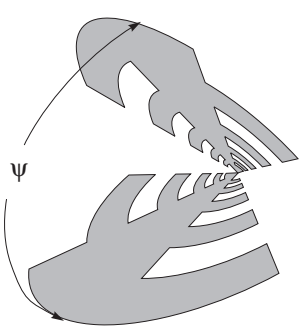


Fig. 7.19 Antena logoperiódica unidireccional

Estas antenas se utilizan también como alimentadores de reflectores parabólicos. En la figura 7.21 se muestra una agrupación de 4 reflectores, iluminados por una combinación de antenas logoperiódicas trapezoidales ortogonales, plegadas en la forma representada en la figura 7.19.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En la figura 7.22 se muestra una antena logoperiódica basada en la configuración de la figura 7.20c. Se trata de cuatro brazos dispuestos en un plano y rotados 90º. La estructura es autocomplementaria y de hecho se trata de dos antenas dispuestas ortogonalmente. Dado que la polarización de cada una de ellas es lineal, desfasando adecuadamente la señal de cada una de las antenas, es posible obtener polarización circular.

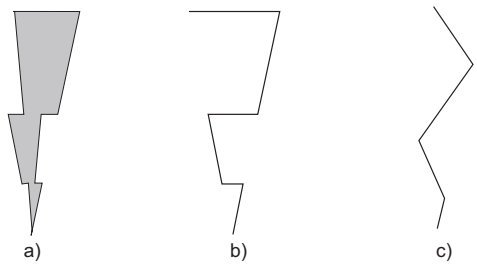


Fig. 7.20 Distintas configuraciones para antenas logoperiódicas

Otra configuración de antena logoperiódica es la agrupación logoperiódica de dipolos. La geometría de esta antena se muestra en la figura 7.23. De hecho está basada en la estructura trapezoidal de la figura 7.20b, pero realizada directamente con dipolos, lo que desde el punto de vista de construcción y transporte de la misma ofrece ventajas, ya que es una estructura desmontable. Está formada por una agrupación no uniforme de dipolos, de forma que todas las dimensiones que definen la agrupación se escalan por el factor de escala τ.

$$\tau = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} < 1 \qquad (7.27)$$

Además del factor de escala la agrupación logoperiódica está definida por el ángulo α; también se define un tercer parámetro, el espaciado relativo σ

$$\sigma = \frac{d_n}{2L_n} = \frac{1-\tau}{4\,\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad (7.28)$$

si bien, tal como se pone de manifiesto en (7.28), de estos tres parámetros sólo dos son independientes y bastan para definir completamente la agrupación de dipolos. En la práctica no se escalan todas las dimensiones de la antena y, habitualmente, el diámetro de los dipolos y la separación de los terminales de alimentación se mantienen constantes para todos los elementos o, en ciertos casos, se modifican de forma escalonada para grupos de varios elementos; por ejemplo, se realiza una agrupación de 10 elementos con dipolos de 2 grosores distintos.

Fig. 7.21 Antenas logoperiódicas trapezoidales dobladas usadas como alimentadores de un reflector

La agrupación logoperiódica se alimenta por el vértice. Para conseguir resultados óptimos es necesario cruzar los cables de alimentación de forma que cada dipolo esté alimentado con un desfase adicional de π al introducido por la línea de transmisión (figura 7.24a). La forma habitual de alimentar una agrupación logoperiódica es a partir de un cable coaxial; una forma simple de realizar la alimentación cruzada y a la vez incluir un simetrizador está representada en la figura

Fig. 7.22 Antena logoperiódica de cuatro brazos

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

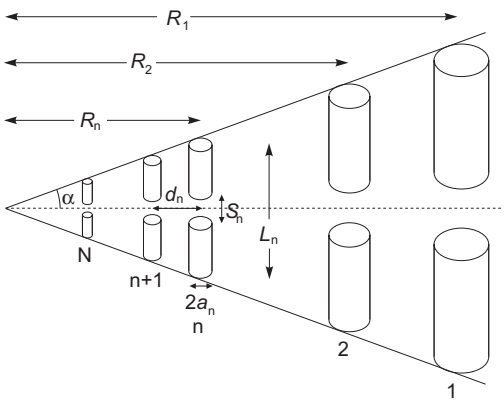


Fig. 7.23 Agrupación logoperiódica de dipolos

7.24b. El funcionamiento de la agrupación logoperiódica puede entenderse de la siguiente manera: a una frecuencia determinada, el dipolo que sea resonante $(L_n \approx \lambda / 2)$ radiará la mayor parte de la potencia que transporta la línea de transmisión. Los dipolos de longitud mayor actúan de reflectores mientras que los de longitud menor de directores, de forma análoga a la antena Yagi. De esta forma el diagrama de radiación presenta el máximo en la dirección del vértice. La zona donde se produce la radiación se denomina región activa de la antena y estará formada por aquellos dipolos cuya longitud sea aproximadamente λ/2 a la frecuencia de trabajo. La zona activa se desplaza a lo largo de la antena en función de la frecuencia. Dado que el elemento radiante es un dipolo, la polarización es lineal. A partir de este razonamiento se comprende que el ancho de banda de una agrupación logoperiódica estará fijado por la longitud del dipolo más largo y la del más corto.

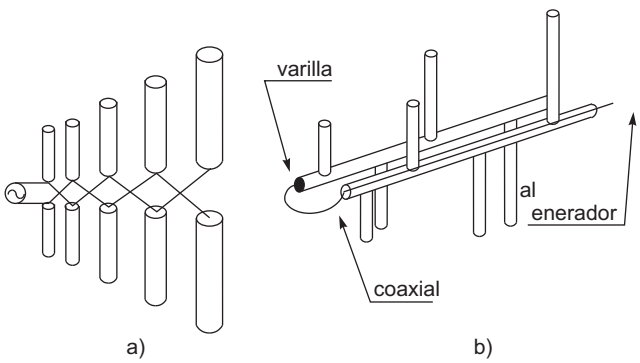


Fig. 7.24 Alimentación de una agrupación logoperiódica

El diseño de una agrupación logoperiódica se basa en gran parte en el empleo de curvas y tablas que se han obtenido de forma empírica o bien mediante modelos aproximados. En primer lugar, dado el margen de frecuencias que se debe cubrir, se determina la longitud de los dipolos más cortos y más largos, de forma que

$$\begin{aligned} L_{mín} &= k_1 \lambda_{\sup} \\ L_{máx} &= k_2 \lambda_{\inf} \end{aligned} \tag{7.29}$$

donde λ_{inf} corresponde a la longitud de onda a la frecuencia inferior de la banda y λ_{sup} a la frecuencia superior de la banda. Las constantes k_1 y k_2 se pueden consultar en tablas o en primera aproximación pueden tomarse como 0,5. El número de elementos de la agrupación y el ancho de banda están relacionados por el factor de escala τ. Si *N* es el número de elementos de la agrupación se cumple que

$$\frac{L_{máx}}{L_{mín}} = \tau^{-(N-1)} = \frac{k_2 \lambda_{\inf}}{k_1 \lambda_{\sup}} = k \frac{f_{\sup}}{f_{\inf}} = k\, B \tag{7.30}$$

$$N = -\frac{\log(k\,B)}{\log(\tau)} + 1 \tag{7.31}$$

$$k \approx 1{,}1 + 7{,}7(1-\tau)^2 \operatorname{cotg}\alpha \tag{7.32}$$

donde B es el ancho de banda relativo de la agrupación, y k es un factor que tiene en cuenta que la zona activa de la antena tiene una cierta anchura y que, por tanto, es necesario que el elemento más corto de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

la agrupación sea menor que λ/2 a la frecuencia mayor y que el elemento mayor sea más largo que λ/2 a la frecuencia menor, de forma que el diseño se realiza para una antena de ancho de banda mayor. El factor de escala y el espaciado relativo determinan la directividad de la agrupación. En la figura 7.25 se muestra una gráfica obtenida por Carrel (modificada por Johnson '84 para corregir un error de la figura original) que relaciona estos dos parámetros con la directividad.

Una vez determinados σ y τ se encuentra automáticamente α a partir de la ecuación (7.28), con lo cual quedan totalmente determinadas las características de la agrupación. La longitud total de la agrupación puede encontrarse mediante simples consideraciones geométricas, y tiene el valor

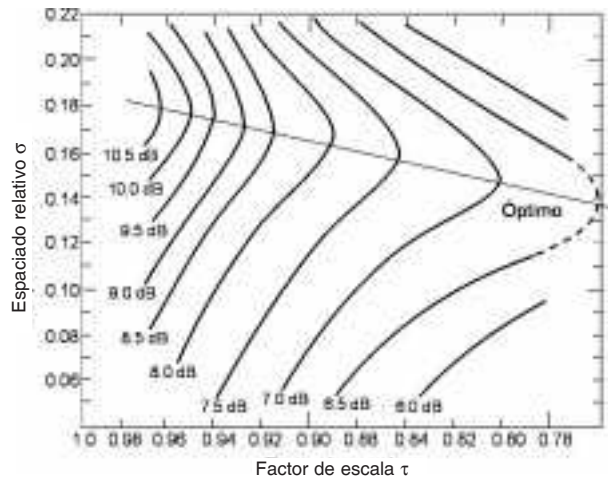


Fig. 7.25 Directividad de una agrupación logoperiódica de dipolos en función de σ y τ (R. Carrel, The design of log-periodic dipole antennas, IRE Int. Conv. Rec., © 1961 IRE (ahora IEEE))

$$L = R_1 - R_N = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\left(L_{máx} - L_{mín}\right) \qquad (7.33)$$

333

Ejemplo 7.3 Para estimar las características de una agrupación logoperiódica de dipolos que cubra las bandas III, IV y V de TV tendremos, en primera aproximación, suponiendo que las longitudes máxima y mínima de los dipolos en los límites de la banda son λ/2,

f_{inf}	f_{sup}	λ_{inf}	λ_{sup}	B	k	$L_{mín}$	$L_{máx}$
174 MHz	850 MHz	172 cm	35 cm	4,9	1	17 cm	86 cm

Para un diseño con una directividad de 9 dB más correcto tendremos, tomando los valores óptimos de la figura 7.25 y las expresiones (7.29) a (7.33),

τ	σ	α	k	k_1	k_2	$L_{mín}$	$L_{máx}$	N	L
0,865	0,156	12,2º	1,75	0,29	0,52	10 cm	89 cm	16	184 cm

Las agrupaciones logoperiódicas son estructuras bidimensionales que proporcionan haces unidireccionales con directividades del orden de 10 dB. Habitualmente a bajas frecuencias se prefiere el uso de estas antenas frente al empleo de hélices o espirales cónicas, que son estructuras tridimensionales y por tanto mucho más voluminosas, a no ser que el empleo de polarización circular sea un requisito imprescindible. Es habitual el uso de agrupaciones logoperiódicas en enlaces ionosféricos en la banda de HF. También pueden emplearse como alimentadores de reflectores y en el

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

caso de requerirse polarización circular pueden montarse dos agrupaciones ortogonales. Si ambas son iguales, han de excitarse en cuadratura de fase para lograr polarización circular, lo que requiere el uso de circuitos desfasadores o de híbridos de banda ancha. Se puede evitar su uso montando ambas agrupaciones sobre una única línea y escalando una de ellas un factor $\sqrt{\tau}$ respecto a la otra, lo que produce un desfase de 90º en su campo radiado en toda la banda de frecuencias.

7.7 Antenas fractales

Algunas formas fractales tienen unas propiedades geométricas que permiten construir antenas con un comportamiento multifrecuencia. Ciertas formas fractales ideales son autosimilares. De forma intuitiva un objeto es autosimilar cuando está formado por copias de él mismo a una escala más reducida. Un ejemplo clásico de geometría fractal autosimilar es la alfombra de Sierpinski.

Fig. 7.26 Construcción de la alfombra de Sierpinski

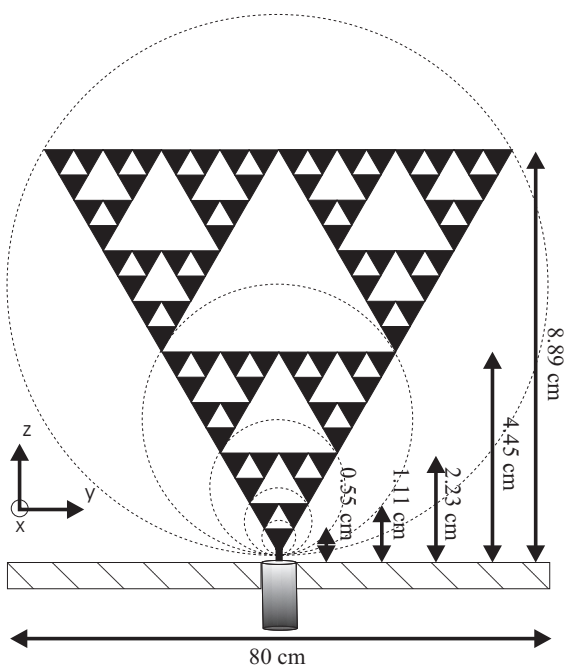


Fig. 7.27 Realización de un monopolo de Sierpinski (Puente'97)

En la figura 7.26 se muestra el proceso de construcción de la alfombra de Sierpinski truncada a cinco iteraciones, nótese que la forma general se reproduce dentro del mismo objeto con dimensiones más pequeñas. El objeto resultante no es autoescalable en el sentido definido en la sección 7.5, pero su estructura geométrica sugiere que el comportamiento de la antena debe mostrar cierto comportamiento logoperiódico, ya que la geometría de la antena se replica dentro de ella misma escalada por un factor 2. La verificación experimental de este concepto es concluyente respecto al comportamiento logoperiódico de esta antena. La figura 7.27 muestra la realización de un monopolo de Sierpinski con una altura de 8,9 cm. La medida del coeficiente de reflexión a la entrada, figura 7.28, muestra bandas de adaptación a 0,52, 1,74, 3,51, 6,95 y 13,89 GHz, es decir, excepto la primera banda que está afectada por el truncamiento de la antena, las frecuencias centrales de cada

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

banda están espaciadas por un factor 2. Del análisis numérico de la estructura es posible obtener la distribución de corrientes en la antena. En la figura 7.29 se puede observar como efectivamente en cada una de las bandas la distribución de corrientes en la estructura tiende a parecerse, aunque afectada por un factor de escala. El resultado final es que la antena presenta en cada banda diagramas similares. En la figura 7.30 se muestra la similitud entre los diagramas medidos. El empleo de geometrías fractales para el desarrollo de antenas representa una aportación novedosa y original con aplicaciones entre otras al desarrollo de antenas multibanda para comunicaciones móviles.

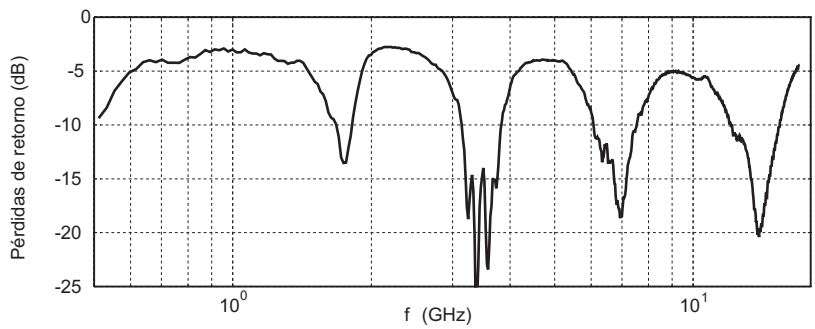


Fig. 7.28 Coeficiente de reflexión sobre 50 Ω del monopolo de Sierpinski

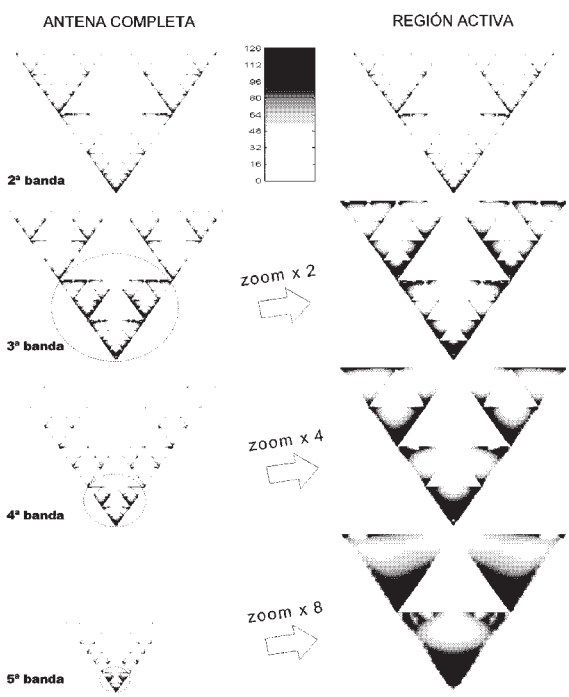


Fig. 7.29 Densidad de corriente sobre el monopolo de Sierpinski en las cuatro bandas superiores (la primera banda no es significativa ya que está afectada por el truncamiento de la estructura)

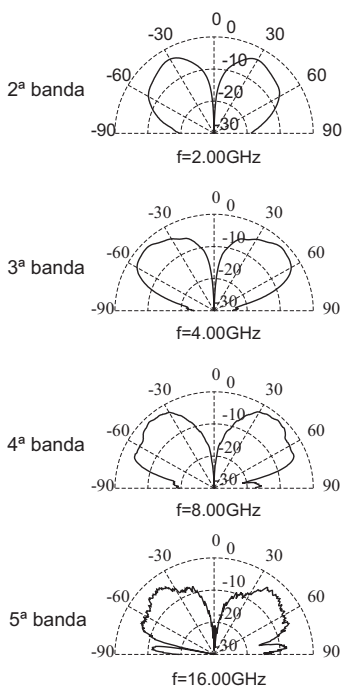


Fig. 7.30 Intensidad de campo radiado en la componente $E_\theta(\phi = 90º)$ en el plano vertical de la antena para las cuatro bandas superiores

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

7.1 Si en una antena de onda progresiva de hilo largo (Beverage) se aumenta la longitud del hilo:
a) La impedancia de entrada aumenta.
b) La impedancia de entrada disminuye.
c) La dirección del máximo se aproxima a la horizontal.
d) La dirección del máximo se aproxima a la vertical.

7.2 Un hilo recto de longitud 10 λ soporta una onda progresiva. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?
a) Radia polarización lineal.
b) Posee un nulo en la dirección del hilo.
c) El máximo de radiación se sitúa en el plano perpendicular al hilo.
d) La directividad es mayor que la del mismo hilo con una distribución sinusoidal de corrientes.

7.3 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones para un diseño típico de una antena rómbica es incorrecta?
a) Longitud de cada brazo de 2 a 7 λ_0.
b) Z_{ent} de 400 a 800 Ω.
c) NLPS de 5 a 10 dB.
d) Ancho de haz de 2º a 4º.

7.4 Para una hélice funcionando en modo axial, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
a) Al aumentar el número de vueltas, la relación axial de la onda transmitida aumenta.
b) Al aumentar el número de vueltas la directividad aumenta.
c) El diagrama de radiación es unidireccional.
d) El perímetro de cada una de las vueltas es del orden de una longitud de onda.

7.5 El ancho de banda de una hélice en modo axial de diámetro 5 cm es:
a) 1,4 - 2,5 GHz b) 2,8 - 5,4 GHz
c) 4,5 - 8 GHz d) 9 - 18 GHz

7.6 Una hélice posee una relación axial de 1,1. El nivel de polarización cruzada valdrá:
a) -11 dB b) -13,2 dB c) -26,4 dB d) -39,6 dB

7.7 Para una antena autoescalable con dimensiones infinitas, ¿cuál de los siguientes parámetros no es independiente de la frecuencia?
a) La impedancia de entrada.
b) El tipo de polarización.
c) La directividad.
d) La temperatura de ruido.

7.8 En la realización de antenas independientes de la frecuencia, las configuraciones autocomplementarias ofrecen las siguientes ventajas:
a) Mayor pureza de polarización.
b) La antena es siempre resonante.
c) Se obtienen diagramas unidireccionales.
d) Su construcción es más simple.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

7.9 Indique cuál de las siguientes características no es obtenible en una antena espiral equiangular plana:
a) Autoescalable. b) Autocomplementaria.
c) Gran ancho de banda. d) Polarización lineal.

7.10 Para una espiral que funciona en la banda de 3 a 30 GHz, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
a) La directividad se mantiene constante.
b) La impedancia de entrada se mantiene constante.
c) La relación axial se mantiene constante.
d) La temperatura de antena se mantiene constante.

7.11 La relación entre los radios de la zona de alimentación y máximo de una espiral equiangular es de 10, y el numero de vueltas de la espiral es de 15. El ancho de banda será:
a) 10 % b)15% c)1:10 d)1:15

7.12 Una espiral cónica:
a) Siempre es autocomplementaria. b) Tiene un diagrama de radiación unidireccional.
c) No es autoescalable. d) Radia polarización lineal.

7.13 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones para una antena espiral equiangular cónica es incorrecta?
a) Produce polarización circular. b) Posee un diagrama bidireccional.
c) Es de banda ancha. d) Posee directividad baja.

7.14 Al aumentar el factor de escala τ en una agrupación logoperiódica de dipolos:
a) La respuesta en frecuencia se hace más plana.
b) El número de elementos disminuye.
c) La impedancia de entrada tiende a la de la línea de transmisión que la soporta.
d) La polarización tiende a circular.

7.15 El diagrama de radiación de una agrupación logoperiódica de dipolos es, en su banda de trabajo:
a) Unidireccional hacia el vértice.
b) Unidireccional hacia el dipolo más largo.
c) Bidireccional.
d) Cónico en la dirección del vértice, pero con un nulo en el eje de la agrupación.

7.16 La impedancia de entrada de una antena logoperiódica, realizada con un factor de escala $\tau = 0{,}5$, posee en escala logarítmica (log f) una periodicidad en frecuencia de valor
a) 0,3 b) 0,5 c) 1 d) 2

7.17 Se necesita una antena con ganancia 10 dB, ancho de banda 10:1 y polarización lineal. ¿Cuál elegiría?
a) Espiral equiangular. b) Antena rómbica.
c) Agrupación logoperiódica de dipolos. d) Antena de onda progresiva.

7.18 ¿Cuál de las siguientes antenas puede alcanzar mayor directividad?
a) Hélice en modo axial. b) Hélice en modo normal.
c) Espiral equiangular. d) Monopolo de $5\lambda/8$.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

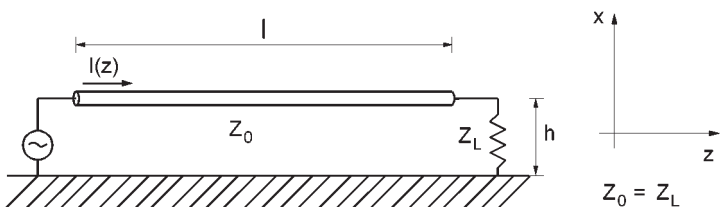
7.1 La antena de hilo largo de la figura se alimenta con una corriente de entrada I_0. La línea de transmisión formada por el hilo y el plano de tierra tiene una impedancia característica Z_0 y una constante de propagación β.

a) Hallar la expresión del campo radiado por la antena sin considerar el efecto del suelo (hilo de corriente de longitud ℓ aislado en el espacio).

b) Representar el diagrama del caso anterior, normalizando en dB, para $\ell = 7\lambda$ y $\beta = k$, en el margen angular $0< \theta<50º$. Para ello hállese en primer lugar la posición de los nulos y fórmese una tabla de valores con incrementos de 5º. Indíquese la dirección del máximo y el nivel de lóbulo principal a secundario.

c) El efecto de la tierra puede considerarse en primera aproximación como el efecto de un conductor perfecto, plano e infinito. Si la dirección del máximo de radiación para el hilo aislado es θ_m, encuéntrese la expresión de la altura h para que el máximo de la agrupación resultante al considerar el efecto del suelo también sea θ_m.

d) Para la antena del problema escríbase la expresión del campo radiado en coordenadas esféricas considerando el efecto del suelo y cumpliéndose la condición del apartado c. Encuéntrese en este caso el nivel de lóbulo principal a secundario en el plano *xz*.



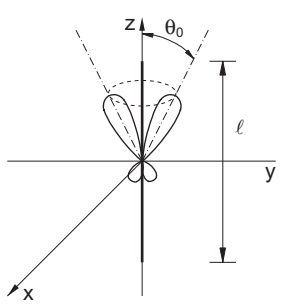
7.2 Una antena lineal de longitud $\ell = 10\ \lambda$ tiene una distribución de corriente

$$I(z) = \begin{cases} I_0 e^{-j0,5kz} & |z| < \ell/2 \\ 0 & |z| \geq \ell/2 \end{cases}$$

a) Obtener su vector de radiación y representar los campos radiados, identificando el lóbulo principal y la posición de los primeros ceros.

b) ¿Cuál será el ancho de haz a -3 dB y la directividad de esta antena?

7.3 Se pretende diseñar una antena lineal para un radar de exploración, entendiendo por ángulo de apuntamiento, θ_0, el formado por el haz principal (que tiene simetría de revolución en torno al eje *z*) con el eje *z*. Si se supone una corriente con una distribución de amplitud uniforme y una distribución de fase sintetizable, $I(z) = I_0 \cdot e^{j\alpha z}$, calcular:



a) La pendiente α de la distribución de fase en función del ángulo de apuntamiento θ_0.

b) La dimensión lineal ℓ, en términos de λ, para tener una resolución de 5º (ancho de haz a -3 dB) en la dirección $\theta_0 = 90º$.

c) El ancho de haz a -3 dB en función de θ_0 (sugerencia: aproximar en torno a θ_0 mediante un desarrollo de Taylor).

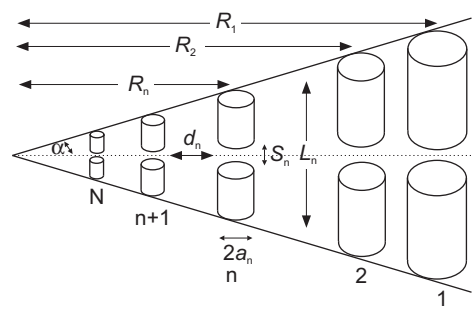
d) La dependencia de la directividad con θ_0.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

7.4 Se pretende diseñar una agrupación logoperiódica de dipolos que funcione en el margen de frecuencias de 100 MHz a 1.000 MHz, con una directividad de 7 dB. Se debe utilizar la figura 7.25.

a) Elegir las constantes de escala (τ) y de espaciado relativo (σ), de forma que el diseño sea óptimo.
b) Calcular el semiángulo en el vértice (α).
c) Calcular la longitud del dipolo más largo.
d) Calcular la longitud del dipolo más corto.
e) Obtener una expresión para el número de dipolos (N) en función de τ y del ancho de banda.
f) Dibujar la forma de interconectar los dipolos con el generador, indicando el balun que se va a utilizar.

$L_n = \tau\, L_{n-1}$
$R_n = \tau\, R_{n-1}$
$d_n = \tau\, d_{n-1}$



$L_1 = k_1\, \lambda_1$
$L_N = k_N\, \lambda_N$
k_1 = cte. de truncación a la frecuencia inferior
k_N = cte. de truncación a la frecuencia superior
$k_1 = 1{,}01 - 0{,}591\tau$, $k_N = 0{,}224$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

8
Métodos numéricos

8.1 Introducción

Los métodos de análisis y las técnicas de diseño de antenas que se han presentado en los capítulos anteriores son, en general, aproximaciones que proporcionan resultados aceptables para muchas aplicaciones prácticas. Sin embargo, es posible conocer con mayor exactitud las características de radiación mediante la realización de medidas experimentales (capítulo 9) o bien mediante la resolución numérica del problema electromagnético.

En este capítulo se presentan algunos de los métodos numéricos más utilizados en el análisis de antenas. El objetivo es la solución de las ecuaciones de Maxwell (u otras ecuaciones derivadas de ellas) con las condiciones de contorno impuestas por la geometría de la antena.

8.1.1 Planteamiento de la solución

La solución analítica del problema solamente es posible para algunas geometrías muy particulares, llamadas canónicas, en las que las condiciones de contorno se aplican a superficies con alguna coordenada constante en un sistema de coordenadas en el que la ecuación de onda sea separable. Además, el medio comprendido entre estas superficies debe ser homogéneo. Ejemplos típicos son las soluciones modales para guías de onda rectangulares o cilíndricas y la difracción de una onda incidente por objetos cilíndricos o esféricos.

Como las antenas en general no responden a este tipo de geometría, no es posible una solución analítica exacta y es necesario recurrir a la solución numérica del problema. Esta solución suele realizarse a través de los siguientes pasos:

1) *Formulación del problema electromagnético*: en general, se parte de las ecuaciones de Maxwell, de la ecuación de onda o de algunas ecuaciones integro-diferenciales derivadas de ellas.

2) *Discretización de la formulación matemática*: como el cálculo numérico mediante ordenador sólo puede procesar números y no funciones, es necesario discretizar en vectores numéricos todas las funciones y los resultados de aplicar los operadores integro-diferenciales sobre las funciones. Así, se transforma un sistema de ecuaciones funcionales en un sistema de ecuaciones algebraicas de dimensión finita, que puede resolverse mediante un ordenador.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3) *Discretización de las condiciones de contorno*: sólo es posible imponer exactamente las condiciones de contorno cuando la geometría del problema tiene formas canónicas. En general, es necesario discretizar la superficie (lo cual conduce al problema difícil del modelado geométrico de sólidos) y además imponer de forma aproximada las condiciones de contorno sobre el modelo. Para ello, es común utilizar alguno de los siguientes métodos:
   a) Imponer las condiciones de contorno (*CC*) exactamente en un conjunto finito de puntos $\vec{r}_m$ de la superficie del modelo:

$$CC(\vec{r}_m)_{calculado}\Big|_S = CC(\vec{r}_m)_{teórico}\Big|_S \quad m = 1\cdots M \tag{8.1}$$

   Este método se conoce con el nombre de *colocación* (*point-matching*).
   b) El método de mínimos cuadrados no impone la condición de contorno exactamente en ningún punto, sino que hace mínimo el error cuadrático medio

$$\left[\int_S \left|CC(\vec{r})_{calculado} - CC(\vec{r})_{teórico}\right|^2 ds\right]_{mínimo} \tag{8.2}$$

   La minimización directa del error puede llevarse a cabo, por ejemplo, mediante el método del gradiente conjugado.
   c) Otra opción es hacer nulo el error (o residuo) ponderado con unas ciertas funciones peso W_m:

$$\int_S \left(CC(\vec{r})_{calculado} - CC(\vec{r})_{teórico}\right)\cdot W_m(\vec{r})\,dS = 0 \quad m = 1\cdots M \tag{8.3}$$

   Este es el método de los residuos ponderados o de los *momentos*. Con la elección adecuada de las funciones peso, da lugar a los métodos de colocación o de mínimos cuadrados.

4) Finalmente, en los problemas abiertos de análisis de antenas (se busca la solución en el exterior de la superficie y no en el interior) es necesario asegurar que los campos obtenidos en la solución cumplan la condición de radiación de Sommerfeld. Esta condición impone a los campos que se propaguen desde la fuente hacia el exterior, y no a la inversa, y que se atenúen con la distancia de la forma adecuada, conservando la potencia total del frente de onda. Como es imposible discretizar todo el espacio hasta el infinito, deben utilizarse métodos indirectos basados en:
   a) Formulación de los campos radiados a través de la convolución de las corrientes con funciones de Green, las cuales cumplen la condición de radiación.
   b) Cerrar la parte del espacio discretizada, en la cual se resuelven las ecuaciones electromagnéticas, con una superficie que cumpla unas *condiciones de contorno de radiación o de absorción* especiales (denominadas con las siglas inglesas RBC o ABC respectivamente).
   c) Imponer a la solución que varíe de la misma forma que los campos radiados por unas ciertas corrientes arbitrarias existentes dentro del espacio discretizado. Este método se conoce con el nombre de *ecuación de invarianza ponderada* (MEI).

El error que aparece en la solución se debe, en primer lugar, a las aproximaciones realizadas en los cuatro pasos anteriores:

- Aproximaciones en la formulación matemática del problema.
- Las funciones y operadores se discretizan con un número finito de componentes numéricas, cuando son elementos de un espacio vectorial de Hilbert de infinitas dimensiones. Esto implica que se trabaja con proyecciones en un subespacio de dimensión finita.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

- El modelo geométrico y la discretización de la superficie no se ajustan exactamente al objeto real.
- Errores al imponer las condiciones de contorno de forma aproximada.
- Las condiciones de contorno de radiación, en general, sólo son aproximaciones a la condición de radiación de Sommerfeld.

Además, aparecen nuevas causas de error debidas a la implementación en el ordenador como, por ejemplo, los errores de truncamiento al representar los números reales con una longitud de palabra finita. Este tipo de errores puede ser muy problemático cuando se utilizan métodos iterativos o cuando el sistema de ecuaciones para resolver está mal condicionado, es decir, cuando hay que invertir una matriz cuyo determinante es muy próximo a cero, lo cual requiere una precisión muy elevada en la representación de los números reales.

8.1.2 Clasificación de los métodos numéricos

Los métodos numéricos suelen clasificarse en función de las ecuaciones electromagnéticas que resuelven. Según el dominio en que se trabaje, pueden distinguirse dos familias de métodos:

a) *Métodos en el dominio del tiempo (TD)*: utilizan la formulación temporal del problema electromagnético.
b) *Métodos en el dominio de la frecuencia (FD)*: utilizan la formulación en régimen permanente senoidal.

Según el tipo de ecuaciones electromagnéticas pueden ser:

a) *Métodos diferenciales (FD)*: discretizan directamente las ecuaciones de Maxwell o la ecuación de onda, representando las derivadas mediante la aproximación de diferencias finitas. Esta discretización de las derivadas y de las funciones conduce directamente a un sistema de ecuaciones algebraicas que, en muchos casos, tiene solución trivial al requerir la inversión de matrices diagonales. Para asegurar que se cumple la condición de radiación de Sommerfeld en problemas abiertos, requieren imponer, necesariamente, bien condiciones de contorno de radiación, bien la ecuación de invarianza ponderada.
   Según el dominio en que se trabaje reciben los nombres de *diferencias finitas en el dominio del tiempo* (FDTD) o de *diferencias finitas en el dominio de la frecuencia* (FDFD).
b) *Métodos integrales*: se basan en la aplicación del teorema de equivalencia para el cálculo del campo en el exterior o en el interior del objeto mediante la integral de radiación de las corrientes equivalentes y en la imposición de las condiciones de contorno al campo resultante. Cuando alguna de las superficies del problema presenta geometría canónica, puede utilizarse en la integral de radiación una función de Green que cumpla las condiciones de contorno canónicas. Esto asegura que la solución cumpla también estas condiciones de contorno canónicas y la condición de radiación y, por tanto, sólo es necesario discretizar e imponer la condición de contorno numéricamente a las demás superficies.
   Según qué técnica se utilice para imponer numéricamente las condiciones de contorno, puede distinguirse entre métodos de residuos ponderados o momentos (MM) y métodos de gradiente conjugado (CG)[1].

[1] Aunque el método de los momentos y el del gradiente conjugado parten de principios distintos, en la práctica su discretización genera el mismo sistema de ecuaciones. Sin embargo, la resolución de dicho sistema por ambos métodos puede presentar en algunos casos ciertas diferencias numéricas.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

c) *Métodos variacionales*: se basan en la definición de un funcional estacionario, es decir, una cantidad escalar función de los campos eléctrico o magnético que presenta un máximo o mínimo cuando los campos son precisamente la solución del problema. Un ejemplo típico es imponer que la energía total del sistema sea mínima. El funcional se transforma en un sistema de ecuaciones discretizando los campos y haciendo cero la derivada del funcional respecto a los parámetros de las incógnitas. En la mayoría de los casos los métodos variacionales también requieren la imposición explícita de la condición de radiación.
   Por razones históricas, existen diferentes denominaciones para los métodos variacionales utilizados en electromagnetismo. La formulación más antigua se conoce como el método de Rayleigh-Ritz y empleaba una discretización muy simple de la solución. Actualmente se utiliza un método de discretización muy potente que aproxima simultáneamente la solución y la geometría mediante polinomios de interpolación. Es el *método de los elementos finitos* (FEM)[2].
d) *Métodos de alta frecuencia*: el coste computacional (cantidad de memoria y tiempo de proceso) requerido por los métodos numéricos anteriores para el análisis de una antena aumenta enormemente con la frecuencia de trabajo. Esto impone un límite superior al tamaño eléctrico de las antenas que es posible analizar con la tecnología informática disponible.
   Por ello, se han desarrollado aproximaciones válidas en la región de alta frecuencia que permiten el análisis de antenas y de estructuras de tamaño eléctrico grande, como, por ejemplo, reflectores o antenas embarcadas.

Los métodos numéricos más utilizados hasta la fecha para el análisis de antenas son los métodos integrales en el dominio de la frecuencia, por incluir implícitamente la condición de radiación en la función de Green y por la mayor estabilidad numérica en la discretización de las integrales frente a la de las derivadas. Sin embargo, la situación podría cambiar en el futuro debido a la reciente aparición del método de la ecuación de invarianza ponderada, que en problemas abiertos evita la necesidad de imponer condiciones de radiación a las formulaciones diferenciales o variacionales. Sin embargo, en este texto se van a presentar en detalle únicamente los métodos integrales y los de alta frecuencia.

8.2 Métodos integrales

Como se ha indicado anteriormente, la aplicación de los métodos integrales se basa en el cálculo de los campos radiados por las corrientes que fluyen en el interior o sobre la superficie del objeto y en la imposición de las condiciones de contorno a los campos resultantes. Estas corrientes son desconocidas y constituyen, en general, la incógnita del problema.

Para el cálculo de las integrales de radiación de las corrientes debe emplearse una función de Green (o respuesta del sistema a una fuente de corriente puntual) que tenga en cuenta la presencia del objeto. Como en general esto es muy complicado, no se analiza el problema original, sino uno

[2] La denominación de método de los elementos finitos se aplica en ocasiones a todos los métodos variacionales. En este texto se ha preferido reservar la denominación de elementos finitos para un cierto tipo de discretización de las funciones y la geometría, que puede emplearse tanto con métodos variacionales como con métodos integrales. En el primer caso suele denominarse *método de los elementos finitos* (FEM), mientras que en el segundo *método de los elementos de contorno* (BEM). Debe notarse que algunos autores generalizan la denominación de método de los elementos finitos a todos los métodos numéricos, del cual son considerados casos particulares.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

equivalente en el que las corrientes reales que radian en presencia del objeto se sustituyen por corrientes equivalentes que radian el mismo campo, pero en el espacio libre.

En esta sección se va a estudiar la aplicación del teorema de equivalencia, la formulación de las ecuaciones integrales, la discretización de las mismas mediante los métodos de los momentos y del gradiente conjugado y, finalmente, la discretización de la geometría del objeto.

8.2.1 Aplicación del teorema de equivalencia

El teorema de equivalencia permite formular un problema equivalente al problema original, en el que unas corrientes equivalentes (no reales) radian en el espacio libre el mismo campo que existe en el problema real. Ello permite utilizar en las integrales de radiación las funciones de Green del espacio libre, con lo que se simplifican enormemente los cálculos. Cuando existen condiciones de contorno canónicas, en lugar de la función de Green del espacio libre puede utilizarse la radiación de una fuente puntual en presencia de estas condiciones de contorno. De esta forma se asegura que los campos obtenidos cumplirán las condiciones de contorno canónicas sin necesidad de imponerlas explícitamente.

Equivalencia volumétrica

La versión volumétrica del teorema de equivalencia sustituye el objeto del problema original por un conjunto de fuentes equivalentes definidas en el interior del mismo. La figura 8.1 muestra el problema original y el problema equivalente volumétrico.

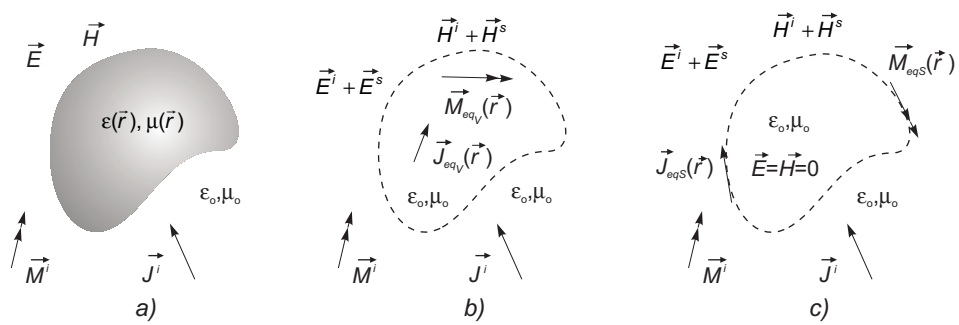


Fig. 8.1 Teorema de equivalencia: a) problema original, b) problema equivalente volumétrico y c) problema equivalente superficial

La formulación del problema equivalente volumétrico se obtiene sustituyendo en las ecuaciones de Maxwell el medio original por el espacio libre y añadiendo unas corrientes equivalentes que compensen el cambio de medio,

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{E} &= -\vec{M}^i - j\omega\mu(\vec{r})\vec{H} = -\vec{M}^i - j\omega\mu_0\vec{H} - \vec{M}_{eqV} \\ \nabla\times\vec{H} &= \vec{J}^i + j\omega\varepsilon(\vec{r})\vec{E} = \vec{J}^i + j\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{J}_{eqV} \end{aligned} \tag{8.4}$$

donde, para satisfacer la igualdad, las corrientes equivalentes volumétricas son

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{M}_{eqV} = j\omega\left(\mu(\vec{r})-\mu_0\right)\vec{H} \quad , \quad \vec{J}_{eqV} = j\omega\left(\varepsilon(\vec{r})-\varepsilon_0\right)\vec{E} \tag{8.5}$$

Como en el problema equivalente existen dos conjuntos de fuentes, pueden separarse los campos $\vec{E}, \vec{H}$ en sus componentes incidente $\vec{E}^i$, $\vec{H}^i$ y dispersada $\vec{E}^s$, $\vec{H}^s$ debidas, respectivamente, a las fuentes originales y a las fuentes equivalentes, radiando ambas en el espacio libre en lugar de en presencia del objeto,

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{E}^i &= -\vec{M}^i - j\omega\mu_0\vec{H}^i \qquad \nabla\times\vec{E}^s = -\vec{M}_{eqV} - j\omega\mu_0\vec{H}^s \\ \nabla\times\vec{H}^i &= \vec{J}^i + j\omega\varepsilon_0\vec{E}^i \qquad \nabla\times\vec{H}^s = \vec{J}_{eqV} + j\omega\varepsilon_0\vec{E}^s \end{aligned} \tag{8.6}$$

Los campos dispersados $\vec{E}^s = \vec{E} - \vec{E}^i$ y $\vec{H}^s = \vec{H} - \vec{H}^i$ pueden calcularse a través de la radiación de las fuentes equivalentes $\vec{J}_{eqV}$ y $\vec{M}_{eqV}$ en el espacio libre

$$\vec{E}^s = L_E\left(\vec{J}_{eqV}, \vec{M}_{eqV}\right) \quad , \quad \vec{H}^s = L_H\left(\vec{J}_{eqV}, \vec{M}_{eqV}\right) \tag{8.7}$$

donde L_E y L_H son operadores lineales basados en la convolución de las corrientes con la función de Green (3.30, 3.32 y Anexo A), cuya forma obtendremos posteriormente.

Las corrientes equivalentes constituyen la incógnita del problema y deben cumplir la ecuación (8.5)

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}_{eqV}}{j\omega\left(\varepsilon(\vec{r})-\varepsilon_0\right)} \quad , \quad \vec{H} = \frac{\vec{M}_{eqV}}{j\omega\left(\mu(\vec{r})-\mu_0\right)} \tag{8.8}$$

Calculando los campos $\vec{E}^s$ y $\vec{H}^s$ a partir de la radiación de las fuentes equivalentes (8.7) e imponiendo la condición (8.8) queda el sistema de ecuaciones funcionales, definidas en todo el volumen,

$$\begin{aligned} \frac{\vec{J}_{eqV}}{j\omega\left(\varepsilon(\vec{r})-\varepsilon_0\right)} - \vec{E}^i &= L_E\left(\vec{J}_{eqV}, \vec{M}_{eqV}\right) \\ \frac{\vec{M}_{eqV}}{j\omega\left(\mu(\vec{r})-\mu_0\right)} - \vec{H}^i &= L_H\left(\vec{J}_{eqV}, \vec{M}_{eqV}\right) \end{aligned} \tag{8.9}$$

La resolución de este sistema permite obtener el valor de las incógnitas $\vec{J}_{eqV}$ y $\vec{M}_{eqV}$. Habitualmente $\mu(\vec{r}) = \mu_0$ y $\vec{M}_{eqV} = 0$, con lo que sólo es necesario resolver la ecuación de $\vec{E}^i$ con la incógnita $\vec{J}_{eqV}$.

Equivalencia superficial

Cuando el objeto esta formado por un medio homogéneo a trozos, puede utilizarse una formulación del teorema de equivalencia en la que las corrientes equivalentes se definen únicamente sobre las superficies de separación entre las regiones homogéneas del medio; esta versión del teorema ya se ha presentado en el capítulo 3. En la figura 8.1c se muestra el problema equivalente superficial.

Ahora puede calcularse el campo dispersado, mediante la ecuación (8.7), con fuentes equivalentes superficiales radiando en el espacio libre

$$\vec{E}^s = L_E\left(\vec{J}_{eqS}, \vec{M}_{eqS}\right) \quad , \quad \vec{H}^s = L_H\left(\vec{J}_{eqS}, \vec{M}_{eqS}\right) \tag{8.10}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En el problema equivalente, el campo total debe cumplir las condiciones de contorno en las superficies en las que existen corrientes equivalentes

$$\begin{aligned}\vec{J}_{eqS} &= \hat{n}\times\vec{H} = \hat{n}\times\left(\vec{H}^s+\vec{H}^i\right) = \hat{n}\times L_H\left(\vec{J}_{eqS},\vec{M}_{eqS}\right)+\hat{n}\times\vec{H}^i \\ \vec{M}_{eqS} &= -\hat{n}\times\vec{E} = -\hat{n}\times\left(\vec{E}^s+\vec{E}^i\right) = -\hat{n}\times L_E\left(\vec{J}_{eqS},\vec{M}_{eqS}\right)-\hat{n}\times\vec{E}^i\end{aligned} \tag{8.11}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones funcionales permite obtener el valor de las incógnitas $\vec{J}_{eqS}$, $\vec{M}_{eqS}$. En el caso particular de superficies perfectamente conductoras (PEC), $\vec{M}_{eqS} = -\hat{n}\times\vec{E} = 0$ y basta resolver una de las dos ecuaciones con la incógnita $\vec{J}_{eqS}$.

Aplicación al análisis de antenas con conductores y dieléctricos

Algunas antenas están constituidas por regiones dieléctricas y conductoras. En estos casos se aplica la equivalencia superficial a las superficies conductoras, la equivalencia volumétrica a las regiones dieléctricas heterogéneas y cualquiera de las dos a las porciones dieléctricas homogéneas. En la situación más habitual, en que únicamente existan regiones dieléctricas homogéneas (Fig. 8.2a), puede realizarse bien una formulación mixta de equivalencia volumétrica y superficial (Fig. 8.2b) o bien una formulación únicamente superficial (Fig. 8.2c).

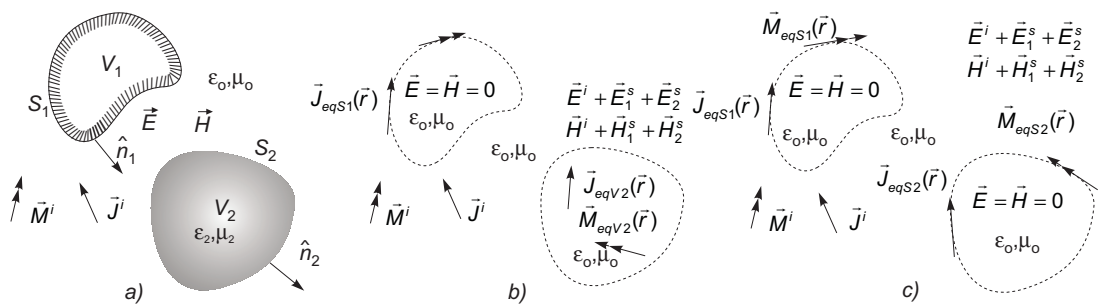


Fig. 8.2 Teorema de equivalencia: a) problema original, b) problema equivalente volumétrico-superficial y c) problema equivalente superficial-superficial

En ambos casos tenemos que resolver una de las dos ecuaciones definidas sobre la superficie conductora S_1

$$\begin{aligned}\vec{M}_{eqS_1} &= 0 = -\hat{n}\times\left[\vec{E}^i + L_E\left(\vec{J}_{eqS_1}\right)+L_E\left(\vec{J}_{eq_2},\vec{M}_{eq_2}\right)\right] \\ \vec{J}_{eqS_1} &= \hat{n}\times\left[\vec{H}^i + L_H\left(\vec{J}_{eqS_1}\right)+L_H\left(\vec{J}_{eq_2},\vec{M}_{eq_2}\right)\right]\end{aligned} \tag{8.12}$$

Además, en el primer caso hay que resolver las ecuaciones funcionales definidas en el interior de la región dieléctrica V_2

$$\frac{\vec{J}_{eqV_2}}{j\omega\left(\varepsilon\left(\vec{r}\right)-\varepsilon_0\right)} = \vec{E}^i + L_E\left(\vec{J}_{eqV_2},\vec{M}_{eqV_2}\right)+L_E\left(\vec{J}_{eqS_1}\right) \tag{8.13a}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\frac{\vec{M}_{eq\,V_2}}{j\,\omega\left(\mu\left(\vec{r}\right)-\mu_0\right)} = \vec{H}^i + L_H\left(\vec{J}_{eq\,V_2}, \vec{M}_{eq\,V_2}\right) + L_H\left(\vec{J}_{eq\,S_1}\right) \tag{8.13b}$$

y las incógnitas que queremos calcular son $\vec{J}_{eq\,S_1}$, definida sobre S_1, $\vec{J}_{eq\,V_2}$ y $\vec{M}_{eq\,V_2}$, definidas en el interior de V_2.

En el segundo caso (formulación superficial-superficial), se sustituyen las ecuaciones volumétricas (8.13) por las correspondientes a la superficie dieléctrica S_2

$$\begin{aligned} \vec{M}_{eq\,S_2} &= -\hat{n}\times\left[\vec{E}^i + L_E\left(\vec{J}_{eq\,S_1}\right) + L_E\left(\vec{J}_{eq\,S_2}, \vec{M}_{eq\,S_2}\right)\right] \\ \vec{J}_{eq\,S_2} &= \hat{n}\times\left[\vec{H}^i + L_H\left(\vec{J}_{eq\,S_1}\right) + L_H\left(\vec{J}_{eq\,S_2}, \vec{M}_{eq\,S_2}\right)\right] \end{aligned} \tag{8.14}$$

La formulación anterior se refiere al campo total en el exterior de V_1 y de V_2. El campo asociado a las ecuaciones (8.12) y (8.14) en el interior de V_1 y de V_2 es nulo, por hipótesis del teorema de equivalencia superficial. En el problema original, los campos en el interior de V_1 son realmente nulos, suponiendo que se trata de un conductor perfecto. Sin embargo, en el interior de V_2 los campos no son nulos, y pueden calcularse a través de la formulación del teorema de equivalencia superficial con las componentes tangenciales de los campos en la cara interior de la superficie

$$\vec{J}_{eq\,S_2^-} = -\hat{n}\times\vec{H}\big|_{S_2^-} = -\vec{J}_{eq\,S_2^+}, \qquad \vec{M}_{eq\,S_2^-} = \hat{n}\times\vec{E}\big|_{S_2^-} = -\vec{M}_{eq\,S_2^+} \tag{8.15}$$

donde los superíndices + y - se refieren respectivamente a las caras exterior e interior de S_2. Las corrientes equivalentes del problema interno son iguales a las del externo cambiadas de signo, debido a la continuidad de las componentes tangenciales de campo en la interfase. El cambio de signo se debe a que el vector normal a la superficie $\hat{n}$ apunta hacia el exterior, en sentido contrario a la región donde se calcula el campo. El campo radiado por estas corrientes equivalentes en el interior de V_2 es igual al campo total del problema original, suponiendo que no existen fuentes reales $\vec{J}^i$, $\vec{M}^i$ en el interior de V_2. Para resolver el problema debe replantearse el sistema de ecuaciones utilizando una de las ecuaciones del medio exterior (8.14) y una de las siguientes, correspondientes al medio interior

$$\vec{M}_{eq\,S_2^-} = \hat{n}\times L_E\left(\vec{J}_{eq\,S_2^-}, \vec{M}_{eq\,S_2^-}\right), \quad \vec{J}_{eq\,S_2^-} = -\hat{n}\times L_H\left(\vec{J}_{eq\,S_2^-}, \vec{M}_{eq\,S_2^-}\right) \tag{8.16}$$

Ahora tenemos cuatro ecuaciones definidas sobre S_2: el par (8.14) en la cara exterior de la superficie y el par (8.16) en la cara interior. Los operadores L_E y L_H de las ecuaciones (8.14) corresponden a la radiación de las corrientes en el medio externo, definido por ε_0, μ_0, mientras que los de las ecuaciones (8.16) corresponden al medio interno ε_2, μ_2.

Como solamente hay dos incógnitas, $\vec{J}_{eqS_2^-}$ y $\vec{M}_{eqS_2^-}$, es suficiente con resolver un sistema formado por dos de las ecuaciones anteriores. Las elecciones más habituales son: bien las dos del campo eléctrico, una en cada cara de la superficie, o bien las dos del campo magnético, una en cada cara de la superficie. Nótese que debe incluirse información relativa a las dos caras de la superficie: un sistema formado por dos ecuaciones correspondientes a la misma cara no contiene información del dieléctrico situado en la otra cara y, por tanto, no permite resolver el problema.

Cuando existen varias superficies de separación entre regiones dieléctricas homogéneas y/o conductoras, debe plantearse un sistema formado por un par de ecuaciones para cada interfase entre dieléctricos, según se ha descrito en el párrafo anterior, y una de las dos ecuaciones (8.12) correspondientes a cada interfase dieléctrico-conductor.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Aplicación a la radiación de antenas conductoras

Cuando una antena perfectamente conductora es excitada por unas fuentes $\vec{J}^i$, $\vec{M}^i$ se inducen unas corrientes $\vec{J}_s$ sobre la superficie conductora que cumplen la condición de contorno $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}\Big|_s$. Sin embargo, las corrientes inducidas sobre la superficie de un conductor perfecto no radian, y los campos radiados son originados por la radiación de la excitación $\vec{J}^i$, $\vec{M}^i$ en presencia de la antena. En la figura 8.3a se muestran dos ejemplos: una boca de guía y un monopolo sobre plano de masa finito.

Al aplicar el teorema de equivalencia (Fig. 8.3b) el valor de la corriente equivalente eléctrica coincide numéricamente con la corriente inducida sobre la superficie de la antena en el problema real, $\vec{J}_{eqS} = \vec{J}_s$. Es por este motivo por el que en los capítulos anteriores se ha calculado el campo radiado por la corriente real en el espacio libre, a pesar de que se encuentra originariamente en presencia de la antena.

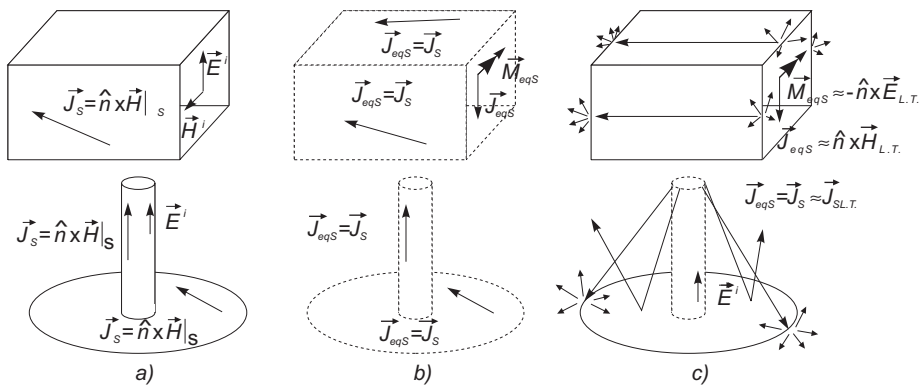


Fig. 8.3 Análisis de la radiación de antenas conductoras: a) problema original, b) problema equivalente exacto y c) problema equivalente aproximado

Para resolver el problema con métodos numéricos, basta plantear una de las dos ecuaciones del teorema de equivalencia superficial

$$\vec{M}_{eqS} = 0 = -\hat{n} \times \left[\vec{E}^i + L_E\left(\vec{J}_{eqS}\right)\right] \quad , \quad \vec{J}_{eqS} = \hat{n} \times \left[\vec{H}^i + L_H\left(\vec{J}_{eqS}\right)\right] \tag{8.17}$$

lo cual permite obtener el valor de las corrientes equivalentes $\vec{J}_{eqS}$ en toda la superficie.

Para plantear una solución aproximada sin necesidad de cálculo numérico, se sustituyen las corrientes equivalentes, que en principio son desconocidas, por una aproximación (por ejemplo, las del modelo de línea de transmisión) en aquellas superficies en que sea posible (apertura de la boca de guía y superficie del monopolo en la figura 8.3). Como no se conocen las corrientes equivalentes sobre las demás superficies, se coloca tras ellas un conductor eléctrico para que estas fuentes equivalentes desconocidas no radien (Fig. 8.3c), tal como se hizo en el capítulo 6 para aperturas en un plano conductor.

Sin embargo, ahora es necesario calcular la radiación de unas fuentes equivalentes conocidas en presencia de la porción de la estructura conductora que no ha podido ser eliminada. Una primera aproximación consiste en despreciar la difracción de los campos radiados y calcular la radiación de las corrientes equivalentes en el espacio libre. Esto es lo que se realizó en el capítulo 6 al analizar la radiación de aperturas y lentes.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Una segunda aproximación consiste en aproximar las superficies conductoras reales (plano conductor finito del monopolo) por otras similares que puedan ser analizadas fácilmente (plano conductor infinito y teoría de imágenes).

Finalmente, puede estudiarse la difracción en la estructura conductora a través de aproximaciones de alta frecuencia, las cuales permiten calcular el diagrama de radiación de una superficie finita, una arista u otro tipo de discontinuidad si se conoce el campo que incide sobre ellas, tal como se representa en la figura 8.3c. Este campo incidente puede aproximarse por el campo radiado por las corrientes equivalentes conocidas. Esta técnica es la que se utilizó en el capítulo 6 para el análisis de antenas de reflector.

Aplicación a difracción

En algunos casos el problema no consiste en analizar la radiación de una antena excitada por unas fuentes $\vec{J}^i$, $\vec{M}^i$, sino en estudiar la difracción de una estructura pasiva sobre la que inciden unos ciertos campos $\vec{E}^i, \vec{H}^i$. Un ejemplo típico es el cálculo de la sección recta radar de un avión o de un barco.

Para resolver el problema se aplica la misma formulación del teorema de equivalencia que para el análisis de antenas (ecuaciones (8.9) a (8.15)) donde las fuentes $\vec{J}^i$ y $\vec{M}^i$ ahora son desconocidas, pero se conocen los campos incidentes $\vec{E}^i$ y $\vec{H}^i$, que son los radiados por estas fuentes en el espacio libre.

8.2.2 Formulación de las ecuaciones integrales

Para expresar los operadores lineales L_E, L_H del campo radiado por las corrientes equivalentes existen varias formulaciones posibles. Partiendo de las expresiones de los campos en función de los potenciales escalar y vector (3.17), (3.18), (3.71) y (3.72), resulta

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\vec{F} \quad , \quad \vec{H} = -j\omega\vec{F} - \nabla\Psi + \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} \tag{8.18}$$

y reemplazando los potenciales por la convolución de la función de Green con cargas y corrientes, (3.28), (3.29), (3.76), y (A.25)-(A.27), se tiene

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -j\omega\mu\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\vec{J}(\vec{r}')\,d\vec{r}' - \nabla\left[\frac{1}{\varepsilon}\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')\,d\vec{r}'\right] - \nabla\times\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\vec{M}(\vec{r}')\,d\vec{r}' \\
\vec{H} &= -j\omega\varepsilon\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\vec{M}(\vec{r}')\,d\vec{r}' - \nabla\left[\frac{1}{\mu}\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\tau(\vec{r}')\,d\vec{r}'\right] + \nabla\times\int G(\vec{r},\vec{r}')\,\vec{J}(\vec{r}')\,d\vec{r}'
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Los operadores lineales L_E, L_H pueden obtenerse de las ecuaciones anteriores sustituyendo la densidad de carga por la divergencia de la corriente, según la ecuación de continuidad $\nabla'\cdot\vec{J} + j\omega\rho = 0$ y su dual magnética. Una expresión alternativa se obtiene sustituyendo los potenciales escalares en (8.18) por los vectoriales, empleando la condición de Lorentz, $j\omega\mu\varepsilon\,\Phi + \nabla\cdot\vec{A} = 0$, y su dual,

$$\begin{aligned}
j\omega\mu\varepsilon\,\vec{E} &= \left(k^2 + \nabla\nabla\cdot\right)\vec{A} - j\omega\mu\,\nabla\times\vec{F} \\
j\omega\mu\varepsilon\,\vec{H} &= \left(k^2 + \nabla\nabla\cdot\right)\vec{F} + j\omega\varepsilon\,\nabla\times\vec{A}
\end{aligned} \tag{8.20}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y, en función de las corrientes, obtenemos los operadores lineales L_E, L_H

$$\begin{aligned} j\omega\mu\varepsilon\vec{E} &= \left(k^2+\nabla\nabla\cdot\right)\mu\int G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')d\vec{r}' - j\omega\mu\varepsilon\nabla\times\int G(\vec{r},\vec{r}')\vec{M}(\vec{r}')d\vec{r}' \\ j\omega\mu\varepsilon\vec{H} &= \left(k^2+\nabla\nabla\cdot\right)\varepsilon\int G(\vec{r},\vec{r}')\vec{M}(\vec{r}')d\vec{r}' + j\omega\mu\varepsilon\nabla\times\int G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')d\vec{r}' \end{aligned} \tag{8.21}$$

Si se intercambia el orden de los operadores integral y ∇ en (8.19), teniendo en cuenta que $\nabla(G\rho) = -\rho\nabla' G$ y $\nabla\times(G\vec{M}) = \vec{M}\times\nabla' G$, donde $\nabla' G$ es el gradiente de la función de Green respecto a las coordenadas de fuente $\vec{r}'$, resulta

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega\mu\int G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')d\vec{r}' + \frac{1}{\varepsilon}\int\rho(\vec{r}')\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')d\vec{r}' - \int\vec{M}(\vec{r}')\times\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')d\vec{r}' \\ \vec{H} &= -j\omega\varepsilon\int G(\vec{r},\vec{r}')\vec{M}(\vec{r}')d\vec{r}' + \frac{1}{\mu}\int\tau(\vec{r}')\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')d\vec{r}' + \int\vec{J}(\vec{r}')\times\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')d\vec{r}' \end{aligned} \tag{8.22}$$

Según el teorema de equivalencia superficial, los campos en una región V del espacio libre (Fig. 8.4), cerrada por una superficie, son los originados por las fuentes en el interior de dicho volumen más los radiados por las corrientes equivalentes en la superficie que envuelve el volumen. Si consideramos un problema exterior o abierto, la superficie del teorema de equivalencia es la superficie S de la figura 8.4 más la superficie del infinito s_∞. Según la condición de radiación de Sommerfeld los campos en el infinito son nulos, por lo que también lo son las corrientes equivalentes en s_∞ y basta tener en cuenta únicamente la contribución de la superficie S más las fuentes en el volumen V

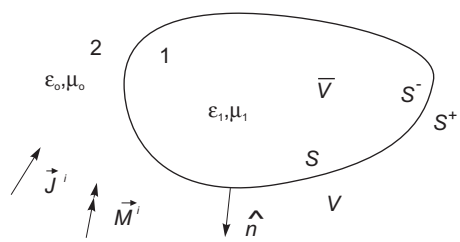


Fig. 8.4 Región exterior V limitada por la superficie S y por el infinito

$$\begin{aligned} &\int_V\left[-j\omega\mu\vec{J}G - \vec{M}\times\nabla' G + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla' G\right]dv' + \\ &+\int_S\left[-j\omega\mu\left(\hat{n}\times\vec{H}\right)G + \left(\hat{n}\times\vec{E}\right)\times\nabla' G + \left(\hat{n}\cdot\vec{E}\right)\nabla' G\right]ds' = \begin{cases}\vec{E} & \text{en } \vec{r}\in V\\ 0 & \text{en } \vec{r}\in\overline{V}\end{cases} \end{aligned} \tag{8.23}$$

$$\begin{aligned} &\int_V\left[-j\omega\varepsilon\vec{M}G + \vec{J}\times\nabla' G + \frac{\tau}{\mu}\nabla' G\right]dv' + \\ &+\int_S\left[j\omega\varepsilon\left(\hat{n}\times\vec{E}\right)G + \left(\hat{n}\times\vec{H}\right)\times\nabla' G + \left(\hat{n}\cdot\vec{H}\right)\nabla' G\right]ds' = \begin{cases}\vec{H} & \text{en } \vec{r}\in V\\ 0 & \text{en } \vec{r}\in\overline{V}\end{cases} \end{aligned} \tag{8.24}$$

Estas expresiones reciben el nombre de ecuaciones de Stratton-Chu.

Al aplicar el teorema de equivalencia a problemas de antenas, el campo incidente que excita la antena es el radiado por las fuentes en el interior del volumen V

$$\int_V\left(-j\omega\mu\vec{J}G - \vec{M}\times\nabla' G + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla' G\right)dv' = \vec{E}^i\,,\quad \int_V\left(-j\omega\varepsilon\vec{M}G + \vec{J}\times\nabla' G + \frac{\tau}{\mu}\nabla' G\right)dv' = \vec{H}^i \tag{8.25}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

y, recordando que la definición de campo dispersado es $\vec{E}^s = \vec{E} - \vec{E}^i$ en $\vec{r} \in V$ tenemos

$$\vec{E}^S = L_E\left(\vec{J}_{eq}, \vec{M}_{eq}\right) = \int_S \left[-j\,\omega\,\mu\,\vec{J}_{eq}\,G - \vec{M}_{eq}\times\nabla' G - \frac{\nabla'\cdot\vec{J}_{eq}}{j\,\omega\,\varepsilon}\nabla' G\right] ds'$$
$$\vec{H}^S = L_H\left(\vec{J}_{eq}, \vec{M}_{eq}\right) = \int_S \left[-j\,\omega\,\varepsilon\,\vec{M}_{eq}\,G + \vec{J}_{eq}\times\nabla' G - \frac{\nabla'\cdot\vec{M}_{eq}}{j\,\omega\,\mu}\nabla' G\right] ds' \qquad (8.26)$$

que constituyen las expresiones más habituales de los operadores lineales L_E, L_H.

Aplicación de las condiciones de contorno

Para aplicar las condiciones de contorno sobre la superficie S, es necesario evaluar las integrales de radiación de las corrientes equivalentes (8.26) para $\vec{r} \in S$. Cuando el punto de fuentes (variable de integración) es igual al punto de campo, $\vec{r}\,' = \vec{r}$, la función de Green y su gradiente se hacen infinitos y la integral es impropia. El valor de la integral se descompone en la contribución de la singularidad y el valor principal de Cauchy, que excluye la singularidad y coincide con el resultado de los métodos de integración numérica

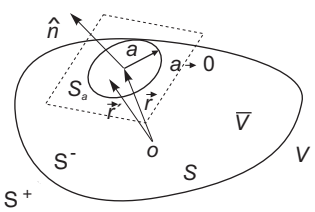


Fig. 8.5 Integración de la singularidad en la superficie S_a

$$\int_S ds = \lim_{a\to 0}\int_{S_a} ds + \int_{S}^{vp} ds \qquad (8.27)$$

donde S_a es un círculo de radio $a \to 0$ definido sobre el plano tangente a la superficie en el punto $\vec{r}$ (Fig. 8.5).

El valor de las integrales de la función de Green y su gradiente en la singularidad son conocidos, y valen

$$\lim_{a\to 0}\int_{S_a} G\,ds = 0 \quad , \quad \lim_{a\to 0}\int_{S_a^{\pm}} \nabla' G\,ds = \begin{cases} \dfrac{-\Omega_0}{4\pi}\hat{n} & \text{en } S_a^- \\ \left(1 - \dfrac{\Omega_0}{4\pi}\right)\hat{n} & \text{en } S_a^+ \end{cases} \qquad (8.28)$$

donde los superíndices + y - representan, respectivamente, las situaciones en las que el vector de campo $\vec{r}$ se encuentra en las caras exterior o interior de la superficie S. Ω_0 es el ángulo sólido cubierto por el exterior de la superficie en el punto $\vec{r}$. Si la superficie no presenta una discontinuidad (arista, vértice, etc.) en $\vec{r}$, tenemos $\Omega_0 = 2\pi$.

Para la implementación numérica de la ecuación (8.26) interesa expresar el operador lineal en función del valor principal de Cauchy de la integral mediante las expresiones (8.27) y (8.28). Sumando el campo incidente con el campo dispersado calculado numéricamente, el campo total es

$$\vec{E}^i + \underset{vp}{L_E}\left(\vec{J}_{eq}, \vec{M}_{eq}\right) = \begin{cases} \vec{E} & \text{si } \vec{r} \in V \text{ (exterior)} \\ \dfrac{\Omega_0}{4\pi}\vec{E} & \text{si } \vec{r} \in S \text{ (superficie)} \\ 0 & \text{si } \vec{r} \in \overline{V} \text{ (interior)} \end{cases} \qquad (8.29)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{H}^i + \underset{vp}{L_H}\left(\vec{J}_{eq}\,,\,\vec{M}_{eq}\right) = \begin{cases} \vec{H} & \text{si } \vec{r} \in V \ \text{(exterior)} \\ \dfrac{\Omega_0}{4\pi}\vec{H} & \text{si } \vec{r} \in S \ \text{(superficie)} \\ 0 & \text{si } \vec{r} \in \overline{V} \ \text{(interior)} \end{cases} \tag{8.30}$$

Aplicando las condiciones de contorno $-\vec{n}\times\vec{E}\big|_S = \vec{M}_{eqS}$, $\vec{n}\times\vec{H}\big|_S = \vec{J}_{eqS}$ en el caso habitual $\Omega_0 = 2\pi$ tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\vec{M}_{eqS} &= \hat{n}\times\vec{E}^i + \hat{n}\times\underset{vp}{L_E}\left(\vec{J}_{eq}\,,\,\vec{M}_{eq}\right) \qquad \text{EFIE} \\ \frac{1}{2}\vec{J}_{eqS} &= \hat{n}\times\vec{H}^i + \hat{n}\times\underset{vp}{L_H}\left(\vec{J}_{eq}\,,\,\vec{M}_{eq}\right) \qquad \text{MFIE} \end{aligned} \tag{8.31}$$

que se denominan ecuación integral del campo eléctrico (EFIE) y ecuación integral del campo magnético (MFIE) y constituyen las expresiones más utilizadas para la aplicación del teorema de equivalencia superficial en problemas de antenas.

Por derivarse del teorema de unicidad, estas ecuaciones son válidas en general para superficies S cerradas. Sin embargo, la EFIE puede aplicarse también a superficies perfectamente conductoras (PEC) abiertas. Para una superficie S_c PEC abierta, definimos una superficie cualquiera S cerrada que contiene a S_c (Fig. 8.6). Nótese que sobre las dos caras de S_c las componentes tangenciales del campo magnético son distintas y, por tanto, fluyen corrientes eléctricas $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$ distintas.

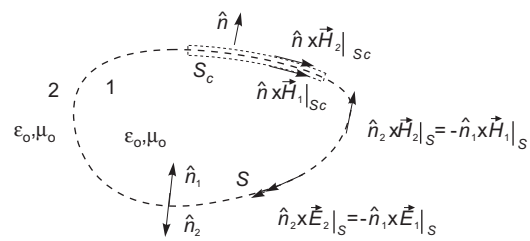


Fig. 8.6 Aplicación de la EFIE a una superficie perfectamente conductora abierta

Sumando la EFIE correspondiente a las dos caras de S y utilizando las ecuaciones (8.15) y (8.16) para las corrientes y el campo en la cara interior, tenemos

$$\frac{1}{2}\left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) = \hat{n}\times\vec{E}^i + \hat{n}\times\underset{vp}{L_E}\left(\vec{J}_1\,,\,\vec{M}_1\right) + \hat{n}\times\underset{vp}{L_E}\left(\vec{J}_2\,,\,\vec{M}_2\right) \tag{8.32}$$

Sobre la superficie S_c es $\vec{J}_1 \neq -\vec{J}_2$ y $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0$, por tratarse de un conductor eléctrico perfecto, mientras que sobre la parte de S no perteneciente a S_c es $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$, $\vec{J}_1 = -\vec{J}_2$ de forma que sólo S_c contribuye a la integral de superficie de (8.32)

$$\hat{n}\times\vec{E}^i + \hat{n}\times\underset{vp}{L_E}\left(\vec{J}_1 + \vec{J}_2\,,0\right) = 0 \qquad \text{en } S_c \tag{8.33}$$

En conclusión, la EFIE puede aplicarse sobre una superficie PEC abierta, teniendo en cuenta que la incógnita es ahora la suma de la corriente eléctrica a ambos lados de la superficie: $\vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Esto no se cumple en el caso de la MFIE, por lo que ésta sólo puede aplicarse a superficies cerradas.

La aplicación de las condiciones de contorno a las ecuaciones integrales de los potenciales (8.19) y (8.21) no presenta dificultades, pues las integrales contienen a la función de Green y no a su gradiente. Según (8.28), la integral de la singularidad de la función de Green es nula y la integral de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

superficie coincide con el valor principal de Cauchy. Por ejemplo, para la expresión (8.19), al aplicar las condiciones de contorno y la ecuación de continuidad se obtiene

$$\begin{aligned} -\vec{M}_{eq\,S} &= \hat{n}\times\left[\vec{E}^{\,i} - j\omega\mu\int_{vp} G\,\vec{J}_{eqS}\,ds' + \nabla\left[\frac{1}{j\omega\varepsilon}\int_{vp} G\,\nabla'\cdot\vec{J}_{eqS}\,ds'\right]\right] - \nabla\times\int_{vp} G\,\vec{M}_{eqS}\,ds' \\ \vec{J}_{eq\,S} &= \hat{n}\times\left[\vec{H}^{\,i} - j\omega\varepsilon\int_{vp} G\,\vec{M}_{eqS}\,ds' + \nabla\left[\frac{1}{j\omega\mu}\int_{vp} G\,\nabla'\cdot\vec{M}_{eqS}\,ds'\right] + \nabla\times\int_{vp} G\,\vec{J}_{eqS}\,ds'\right] \end{aligned} \tag{8.34}$$

la cual se conoce con el nombre de ecuación integral de los potenciales mixtos (MPIE). Una expresión análoga puede obtenerse a partir de la ecuación de los potenciales vectores (8.21).

Eliminación de resonancias en las ecuaciones integrales

Cuando se resuelve un problema electromagnético a una frecuencia que coincide con la de resonancia de la cavidad formada por el objeto analizado, deja de cumplirse el teorema de unicidad y aparecen infinitas soluciones que cumplen las condiciones de contorno: son los modos resonantes de la cavidad. Estas soluciones verifican las ecuaciones integrales homogéneas, es decir, existen soluciones sin excitación (campos incidentes nulos).

En este caso el sistema matricial resultante de discretizar las ecuaciones integrales es singular y no tiene solución única. A frecuencias muy próximas a la de resonancia el sistema de ecuaciones no es estrictamente singular, pero está muy mal condicionado (el determinante de la matriz a invertir es muy pequeño), por lo que es necesario realizar los cálculos con una precisión muy elevada para invertir correctamente la matriz. Como en la práctica esta precisión está limitada por la longitud de palabra con que el ordenador representa los números reales, la solución numérica aparece contaminada con una combinación lineal de soluciones homogéneas (modos resonantes) y puede presentar errores muy importantes.

Este problema puede solucionarse modificando las ecuaciones integrales para que no verifiquen las soluciones homogéneas a ninguna frecuencia. Si tenemos en cuenta que las frecuencias de resonancia de la EFIE y las de la MFIE son distintas, es evidente que una combinación lineal de ambas tendrá solución única a todas las frecuencias. Para una superficie PEC esta combinación lineal, evaluada en la cara interna de la superficie, es

$$\hat{n}\times\vec{H}^{\,i} + \hat{n}\times L_H\left(\vec{J}_{eqS}\right) + \frac{\alpha}{\eta}\left[\hat{n}\times\vec{E}^{\,i} + \hat{n}\times L_E\left(\vec{J}_{eqS}\right)\right] = 0 \qquad \vec{r}\in S^- \tag{8.35}$$

la cual se denomina ecuación integral de los campos combinados (CFIE). El parámetro α es un coeficiente de ponderación de los pesos relativos de la EFIE y la MFIE y se toma habitualmente $\alpha = 1$.

La CFIE también puede aplicarse a superficies PEC abiertas. En este caso, y a diferencia de la EFIE, debe distinguirse entre las corrientes eléctricas en las caras externa e interna de la superficie.

Otras soluciones al problema de las resonancias se basan en imponer condiciones adicionales: en la ecuación del campo magnético de la superficie dual (DMFIE) se impone que el campo magnético sea nulo en el interior del objeto y en la ecuación ampliada del campo magnético (AMFIE) se impone que la componente normal del campo magnético sea nula en la superficie.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Ecuación de Pocklington

Para el análisis de antenas cilíndricas delgadas, como dipolos y monopolos (Fig. 8.7), pueden introducirse algunas simplificaciones. Si la antena es suficientemente delgada, $a << \lambda$, $a << H$, en el desarrollo de los campos y corrientes en modos cilíndricos domina el término de orden cero

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(ka) e^{jn\phi} \approx c_0 J_0(ka) \qquad ka << 1 \tag{8.36}$$

En este caso, campos y corrientes son independientes de ϕ y, en lugar de imponer las condiciones de contorno sobre toda la superficie, basta imponerlas sobre una recta generatriz del cilindro. En estas condiciones, la corriente y el campo eléctrico tangencial a la superficie solamente tienen componentes longitudinales

$$\vec{J}(z,\phi) = J_z(z)\hat{z} \qquad \vec{E}(\rho,\phi,z)\big|_S = E_z(z)\big|_S \hat{z} \tag{8.37}$$

Para una antena perfectamente conductora la ecuación del campo eléctrico en función de los potenciales (8.21) más la condición de contorno se simplifica a

$$-j\omega\varepsilon_0 E_z^i = \frac{1}{2\pi}\left[k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right]\int_{-H}^{H}\int_0^{2\pi} I(z')G(z-z',\phi-\phi')\,d\phi'\,dz' \tag{8.38}$$

donde $I(z') = 2\pi a J_z(z')$. El valor de la función de Green para una línea definida por $\phi = 0$ es

$$G = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}, \qquad \underset{\substack{\phi=0\\ \rho=a}}{R} = \sqrt{4a^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\phi'}{2} + (z-z')^2} \tag{8.39}$$

La ecuación (8.38), con la función de Green (8.39), se denomina ecuación íntegro-diferencial de Pocklington. Cuando la distancia en z entre los puntos de campo y de fuente es mucho mayor que el radio, $z\text{-}z' >> a$, la distancia R es aproximadamente independiente de ϕ' y la ecuación de Pocklington se simplifica a

$$-j\omega\varepsilon_0 E_z^i = \left[k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right]\int_{-H}^{H} I(z')\,G(z-z')\,dz' \tag{8.40}$$

con $R = \left(a^2 + (z-z')^2\right)^{1/2}$ en la función de Green.

Esta aproximación equivale a imponer la condición de contorno en el eje del dipolo, en lugar de en una recta generatriz de la superficie del cilindro, lo cual garantiza la condición de contorno en la superficie sólo si el dipolo es largo y delgado. Por reciprocidad, esto es lo mismo que aproximar la radiación de las corrientes en la superficie del dipolo por las de una fuente lineal situada en el eje e imponer la condición de contorno en la superficie.

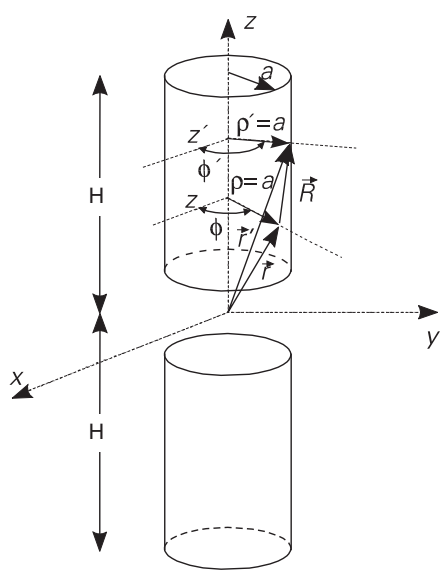


Fig. 8.7 Antena cilíndrica delgada

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Calculando la derivada segunda en (8.40) se llega a la fórmula habitual de la ecuación de Pocklington

$$-j\omega\varepsilon E_z^i = \int_{-H}^{H} I(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} \left[(1 + jkR)\left(2R^2 - 3a^2\right) + (ka R)^2 \right] dz' \tag{8.41}$$

con $R = \left(a^2 + (z - z')^2\right)^{1/2}$.

8.2.3 Alimentación

En las ecuaciones integrales anteriores es necesario definir los campos incidentes $\vec{E}^i$, $\vec{H}^i$ de forma que modelen lo mejor posible la alimentación o excitación de la antena real. Como los campos incidentes están definidos por la ecuación (8.6) en ausencia de la antena, en primera aproximación podemos suponer que son los campos existentes en la línea de transmisión que alimenta la antena. Una aproximación más fina consiste en colocar la superficie S del teorema de equivalencia sobre la terminación de la línea de transmisión y calcular los campos incidentes como los radiados en el espacio libre por las fuentes equivalentes en dicha superficie.

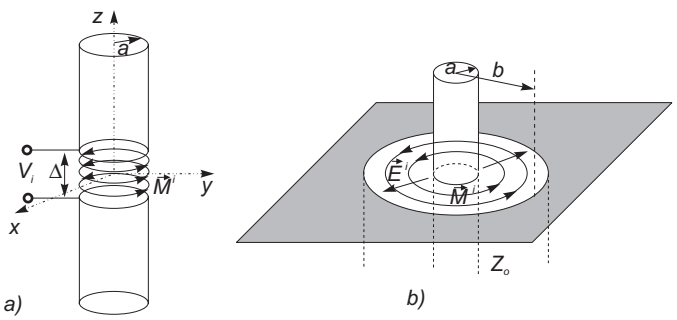


Fig. 8.8 Modelos de alimentación de antenas: a) pulso de tensión y b) anillo de corriente

Los modelos de alimentación más utilizados son:

- *Pulso de tensión*: el campo eléctrico en el interior de una línea bifilar que alimenta un dipolo (Fig. 8.8a), puede aproximarse por un pulso de campo constante

$$\vec{E}^i(z') = E_z^i(z')\hat{z} = \frac{V_i}{\Delta}\hat{z} \qquad |z' - z_i| \le \frac{\Delta}{2} \tag{8.42}$$

donde Δ es la separación, V_i la tensión entre los dos conductores de la línea bifilar y z_i la posición del punto de alimentación. La corriente magnética asociada a este campo eléctrico es

$$\vec{M}^i(z') = -\hat{n} \times \vec{E}^i(z') = \hat{\phi}\frac{V_i}{\Delta} \qquad |z' - z_i| \le \frac{\Delta}{2}. \tag{8.43}$$

- *Anillo de corriente*: el campo eléctrico del modo TEM en el interior de una línea coaxial de radios interno a y externo b, e impedancia característica Z_0, (Fig. 8.8b) es

$$\vec{E}^i\Big|_{LT} = \hat{\rho}\frac{V_i}{\rho'}\frac{30}{Z_0} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ln(b/a)}{2\pi} \tag{8.44}$$

Si colocamos la superficie S del teorema de equivalencia en la terminación de una línea coaxial sobre plano de masa, tenemos unas fuentes equivalentes

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{M}^i = -2\,\hat{n}\times\vec{E}^i = -\hat{\phi}\,\frac{V_i}{\rho'}\,\frac{60}{Z_0} \tag{8.45}$$

Si se utiliza la versión simplificada de la ecuación de Pocklington, (8.40) o (8.41), basta conocer únicamente el campo radiado por $\vec{M}_i$ sobre el eje de la antena cilíndrica. Si los ejes de la antena y el coaxial coinciden con el eje z, el campo radiado por la terminación en el espacio libre vale

$$E_z^i = -V_i\,\frac{30}{Z_0}\left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}-\frac{e^{-jkR_2}}{R_2}\right] \qquad R_1 = \sqrt{z^2+a^2} \quad R_2 = \sqrt{z^2+b^2} \tag{8.46}$$

Cuando la alimentación no es un coaxial que termina en un plano de masa, puede aplicarse este modelo de alimentación definiendo un coaxial equivalente cuyo radio interno sea igual al radio de la antena y el radio externo sea tal que la impedancia característica del coaxial equivalente coincida con la de la alimentación real.

8.3 Discretización de las ecuaciones integrales

En las secciones anteriores se ha presentado la formulación de las ecuaciones integrales para problemas de antenas. Estas ecuaciones funcionales pueden representarse en la forma general

$$L\,X = Y \tag{8.47}$$

donde L es uno de los operadores lineales L_E, L_H, la función X es la incógnita (corrientes equivalentes) y la función Y el término independiente (campo incidente).

Para resolver (8.47) mediante ordenador es necesario discretizar las funciones y operadores y convertir la ecuación funcional en una ecuación matricial. Esta idea básica fue desarrollada a principios de siglo (1915) por el ingeniero ruso Galerkin. Las aplicaciones electromagnéticas aparecieron con el desarrollo de las comunicaciones en bandas de microondas: en la década de los cuarenta los métodos variacionales, y en la de los cincuenta el método de Rayleigh-Ritz, permitían resolver el problema con un gran esfuerzo analítico y un pequeño esfuerzo numérico. No fue hasta la década de los sesenta cuando el desarrollo de la tecnología informática permitió plantear métodos que requerían un menor esfuerzo analítico. La aparición en 1968 de la obra *Field Computation by Moment Methods* [Harrington '68] permitió la formulación sistemática de los métodos numéricos entonces existentes mediante un concepto muy general que se denominó el *Método de los momentos* y que constituye la herramienta de análisis numérico más utilizada actualmente en electromagnetismo.

8.3.1 Método de los momentos

Discretización en un sistema de ecuaciones algebraicas

El primer paso consiste en aproximar la función incógnita X por una combinación lineal de funciones base x_j

$$X_N = \sum_j^N a_j\,x_j \approx X \tag{8.48}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde los N coeficientes a_j son las muestras de la discretización de X y constituyen las incógnitas del problema numérico a resolver. Para que X_N sea una buena aproximación de X, es necesario que las funciones base x_j pertenezcan al dominio del operador L, es decir, que cumplan las condiciones de diferenciabilidad y de contorno del operador.

Al sustituir (8.48) en la ecuación funcional (8.47) se obtiene

$$\sum_j^N a_j \, L\, x_j \;=\; Y_N \;\approx\; Y \tag{8.49}$$

que también es una ecuación funcional, pero con N incógnitas numéricas a_j. Para que exista una buena solución es necesario que una combinación lineal de las funciones Lx_j pueda aproximar adecuadamente a la función Y. Para ello, las funciones base x_j deben ser tales que las funciones Lx_j pertenezcan al rango del operador L y que, cuando el orden de la discretización N tienda a infinito, el conjunto $\{Lx_j\}$ sea una base completa del rango de L. Esto equivale a decir que el campo debe poder representarse en la base de funciones $\{Lx_j\}$.

El error en las condiciones de contorno o residuo es

$$R \;=\; Y - Y_N \;=\; Y - \sum_j^N a_j \, L\, x_j \tag{8.50}$$

Para convertir la ecuación funcional (8.49) en un sistema de M ecuaciones con N incógnitas, se hace nulo el residuo ponderado[3] con M funciones peso W_i

358

$$\langle W_i \,,\, R \rangle \;=\; 0 \qquad i \;=\; 1 \cdots M \tag{8.51}$$

donde el producto escalar está definido como el producto interno de Hilbert

$$\langle f \,,\, g \rangle \;=\; \int_{D_{(L)}} f^{*}(\vec{r}) \cdot g(\vec{r})\, d\vec{r} \tag{8.52}$$

El sistema de M ecuaciones lineales con N incógnitas que resulta es

$$\langle W_i \,,\, Y \rangle \;=\; \sum_j^N a_j \, \langle W_i \,,\, L\, x_j \rangle \qquad i \;=\; 1 \cdots M \tag{8.53}$$

el cual puede escribirse en forma matricial como

$$A\, a \;=\; b \tag{8.54}$$

donde A es la matriz MxN $A_{ij} = \langle W_i \,,\, Lx_j \rangle$, a es el vector columna formado por los elementos a_j y b es el vector columna $b_i = \langle W_i \,,\, Y \rangle$. Para resolver el sistema (8.54), si $M = N$ la matriz A es cuadrada y resulta

$$a \;=\; A^{-1}\, b \tag{8.55}$$

Si $M > N$, el sistema (8.54) es sobredeterminado y, en general, no tiene una solución exacta que haga nulo el residuo. La solución de mínimos cuadrados, que proporciona error o residuo R mínimo, puede obtenerse a través de la denominada ecuación normal

[3] El método de los momentos también se conoce como método de los residuos ponderados.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$A^+ A a = A^+ b \qquad a = \left(A^+ A\right)^{-1} A^+ b \tag{8.56}$$

donde A^+ es la matriz adjunta de A, es decir, la traspuesta conjugada de A, $A^+ = (A^*)^T$. La matriz A^+A es cuadrada y, por tanto, se puede invertir si no es singular.

Cuando la matriz A es singular, existen soluciones homogéneas del sistema de ecuaciones (para $b = 0$ o $Y = 0$) lo que significa que existen campos que verifican las condiciones de contorno sin excitación y, por tanto, nos encontramos en condiciones de resonancia.

Conocidos los coeficientes X_N mediante (8.55) o (8.56), la solución numérica del problema X_N se obtiene de (8.48). En general es una solución aproximada, porque $\langle W_i, R\rangle = 0$ no implica que el residuo sea cero y porque el espacio funcional en el que está definida la función X es de dimensión infinita y sólo podemos representarla con X_N mediante un conjunto finito de N coeficientes a_j.

Interpretación geométrica

El método de los momentos también se conoce como el método de las proyecciones porque

$$X_N = \sum_j^N a_j x_j \qquad Y_N = \sum_j^N a_j L x_j \tag{8.57}$$

son respectivamente las proyecciones de X en el subespacio generado por el conjunto $\{x_j\}$ y de Y en el subespacio generado por el conjunto $\{Lx_j\}$ (Fig. 8.9).

Al aplicar $\langle W_i, R\rangle = 0$ en (8.51) se impone que la proyección del residuo R en el subespacio $\{W_i\}$ sea nula, lo cual implica que el residuo sea normal a este subespacio. Esto equivale a igualar las proyecciones en $\{W_i\}$ de Y y de Y_N, $\langle W_i, Y\rangle = \langle W_i, Y_N\rangle$ (Fig. 8.9).

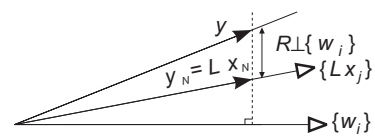


Fig. 8.9 Interpretación geométrica del método de los momentos

Para unas funciones base x_j dadas, con N y M fijos, el error R será mínimo cuando sea perpendicular a la aproximación Y_N

$$R \perp Y_N \Rightarrow R \perp L X_N \Rightarrow \{W_i\} = \{L x_j\} \tag{8.58}$$

lo cual significa que deben tomarse funciones peso W_i que generen el mismo subespacio que $\{Lx_j\}$. Es por esto que se toma $W_i = Lx_i$ cuando, fijadas N, M y x_j, se desea obtener el error cuadrático medio mínimo en las condiciones de contorno. Esta elección se conoce como el método de los mínimos cuadrados.

Para que el error R tienda a cero cuando el orden de la discretización tiende a infinito, es necesario que el subespacio $\{W_i,\}|_{M=\infty}$ sea una base completa del rango de L. De esta forma, podría conseguirse $Y_\infty = Y$ (Fig. 8.9) y, por tanto, error nulo en las condiciones de contorno.

Elección de las funciones peso

a) *Método de los autovalores y de las autofunciones*

Cuando se conocen los autovalores y las autofunciones del operador L, la ecuación (8.47) puede resolverse analíticamente aplicando el método de los momentos de la siguiente forma: sean las

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

funciones base las autofunciones de L, $Lx_j = \lambda_j x_j$, y sean las funciones peso las autofunciones del operador adjunto L^a, $L^a W_i = \lambda_i^* W_i$, donde

$$\left\langle L^a f, g \right\rangle = \left\langle f, L g \right\rangle \qquad \forall f, g \tag{8.59}$$

Si el operador es autoadjunto, $L \quad L^a$, los autovalores son reales, $\lambda_i^* = \lambda_i$, y resulta $w_i = x_i$. Por ser en este caso las autofunciones correspondientes a autovalores distintos ortogonales, el sistema de ecuaciones lineales (8.53) que resulta es

$$\left\langle x_i, Y \right\rangle = a_i \lambda_i \left\langle x_i, x_i \right\rangle \qquad i = 1 \cdots N \tag{8.60}$$

lo cual equivale a (8.54) con una matriz A diagonal. La solución del problema es entonces

$$a_i = A^{-1} b = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\left\langle x_i, Y \right\rangle}{\left\langle x_i, x_i \right\rangle} \qquad X_N = \sum_i^N \frac{x_i}{\lambda_i} \frac{\left\langle x_i, Y \right\rangle}{\left\langle x_i, x_i \right\rangle} \tag{8.61}$$

Como esta elección de funciones base y peso cumple el criterio $\{W_i\} = \{Lx_j\}$, produce una solución de mínimos cuadrados. Éste es un método muy general para la resolución semianalítica de problemas de electromagnetismo y mecánica cuántica. Aplicaciones de este método son, por ejemplo, los desarrollos en series modales en guías de onda y las series de Fourier.

b) *Método de colocación (point-matching)*

Si se eligen funciones peso iguales a funciones delta de Dirac

$$W_i(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \qquad i = 1 \cdots M \tag{8.62}$$

con $\vec{r}_i$ un punto de la superficie S sobre la que se aplican las condiciones de contorno, resulta que $\langle W_i, Y \rangle = \langle W_i, Y_N \rangle$ implica $Y(\vec{r}_i) = Y_N(\vec{r}_i)$, es decir, se impone la condición de contorno en un número finito de M puntos $\vec{r}_i$.

En este caso, el sistema de ecuaciones algebraicas (8.53) es

$$Y(\vec{r}_i) = \left[L\, X_N \right]_{(\vec{r}_i)} \qquad i = 1 \cdots M \tag{8.63}$$

Esta versión del método de los momentos se utiliza con frecuencia en la práctica, debido a su sencillez y a que no son necesarios los productos escalares con las funciones peso (integraciones numéricas), lo cual se traduce en una mayor velocidad de cálculo.

Sin embargo, el residuo R para una cierta discretización suele ser mayor que con otros métodos y depende de la elección de los puntos de muestreo $\vec{r}_i$. En general, cuando el orden de la discretización tiende a infinito no se garantiza $X_\infty = X$, pues $\{W_i\}$ no es una base completa del rango de L. Los resultados para un número de puntos M fijo mejoran si la densidad del muestreo es mayor donde las componentes tangenciales de los campos presenten mayor amplitud o variaciones más rápidas. Habitualmente se toman densidades de muestreo de, como mínimo, 3 o 4 puntos por longitud de onda.

c) *Método de Galerkin*

El método de Galerkin se caracteriza por la elección de funciones peso iguales a las funciones base

$$W_i = x_i \tag{8.64}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Esta elección debe cumplir el criterio general de que cuando M tiende a infinito las funciones peso sean una base completa del rango del operador L. Puede demostrarse que para ello es condición suficiente que sean una base completa del dominio del operador adjunto L^a. Como las funciones peso son iguales a las funciones base, que son una base completa del dominio del operador L, resulta que si el operador L es autoadjunto, $L = L^a$, las funciones peso son siempre una base completa del rango de L.

Por este motivo, si el método de Galerkin se aplica a operadores que no son autoadjuntos, no se puede garantizar que el residuo R tienda hacia cero cuando el orden de la discretización tiende a infinito (Fig. 8.9). Para los operadores autoadjuntos, una ventaja adicional es que la matriz A de (8.54) es simétrica conjugada (autoadjunta o hermítica)

$$A_{ij} = \left\langle x_i , L\, x_j \right\rangle = \left\langle L\, x_i , x_j \right\rangle = \left\langle x_j , L\, x_i \right\rangle^* = A^*_{ji} \tag{8.65}$$

lo cual permite reducir el número de operaciones necesarias para invertirla.

Su inconveniente principal es el coste computacional del producto escalar con las funciones peso. Por ello, suele usarse con funciones base que puedan representar bien a la corriente y al campo y que hagan que alguna de las integrales que aparecen en Lx_j o $\langle W_i, Lx_j \rangle$ pueda realizarse analíticamente.

Cuando el operador L es definido positivo, es decir, $\langle f, Lf \rangle$ es real y positivo para toda función f no nula[4], puede demostrarse que el método de Galerkin equivale al método variacional de Rayleigh-Ritz. En este caso, el método de Galerkin para N finita produce error cuadrático medio mínimo y garantiza que $\| R \| \to 0$ y $\| X - X_N \| \to 0$ cuando $N \to \infty$ con convergencia monótona y uniforme, suponiendo que las funciones base cumplan la condición de que $\{Lx_j\}$ sea una base completa del rango de L cuando $N \to \infty$.

d) *Método de los mínimos cuadrados*

Si el objetivo es obtener un residuo $\| R \|$ mínimo con una cierta discretización $\{x_j\}$ y orden N finito, en la figura 8.9 se observa que $\| R \|$ es mínimo cuando $R \perp Y_N$, lo cual implica $\{W_i\} = \{Lx_j\}$. El método de mínimos cuadrados consiste en tomar $W_i = Lx_i$, lo cual garantiza que cuando $N \to \infty$ $Y_\infty = Y$, $X_\infty = X$ suponiendo que las funciones base cumplen las condiciones necesarias. Como con esta elección de las funciones peso

$$\left\langle W_i , LX_N \right\rangle = \left\langle W_i , Y \right\rangle \Rightarrow \left\langle L\, x_i , L\, X_N \right\rangle = \left\langle L\, x_i , Y \right\rangle \Rightarrow \left\langle x_i , L^a\, L\, X_N \right\rangle = \left\langle x_i , L^a\, Y \right\rangle \tag{8.66}$$

resulta que este método equivale a resolver por el método de Galerkin la ecuación $L^a LX = L^a Y$, que es la solución de residuo mínimo de $LX = Y$ cuando no existe una solución exacta. Nótese que $L^a L$ es un operador definido positivo, por lo que su discretización por el método de Galerkin converge hacia la solución correcta cuando $N \to \infty$ y las funciones base son adecuadas.

En teoría, está garantizada la convergencia monótona y uniforme, pero en la práctica es el método más sensible a los errores de redondeo o truncamiento cuando A está mal condicionada y a la elección adecuada de las funciones base. Por estos motivos, puede ocurrir que en la práctica no converja o lo haga hacia un resultado erróneo.

Sin embargo, el inconveniente principal de este método es el coste computacional del cálculo de los elementos de la matriz A, $A_{ij} = \{Lx_i, Lx_j\}$, cuando ninguna de las integraciones puede realizarse analíticamente. Por este motivo, pocas veces se implementa directamente y para obtener una solución de mínimos cuadrados suele emplearse el método del gradiente conjugado.

[4] Si un operador es definido positivo, también es autoadjunto.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Es interesante observar que la discretización de $L^a L X = L^a Y$ conduce a la ecuación matricial $A^+Aa = A^+b$, la cual es igual a la solución de mínimos cuadrados (8.56) cuando el sistema $Aa = b$ es sobredeterminado. La matriz A^+A es definida positiva, es decir, X^+AX es real y positivo para todo vector X no nulo. Por tanto, también es autoadjunta o hermítica, $A = A^+$, y es necesario un menor número de operaciones para calcular su inversa.

Otra observación importante es que cuando los productos escalares por las funciones peso (8.51)-(8.53) se calculan mediante integración numérica, con los métodos de Galerkin y de mínimos cuadrados no se obtiene el mismo resultado que mediante integración analítica. El resultado obtenido es el que corresponde al método de colocación, muestreando la condición de contorno en los puntos en los que la integración numérica evalúa las funciones [Sarkar, PIER-5 '90]. Como el número de puntos de colocación es mayor que el de funciones base, el sistema de ecuaciones está sobredeterminado. En estas condiciones, el método de mínimos cuadrados obtiene la solución del sistema sobredeterminado (8.54) con residuo mínimo, (8.56), lo cual no sucede con el método de Galerkin.

Interpretación física de la matriz *A*

Cuando el operador lineal es la ecuación integral del campo eléctrico (EFIE), $L = L_E$, los elementos a_{ij} de la matriz equivalen a las impedancias mutuas entre dos antenas cuyas distribuciones de corriente normalizadas a alimentación unitaria sean iguales a las funciones base x_i y x_j,

$$x_i(\vec{r}) = \frac{J_i(\vec{r})}{I_i} \tag{8.67}$$

Por ejemplo, para un dipolo analizado con el método de colocación los elementos de la matriz A son

$$a_{ij} = \langle W_i, L_E x_j \rangle = \left[L_E x_j \right]_{(\vec{r}_i)} = \frac{E^j(\vec{r}_i)}{I_j} \tag{8.68}$$

donde $[L_E x_j]_{(\vec{r}_i)}$ es el campo radiado por las corrientes x_j en el punto $\vec{r}_i$. Como el campo que incide sobre el elemento x_i es aproximadamente constante e igual a $E^j(\vec{r}_i)$, recordando la definición de longitud efectiva (1.30) podemos escribir

$$a_{ij} = \frac{\dfrac{V_{ca}^j(\vec{r}_i)}{\ell_{ef}}}{I_j} = \frac{Z_{ij}}{\ell_{ef}} \tag{8.69}$$

con lo que los elementos de la matriz A son iguales a las impedancias mutuas divididas por la longitud efectiva de una distribución de corrientes igual a la función base x_i.

En el sistema matricial $Aa = b$ (8.54) el término independiente es

$$b_i = \langle W_i, -E_i^{inc} \rangle = -E^{inc}(\vec{r}_i) \tag{8.70}$$

Como los coeficientes a_j del desarrollo de la corriente en serie de funciones base (8.48) son iguales a la corriente I_i de (8.67), el sistema (8.54) puede escribirse en la forma $Z \cdot I / \ell_{ef} = -E^{inc}$, lo cual equivale a $ZI = -V_{ca}^{inc}$.

Cuando se utiliza el método de Galerkin con funciones bases reales, los elementos de la matriz A son

$$a_{ij} = \langle W_i, L_E x_j \rangle = \int_i x_i L_E x_j \, d\vec{r} = \frac{1}{I_i I_j} \int_i J_i(\vec{r}) E_j(\vec{r}) \, d\vec{r} = -Z_{ij} \tag{8.71}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

que es la impedancia mutua entre distribuciones de corriente iguales a las funciones base x_i y x_j calculadas por el método de la fuerza electromotriz inducida (capítulo 3).

El término independiente del sistema matricial

$$b_i = \left\langle W_i, -E_i^{inc} \right\rangle = -\int_i x_i E_i^{inc}\, d\vec{r} = \frac{-1}{I_i}\int_i J_i(\vec{r})\, E_i^{inc}(\vec{r})\, d\vec{r} = V_{ca}^{inc}\Big|_i \tag{8.72}$$

es la tensión en circuito abierto debida al campo incidente. Por tanto, el sistema matricial (8.48) es igual a $Z\,I = -V_{ca}^{inc}$.

8.3.2 Método del gradiente conjugado

Una solución de la ecuación $LX = Y$ puede obtenerse minimizando un funcional proporcional a la norma del residuo

$$f(X) = \frac{1}{2}\|R\|^2 = \frac{1}{2}\|Y - L\,X\|^2 \tag{8.73}$$

La solución se obtiene cuando el gradiente de $f(X)$ es nulo

$$\nabla f(X) = L^a L\,X - L^a\,Y = -L^a\,R = 0 \tag{8.74}$$

lo cual equivale a resolver la ecuación $L^aLX = L^aY$ que, como hemos visto, conduce a la solución de mínimos cuadrados ($\|R\|$ mínima) del problema original $LX = Y$.

Para minimizar el funcional $f(X)$ se actualiza de forma iterativa una aproximación inicial $X^{(0)}$ por

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \lambda^{(i)}\,P^{(i)} \tag{8.75}$$

donde $P^{(i)}$ es una dirección en la cual $f(X)$ disminuye. $\lambda^{(i)}$ es un escalar que minimiza $f(X)$ a lo largo de la dirección $P^{(i)}$ y, por tanto, debe ser tal que el gradiente del funcional en el mínimo $X^{(i+1)}$ sea normal a la dirección de avance $P^{(i)}$

$$\left\langle \nabla f\left(X^{(i+1)}\right), P^{(i)} \right\rangle = 0 \tag{8.76}$$

La elección de la dirección $P^{(i)}$ conduce a distintos métodos de minimización. Por ejemplo, en el método del gradiente descendiente se toma $P^{(i)} = -\nabla f(X^{(i)})$ (Fig. 8.10a).

Puede observarse en la figura 8.10a que con este método el número de iteraciones es grande, porque al minimizar el funcional en cada iteración se desaprovecha la minimización realizada en las iteraciones anteriores. Esto no

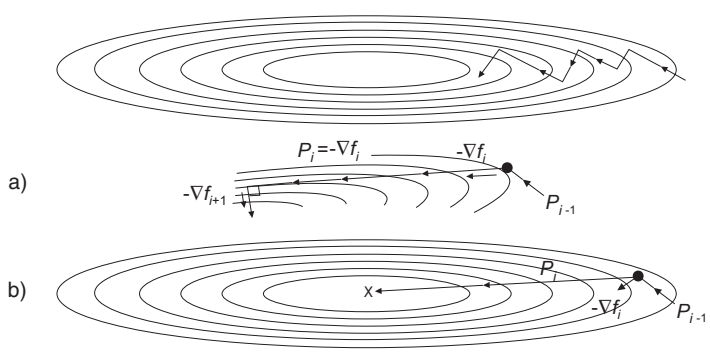


Fig. 8.10 Interpretación geométrica de los métodos de minimización: a) gradiente descendiente y b) gradiente conjugado

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

sucedería si en cada iteración el nuevo gradiente $\nabla f(X^{(i+1)})$, además de ser ortogonal a $P^{(i)}$, fuera ortogonal a todos los $P^{(j)}$ anteriores

$$\left\langle \nabla f\left(X^{(i+1)}\right), P^{(j)} \right\rangle = 0 \qquad \forall\, j \le i \tag{8.77}$$

Esta condición implica que el gradiente es ortogonal al subespacio generado por todas las direcciones $P^{(j)}$ en las que se ha minimizado en iteraciones anteriores. Como sólo es posible minimizar $f(X)$ en un subespacio de N dimensiones, debido a la aproximación (8.48) $X \sim X_N = \sum a_j x_j$, bastan N iteraciones para que la proyección del gradiente en este subespacio sea nula

$$\left\langle \nabla f\left(X^{(N)}\right), P^{(j)} \right\rangle = 0 \qquad \forall\, j \le N-1 \Rightarrow \nabla f\left(X^{(N)}\right) = 0 \tag{8.78}$$

En estas condiciones X_N es la solución de $LX = Y$ con residuo mínimo, dentro del subespacio generado por las funciones base. La propiedad (8.77) implica

$$\begin{gathered} \left\langle L^a L P^{(i)}, P^{(j)} \right\rangle = \left\langle L P^{(i)}, L P^{(j)} \right\rangle = 0 \qquad \forall\, i \ne j \\ \left\langle \nabla f\left(X^{(i)}\right), \nabla f\left(X^{(j)}\right) \right\rangle = 0 \qquad \forall\, i \ne j \\ \left\langle \nabla f\left(X^{(i)}\right), P^{(j)} \right\rangle = 0 \qquad \forall\, i \ne j \end{gathered} \tag{8.79}$$

Las direcciones $P^{(i)}$ que cumplen la primera ecuación de (8.79) se llaman direcciones conjugadas respecto al operador L^aL. Las dos ecuaciones siguientes indican que los gradientes de $f(X)$ son ortogonales entre sí y con el conjunto de direcciones conjugadas $P^{(i)}$.

Un conjunto de direcciones conjugadas puede obtenerse mediante la iteración:

$X^{(0)}$, aproximación inicial
$R^{(0)} = Y - LX^{(0)}$, residuo inicial
$P^{(0)} = L^a R^{(0)}$, primera dirección de minimización

$$\begin{aligned} \lambda^{(k)} &= \frac{\left\| L^a R^{(k)} \right\|^2}{\left\| L P^{(k)} \right\|^2} \\ X^{(k+1)} &= X^{(k)} + \lambda^{(k)} P^{(k)} \\ R^{(k+1)} &= R^{(k)} - \lambda^{(k)} L P^{(k)} \\ \beta^{(k)} &= \frac{\left\| L^a R^{(k+1)} \right\|^2}{\left\| L^a R^{(k)} \right\|^2} \\ P^{(k+1)} &= L^a R^{(k+1)} + \beta^{(k)} P^{(k)} \end{aligned} \tag{8.80}$$

donde en cada iteración el gradiente es $\nabla f(X^{(k)}) = -L^a R^{(k)}$. Obsérvese que $P^{(k+1)}$ es igual a $-\nabla f(X^{(k+1)})$, el gradiente descendiente, más un factor de corrección ortogonal a $\nabla f(X^{(k+1)})$ que acelera la convergencia.

Esta iteración se denomina *método del gradiente conjugado* y es aplicable sólo a operadores definidos positivos, como el operador L^aL de la ecuación $L^aLX = L^aY$. Nótese que con este método se obtiene la solución de $||R||$ mínima al aproximar X por su proyección X_N en un espacio de N dimensiones.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuando en la ecuación original $LX = Y$ el operador L es real y definido positivo e Y es una función real, puede aplicarse directamente el método del gradiente conjugado a L. En este caso, se redefine el funcional $f(X)$ de forma que el gradiente es ahora $\nabla f(X) = -R$ y basta sustituir L^aR por R y L^aL por L en la iteración anterior, lo cual implica que

$$\left\| L P^{(k)} \right\|^2 = \left\langle L P^{(k)}, L P^{(k)} \right\rangle = \left\langle P^{(k)}, L^a \, L P^{(k)} \right\rangle \tag{8.81}$$

se convierte en $\langle P^{(k)}, LP^{(k)} \rangle$. Cuando el operador L no es definido positivo, además del método del gradiente conjugado pueden aplicarse otros métodos iterativos. Una de las alternativas más habituales es el método del gradiente biconjugado, que no garantiza norma del residuo mínima pero requiere, habitualmente, un número menor de iteraciones para alcanzar un valor razonablemente pequeño de dicha norma.

Discretización

Para la implementación de la iteración (8.80), es necesario discretizar numéricamente las funciones y los operadores. Para ello se desarrolla la función incógnita X en serie de funciones base (8.48) y el resultado de aplicar los operadores en serie de funciones peso (8.51)-(8.53). De esta forma, el operador L discretizado se representa mediante el producto del vector correspondiente a la función discretizada por una matriz A tal que $A_{ij} = \langle W_i, Lx_j \rangle$, mientras que el operador adjunto L^a se representa mediante el producto por la matriz adjunta o hermítica A^+.

Obsérvese que la matriz A que aparece en el método del gradiente conjugado discretizado es igual a la del método de los momentos (8.54) cuando en ambos métodos se utilizan los mismos conjuntos de funciones base y peso. En consecuencia, la resolución del sistema de ecuaciones del método de los momentos utilizando la versión discreta del método del gradiente conjugado produce el mismo resultado que la aplicación directa de éste último y su posterior discretización, suponiendo que se tomen en ambos casos las mismas funciones base y peso, y que la matriz A^+ sea una discretización adecuada del operador adjunto L^a. Este resultado es el mismo que se obtendría resolviendo el sistema de ecuaciones (8.54) por el método de Gauss o descomposición triangular (LU).

Esto significa que el método del gradiente conjugado discretizado obtiene la solución de residuo mínimo del sistema matricial $Aa = b$, resolviendo $A^+Aa = A^+b$, que coincide con la solución del método de los momentos si el sistema es determinado. Sin embargo, cuando los productos escalares por las funciones peso se realizan numéricamente, en lugar de analíticamente, todos los métodos anteriores equivalen al método de colocación aplicado en los puntos en los que la integración numérica evalúa las funciones. El resultado es un sistema $Aa = b$ sobredeterminado y sólo el método del gradiente conjugado con colocación en los puntos de integración numérica o bien la resolución directa de $A^+Aa = A^+b$ producen $\|R\|$ mínima, para un cierto conjunto de M puntos de integración. Esto implica que cuando $N \to \infty$ solamente estos métodos aseguran $\| X_\infty - X_N \| \to 0$ de forma monótona.

Condicionamiento y precondicionado

Como se ha indicado anteriormente, cuando la frecuencia de trabajo está próxima a una frecuencia de resonancia, la matriz A es casi singular y es difícil calcular su inversa, debido a errores de truncamiento. Por este motivo, el método del gradiente conjugado puede no converger o hacerlo muy lentamente. Puede demostrarse que al resolver $Aa = b$ el error relativo en cada iteración es

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\frac{\left\| a - a^{(k+1)} \right\|}{\|a\|} \leq \kappa \frac{\left\| A^{+} R^{(k+1)} \right\|}{\left\| A^{+} b \right\|} \tag{8.82}$$

donde κ es el *número de condicionamiento* de $A^{+}A$,

$$\kappa = \left\| A^{+} A \right\| \cdot \left\| \left(A^{+} A \right)^{-1} \right\| = \frac{\lambda_{máx}}{\lambda_{mín}} \tag{8.83}$$

y $\lambda_{máx}$, $\lambda_{mín}$ son el mayor y menor valor propio de la matriz definida positiva $A^{+}A$.

El orden de magnitud de κ, $\log_{10}\kappa$, indica el número de dígitos significativos que se pierden en la solución del sistema de ecuaciones. Debe tenerse en cuenta que el número de condicionamiento de $A^{+}A$ es el cuadrado del número de condicionamiento de A, con lo que se pierden el doble de dígitos significativos al resolver $A^{+}Aa = A^{+}b$ con el método del gradiente conjugado que si se resuelve directamente $Aa = b$ por los métodos de Gauss o descomposición LU.

El número de condicionamiento de un problema $Aa = b$ puede mejorarse multiplicando todo el sistema por una matriz adecuada. Un ejemplo sencillo es multiplicar por el inverso de una matriz $\widetilde{A}$ que se asemeje a A pero que sea fácil de invertir como, en el caso más sencillo, la diagonal de A,

$$\left(\widetilde{A}^{-1} \cdot A \right) a = \widetilde{A}^{-1} b \tag{8.84}$$

donde ahora $\widetilde{A}^{-1} \cdot A$ se asemeja a la matriz identidad y, por tanto, tiene un número de condicionamiento mucho menor que A.

Esta técnica se conoce con el nombre de precondicionado y, en general, reduce enormemente el número de iteraciones necesario para obtener un error aceptable. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos no es fácil obtener una buena matriz de precondicionado $\widetilde{A}^{-1}$ y se suelen aplicar métodos mucho más complejos que tomar $\widetilde{A}$ igual a la diagonal de A.

Convergencia

En un sistema $A^{+}Aa = A^{+}b$ bien condicionado, el gradiente conjugado asegura la convergencia a la solución en N o menos iteraciones, donde N es el orden de $A^{+}A$. En cada iteración $\|R^{(k)}\|$ y $\|a\text{-}a^{(k)}\|$ decrecen monótonamente y esta convergencia está garantizada independientemente de la aproximación inicial.

Sin embargo, en la práctica el número de iteraciones necesario para obtener un error razonable suele ser mucho menor que N. Por ejemplo, bastan $N^{1/3}$ iteraciones para obtener un error relativo del orden de 10^{-3} con una discretización volumétrica de la EFIE [Sarkar, PIER-5 '90] y, según otros autores, bastan $N^{1/2}$ iteraciones con DMFIE y discretización superficial.

Una ventaja adicional del método del gradiente conjugado reside en que para un problema dado, al aumentar el número de funciones base N a partir de un cierto valor, en la mayoría de los casos apenas aumenta el número de iteraciones necesario a pesar de que el condicionamiento de A suele empeorar.

Gradiente conjugado y FFT

Cuando el operador L es de tipo convolución, por ejemplo la EFIE y la MFIE, y se discretiza mediante funciones base definidas en subdominios que forman una malla regular, la matriz A de $Aa = b$ es de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Toeplitz o de Toeplitz a bloques. En la figura 8.11 se muestran ejemplos de discretizaciones regulares en una, dos o tres dimensiones que producen este tipo de matrices.

En este caso, las operaciones $AP^{(k)}$ y $A^{+}R^{(k)}$ del método del gradiente conjugado discretizado tienen la forma de una convolución discreta en una, dos o tres dimensiones y pueden implementarse eficientemente mediante la transformada rápida de Fourier (FFT). Ahora el número de operaciones en cada iteración es del orden de $N \log N \sim N$ en lugar de N^2 y, además, no es necesario almacenar la matriz A completa (tamaño N^2) sino sólo los elementos no redundantes (tamaño N).

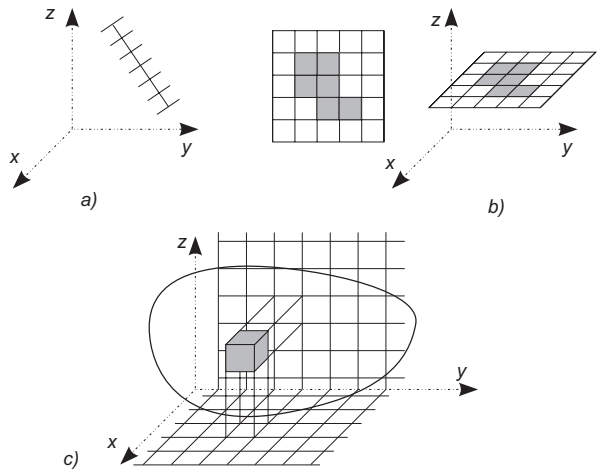


Fig. 8.11 Discretización con malla regular para obtener una matriz de Toeplitz: a) hilos, b) problemas 2-D y placas cuadradas en un espacio 3-D y c) problemas 3-D

Sin embargo, en un problema tridimensional arbitrario, para obtener una malla regular es necesaria una discretización volumétrica (Fig. 8.11c). Por ello, si el tamaño eléctrico de los elementos de la malla regular se mantiene constante, el número de incógnitas aumenta con la frecuencia en la forma $N \sim f^3$ en lugar de $N \sim f^2$ como sucede con discretización superficial. Si comparamos para un problema general 3-D la dependencia con la frecuencia del número de operaciones y los requerimientos de memoria obtenemos la tabla 8.1.

	SUPERFICIE LU	SUPERFICIE CG	VOLUMEN CG+FFT
NÚMERO DE ELEMENTOS N	f^2	f^2	f^3
MEMORIA NECESARIA	$N^2 \sim f^4$	$N^2 \sim f^4$	$N \sim f^3$
ITERACIONES	1	$N^{1/2} = f$	$N^{1/3} = f$
OPERACIONES POR ITERACIÓN	$N^3 \sim f^6$	$N^2 \sim f^4$	$N \sim f^3$
OPERACIONES TOTALES	f^6	f^5	f^4
OPERACIONES NUEVA EXCITACIÓN	$N^2 \sim f^4$	f^5	f^4

Tabla 8.1 Dependencia con la frecuencia de la memoria y operaciones necesarias para resolver un problema 3-D arbitrario mediante: el método de los momentos con discretización superficial y descomposición LU, el método del gradiente conjugado con discretización superficial y con discretización volumétrica regular más FFT

8.3.3 Funciones base y peso

Para la discretización de las corrientes y la geometría de la superficie o volumen sobre la que se aplican las condiciones de contorno es necesario utilizar en la ecuación (8.48) unas funciones base adecuadas. De un modo muy general, las funciones base pueden clasificarse en funciones de dominio completo, definidas en todo el dominio del operador L, o de subdominio, definidas solamente en una parte del

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

dominio (subdominio o elemento de mallado). Normalmente, el tamaño de estos subdominios suele estar comprendido entre λ/5 y λ/20.

Funciones elementales

a) *Funciones delta de Dirac*
Se aproximan las corrientes equivalentes superficiales o volumétricas por una serie de fuentes puntuales $x_j(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$.

b) *Funciones pulso*
Las corrientes equivalentes se aproximan mediante una función constante a trozos (Fig. 8.12). Para ello se utilizan funciones base pulso definidas en subdominios. La ecuación de los pulsos en una dimensión es

$$x_j(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - z_j| \leq \Delta \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \tag{8.85}$$

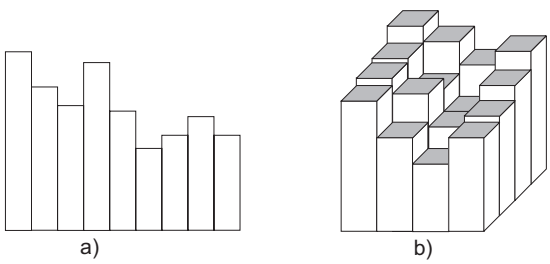


Fig. 8.12 Funciones base pulso: a) en una dimensión y b) en dos dimensiones

y es análoga para los casos de dos y tres dimensiones.

Las funciones pulso son muy utilizadas porque generalmente dan lugar a integrales fáciles de calcular. El inconveniente principal es que aparecen discontinuidades en la distribución de corrientes discretizada, lo cual puede complicar el problema cuando en el operador *L* existen operaciones de diferenciación.

c) *Funciones triángulo*
La alternativa más habitual a las funciones pulso cuando se desean evitar discontinuidades en la distribución de corrientes son las funciones triángulo. El desarrollo de la distribución de corrientes en funciones base triángulo equivale a una interpolación lineal a trozos (Fig. 8.13). Las funciones triángulo se definen únicamente en una dimensión y en problemas 2-D o 3-D se suelen combinar con funciones base pulso en las otras dimensiones.

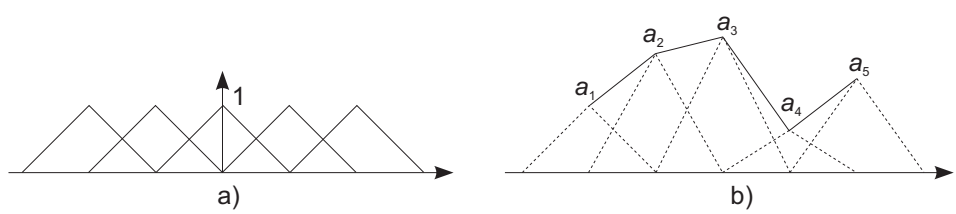


Fig. 8.13 Funciones base triángulo: a) solapamiento de los subdominios en los que se definen las funciones base y b) interpolación lineal de la distribución de corrientes

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Las funciones triángulo aproximan la distribución de corrientes mejor que las funciones pulso y son muy convenientes cuando la corriente debe ser nula en los extremos del dominio (por ejemplo, en los extremos de una antena de hilo). Sin embargo, no deben emplearse cuando la corriente es singular en los extremos (por ejemplo, en los bordes de una línea microtira).

d) *Funciones sinusoidales a trozos*
Análogas a las funciones triángulo son las funciones sinusoidales a trozos

$$x_j(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} k\left(\Delta - \left|z - z_j\right|\right)}{\operatorname{sen} k\Delta} & \text{si } \left|z - z_j\right| \le \Delta \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \tag{8.86}$$

que cuando $k\Delta << 1$ presentan una forma prácticamente triangular y producen una interpolación casi lineal de la distribución de corrientes.

Estas funciones base se emplean con frecuencia para el análisis de antenas de hilo porque el resultado de aplicar la ecuación de Pocklington a una corriente sinusoidal puede obtenerse analíticamente [Balanis '82] (obsérvese que la ecuación (8.86) corresponde a la distribución de corriente de un dipolo de brazo Δ según el modelo de línea de transmisión).

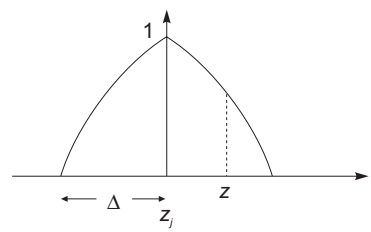


Fig. 8.14 Función base sinusoidal a trozos

e) *Funciones trigonométricas de dominio entero*
Cuando las funciones base son senos y cosenos definidos en todo el dominio del operador, la ecuación $X_n = \Sigma a_j x_j$ (8.48) equivale al desarrollo en serie de Fourier de la distribución de corriente. En este caso, si se utilizan las funciones peso $W_i = Lx_i$ del método de los mínimos cuadrados, se obtienen coeficientes a_j iguales a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier.

f) *Conjuntos de polinomios ortogonales*
Análogamente a los desarrollos en serie de funciones trigonométricas, pueden utilizarse desarrollos en serie de polinomios ortogonales (Chebychev, Legendre, Hermite, Laguerre, etc). Una elección habitual en el análisis de líneas *microstrip* son los polinomios de Chebychev, de primera especie para la componente de la corriente paralela a la línea y de segunda especie para la componente perpendicular [Morita'90].

Discretización de superficies planas

a) *Funciones pulso*
La solución más sencilla para discretizar corrientes que fluyen sobre superficies planas consiste en dividir la superficie en subdominios rectangulares y suponer que la corriente es constante en el interior de los subdominios. Ello equivale a utilizar funciones base iguales a pulsos bidimensionales (Fig. 8.15) para representar las dos componentes de la corriente J_x y J_y.

La elección de las funciones peso suele basarse en el método de colocación, funciones delta de Dirac situadas en el centro de los subdominios, o en el método de Galerkin. El inconveniente principal de esta discretización es la aparición de singularidades de carga en los límites de los subdominios.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

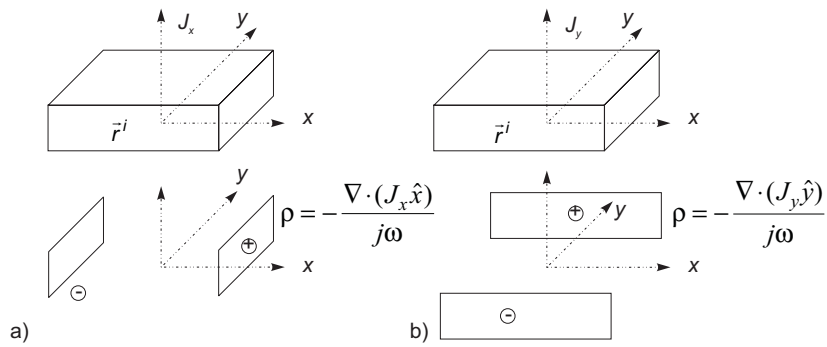


Fig. 8.15 Funciones base pulso bidimensional

b) *Funciones tejado*

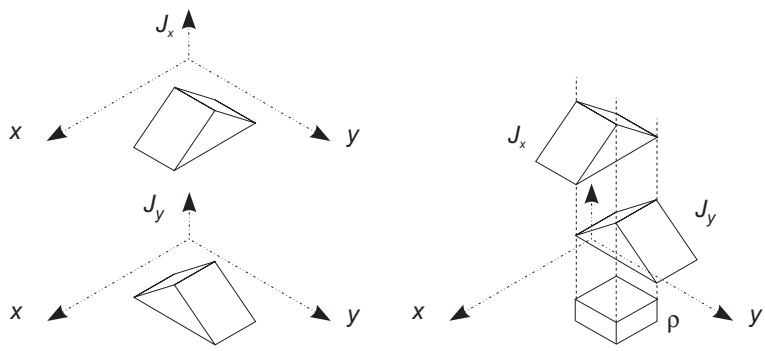


Fig. 8.16 Funciones base tejado definidas sobre subdominios rectangulares del plano

Con objeto de evitar las singularidades en la distribución de carga que aparecen en el caso anterior, las funciones base que representan $\vec{J}$ se eligen de forma que $J_x(x,y)$ sea continua en x, y $J_y(x,y)$ continua en y

$$-j\omega\rho = \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial}{\partial x} J_x + \frac{\partial}{\partial y} J_y \qquad (8.87)$$

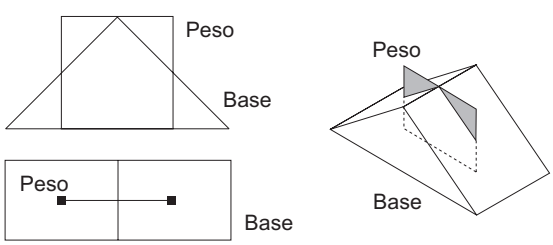


Fig. 8.17 Funciones peso hoja de navaja en combinación con funciones base tejado

En la figura 8.16 se muestran las funciones tejado (*rooftop*), iguales a la combinación de una función pulso en x y una función triángulo en y, o viceversa. Juntamente con estas funciones base suelen emplearse funciones peso del tipo hoja de navaja (*razor blade*), que se representan en la figura 8.17.

En el caso de discretización volumétrica, pueden emplearse funciones base y peso tridimensionales análogas a las funciones tejado y hojas de navaja de dos dimensiones.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Funciones base para discretización de superficies arbitrarias en un espacio 3-D

En algunas aplicaciones es necesario el análisis de antenas que radian en presencia de objetos conductores o dieléctricos muy complejos, como es el caso de antenas embarcadas en aviones, barcos o satélites. Para ello es necesario disponer de un conjunto de funciones base capaz de discretizar superficies de formas arbitrarias y de una herramienta de *software* de diseño asistido por ordenador (modelado geométrico) para llevar a cabo la discretización de forma automática. La figura 8.18 muestra la discretización de la superficie de un avión Boeing 727.

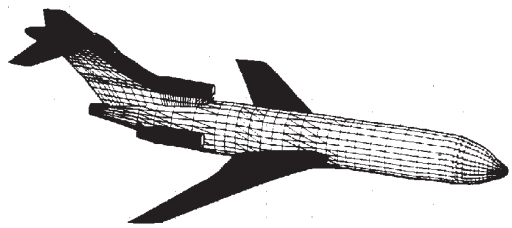


Fig. 8.18 Discretización de la superficie de un avion *Boeing* 727

a) *Modelado por hilos*

La técnica de discretización de superficies arbitrarias más antigua es el modelado por hilos (Fig. 8.19). Su origen data de mediados de los años sesenta y consiste en aproximar la radiación de las corrientes equivalentes superficiales por la radiación de hilos de corriente situados sobre la superficie.

Este método permite obtener buenos resultados cuando se calculan parámetros de campo lejano (diagrama de radiación de una antena o sección recta de un blanco radar) pero no es adecuado para el cálculo de parámetros de campo próximo, como impedancias de entrada o corrientes inducidas sobre las superficies. Debido a esta y otras limitaciones, en la actualidad suelen emplearse otras técnicas más potentes para el modelado de superficies arbitrarias.

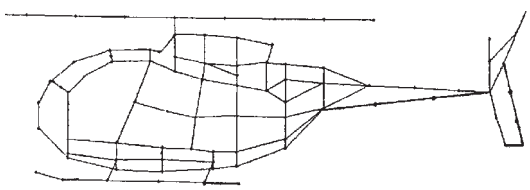


Fig. 8.19 Modelado de superficies mediante hilos de corriente

b) *Triángulos de Rao, Glisson y Wilton*

Uno de los métodos de discretización de superficies arbitrarias más extendido en los paquetes comerciales de modelado geométrico es el mallado en parches triangulares (Fig. 8.20). Rao, Glisson y Wilton desarrollaron en 1982 un tipo de funciones base definidas sobre este tipo de mallado que constituye el método de análisis de superficies arbitrarias mediante la EFIE más utilizado en la actualidad.

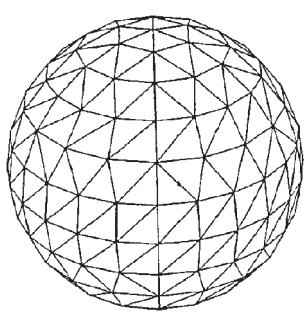
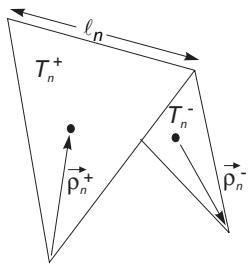


Fig. 8.20 Modelado de una esfera mediante parches triangulares

Para evitar la aparición de singularidades de carga en un mallado con parches triangulares basta asegurar la continuidad de la componente de $\vec{J}$ normal a los lados de los triángulos, suponiendo que las funciones base son continuas en el interior de los mismos. Con este objetivo, se definen las funciones base de Rao, Glisson y Wilton como funciones vectoriales $\vec{f}_n$ asociadas a un lado ℓ_n que es común a dos triángulos T_n^+ y T_n^- (Fig. 8.21)

$$\vec{f}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\ell_n}{2A_n^+}\vec{\rho}_n^+ & \text{si } \vec{r} \in T_n^+ \\ \dfrac{\ell_n}{2A_n^-}\vec{\rho}_n^- & \text{si } \vec{r} \in T_n^- \end{cases} \tag{8.88}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



donde $\vec{\rho}_n^+$ es el vector desde el vértice de T_n^+ opuesto a ℓ_n hasta $\vec{r}$ y $\vec{\rho}_n^-$ desde $\vec{r}$ hasta el vértice de T_n^- opuesto a ℓ_n y $A_n^{\pm}$ es el área del triángulo $T_n^{\pm}$. La componente de $\vec{J}$ normal a ℓ_n se toma con signo positivo cuando fluye de T_n^+ a T_n^-.

Fig. 8.21 Par de elementos triangulares con un lado común sobre los que se definen las funciones base de Rao, Glisson y Wilton

Esta definición de las funciones base tiene las siguientes propiedades:

- La función vectorial $\vec{f}_n(\vec{r})$ no tiene componentes normales a través del borde exterior del par de triángulos T_n^+, T_n^-. La componente normal a través del borde interior ℓ_n es igual a 1, constante y continua a lo largo de todo el lado. Ello implica que la aproximación de la corriente total es

$$\vec{J} \approx \vec{J}_N = \sum_{n=1}^{N} I_n \vec{f}_n(\vec{r})$$

  donde N es el número de los lados comunes a dos triángulos (y, por tanto, que no forman bordes exteriores de la superficie) y los coeficientes I_n son el valor de la corriente que atraviesa el lado ℓ_n en la dirección normal. El valor de $\vec{J}$ dentro de cada triángulo es una interpolación lineal vectorial de los tres valores I_n de las componentes de $\vec{J}$ normales a los tres lados.

- La densidad de carga superficial es

$$-j\omega\rho_s = \nabla_s \vec{f}_n = \begin{cases} \dfrac{\ell_n}{A_n^+} & \text{si } \vec{r} \in T_n^+ \\ -\dfrac{\ell_n}{A_n^-} & \text{si } \vec{r} \in T_n^- \end{cases} \tag{8.89}$$

  de forma que la carga total en cada triángulo es $\pm\ell_n$ y la suma de ambos triángulos da carga total nula.

- En los bordes exteriores de una superficie abierta, las componentes normales de $\vec{J}_N$ son nulas. Esto corresponde a la realidad física si tenemos en cuenta que cuando las superficies abiertas se analizan con la EFIE, la incógnita es la suma de las corrientes en las dos caras de la superficie, que debe tener nula la componente normal al borde exterior.

  Como funciones peso suele utilizarse el método de Galerkin, realizando algunas aproximaciones que suponen constantes los valores del campo incidente y de los potenciales en el interior de los subdominios triangulares.

c) *Elementos finitos*

Los mallados en elementos finitos constituyen, posiblemente, la herramienta más potente y flexible para discretizar con precisión superficies arbitrarias muy complejas. Su utilización está muy extendida en problemas de ingeniería mecánica y civil (análisis de deformaciones de piezas sometidas a esfuerzos, presas, puentes, etc.). Por este motivo, existe un gran número de programas de diseño asistido por ordenador que incorporan modelado geométrico, mallado en elementos finitos, análisis numérico (de tipo mecánico) y postprocesado de resultados.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El método de los elementos finitos suele aplicarse con discretización volumétrica y formulación diferencial o variacional. Sin embargo, en este apartado se van a considerar únicamente los elementos finitos como las funciones base de una discretización superficial con formulación integral, lo cual se conoce con el nombre de *método de los elementos de contorno*.

En el método de los elementos finitos los subdominios de la discretización se denominan *elementos*. Con objeto de conseguir que las funciones base aproximen simultáneamente la geometría de la superficie y la corriente que fluye por ella, se utilizan polinomios que interpolan las coordenadas de la superficie y el valor de la corriente en unos puntos fijos llamados *nodos*. Para facilitar la construcción de los polinomios de interpolación, éstos se definen en función de coordenadas locales (ξ,η) sobre un plano bidimensional y con formas sencillas, como por ejemplo triángulos rectángulos o cuadrados (Fig. 8.22). De esta forma, las operaciones de integración y diferenciación de las funciones base también se simplifican, y se llevan a cabo mediante un cambio de variable del espacio real (x,y,z) a las coordenadas locales (ξ,η).

La interpolación de la geometría de un elemento y la corriente que fluye por él se realiza mediante las ecuaciones

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{N_g} \phi_i(\xi,\eta)\,\vec{r}_i \qquad \vec{J} = \sum_{i=1}^{N_f} \phi_i(\xi,\eta)\,\vec{J}_i \tag{8.90}$$

donde ϕ_i son funciones de interpolación definidas sobre un elemento que valen 1 en el nodo i-ésimo y 0 en los demás (Fig. 8.23) y se construyen mediante polinomios de interpolación de Lagrange en (ξ,η). Las $\vec{r}_i$ son las coordenadas del nodo i-ésimo y $\vec{J}_i$ el valor de la corriente en ese nodo; N_g y N_f son, respectivamente, los números de nodos del elemento

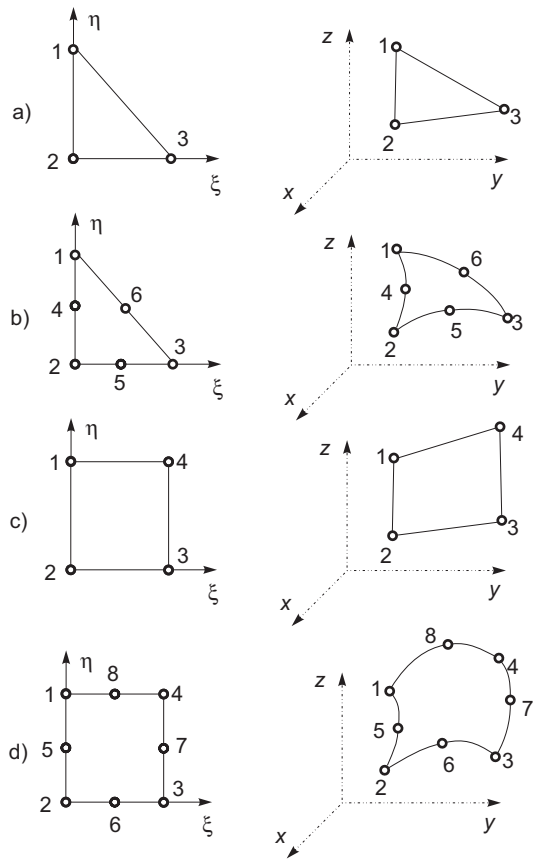


Fig. 8.22 Elementos finitos: a) triangulares lineales (orden 2), b) triangulares parabólicos (orden 3), c) cuadrangulares lineales y d) cuadrangulares parabólicos

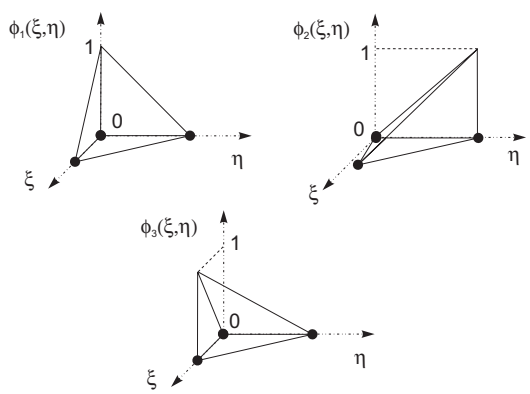


Fig. 8.23 Funciones de interpolación para elementos finitos triangulares lineales. En general $\phi_i(\xi,\eta) = 1$ en el nodo i-ésimo y 0 en los demás

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

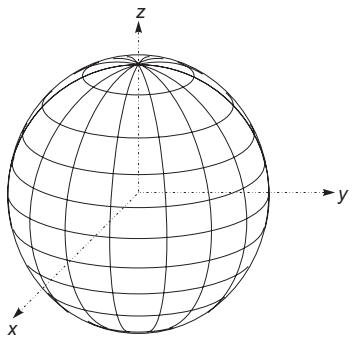


Fig. 8.24 Esfera modelada con elementos finitos triangulares y cuadrangulares de orden 3. Compárese con el modelo de facetas triangulares de la figura 8.20

utilizado para modelar la geometría de la superficie y del elemento que representa la función.

Se denomina orden del elemento al orden de los polinomios de interpolación ϕ_i. El número de nodos existentes en cada elemento aumenta con el orden del mismo. Los elementos finitos se denominan isoparamétricos cuando se utilizan las mismas funciones de interpolación para representar la geometría del elemento y la función incógnita (mismo orden de los polinomios $N_g = N_f$), superparamétricos cuando el orden en la aproximación de la superficie es mayor que el de la función ($N_g > N_f$) y subparamétricos cuando es menor.

Las integraciones y diferenciaciones de los operadores L_E y L_H se realizan sobre el elemento en coordenadas locales (ξ,η), utilizando el jacobiano de la transformación donde sea necesario. El operador se discretiza con las funciones peso habituales, normalmente con el método de colocación muestreando el campo en la posición de los nodos. Así, se obtiene el campo en el nodo i-ésimo como la suma de las contribuciones de las corrientes en todos los elementos

$$\vec{E}_i^s = \sum_{e=1}^{N_e} L_E\left(\vec{J}_e\right) \tag{8.91}$$

donde N_e es el número de elementos. Sustituyendo el valor de la corriente en el interior de cada elemento, $\vec{J}_e$, por la interpolación (8.90) de los valores de la corriente en los nodos, tenemos

$$\vec{E}_i^s = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_f} \vec{J}_{ej}\, L_E\left[\phi_j\,(\xi,\eta)\right] \tag{8.92}$$

y sumando para todos los elementos que comparten el mismo nodo (operación de ensamblado de matrices locales en una matriz global) resulta, tras cambiar la numeración local de los nodos (j) en cada elemento por una numeración global (n),

$$\vec{E}_i^s = \sum_{n=1}^{N_T} \vec{J}_n\, L_E\left[\phi_n\,(\xi,\eta)\right] \tag{8.93}$$

donde $\vec{J}_n$ representa la suma de las corrientes de los distintos elementos que fluyen por el nodo n-ésimo y N_T es el número total de nodos en toda la superficie. Para transformar la ecuación (8.93) en un sistema de ecuaciones escalares es necesario utilizar una incógnita para cada una de las tres componentes de la corriente en cada nodo. El resultado de aplicar la EFIE o MFIE a una ecuación del tipo (8.93) es un sistema de ecuaciones $Aa = b$ donde el vector columna incógnita contiene los valores de cada componente de la corriente en cada nodo.

La formulación de elementos finitos basados en nodos que se ha presentado en este apartado es de tipo escalar y, por tanto, se discretizan por separado las tres componentes de la corriente y del campo en cada nodo. Sin embargo, existe una formulación alternativa de tipo vectorial que se basa en las aristas de los elementos en lugar de los nodos. Esta versión de los elementos finitos interpola la corriente tangencial a una arista, de forma similar a como las funciones base de Rao, Glisson y Wilton interpolan la corriente normal a la misma.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

8.4 Métodos de alta frecuencia

Para el análisis de antenas y estructuras grandes en términos de la longitud de onda, como reflectores y antenas embarcadas, no son adecuados los métodos numéricos de baja frecuencia. Ello es debido a que la necesidad de discretizar la superficie o el volumen en elementos de tamaño del orden de $\lambda/10$ conduce a un sistema de ecuaciones de orden muy elevado, lo cual precisa un tiempo de CPU y una cantidad de memoria fuera del alcance de los ordenadores actuales.

Por ello, es necesario utilizar métodos aproximados que proporcionen resultados aceptables con un esfuerzo computacional reducido. Estos métodos se basan en la aplicación del teorema de equivalencia, situando corrientes equivalentes únicamente en aquellas superficies sobre las que se conozcan o se puedan estimar las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético (Fig. 8.3c). En el resto de las superficies, sobre las que no se conocen las corrientes equivalentes, se coloca un conductor eléctrico perfecto. De esta forma, las corrientes equivalentes desconocidas sobre este conductor no radian pero, en contrapartida, es necesario calcular la radiación de las corrientes equivalentes conocidas en presencia de una estructura conductora, en lugar de en el espacio libre (Fig. 8.3c). En este apartado denominaremos campo incidente $\vec{E}^i$ al radiado por las corrientes equivalentes conocidas en el espacio libre, campo total $\vec{E}$ al radiado en presencia de la estructura de la antena y campo dispersado $\vec{E}^s$ a la diferencia de ambos. La figura 8.25 muestra el ejemplo de un reflector en el que se han situado corrientes equivalentes sobre la apertura del alimentador, que radian en presencia de la estructura formada por el reflector y el propio alimentador.

Cuando las dimensiones características de la antena y de la estructura conductora, como longitud, anchura y radios de curvatura de las superficies, sean grandes comparadas con la longitud de onda, los campos reflejados en las superficies y los difractados en las aristas (Fig. 8.25) podrán calcularse mediante aproximaciones de alta frecuencia. Los análisis en alta frecuencia son de gran importancia, pues incluyen la mayoría de las antenas directivas (sin tener en cuenta agrupaciones).

La simplicidad de los métodos de alta frecuencia se debe a que consideran la difracción como un fenómeno local: cada punto de la estructura difracta los campos de forma independiente, sin interaccionar con los demás puntos de la superficie. Así, pueden aproximarse las corrientes inducidas (componentes tangenciales de los campos) en una región de la antena como debidas únicamente al campo incidente, sin incluir el campo rerradiado por otras partes de la antena. Sin embargo, existen algunas excepciones a la teoría de difracción local, en las que la interacción entre superficies eléctricamente grandes es muy importante. Ejemplos típicos son las dobles reflexiones entre las caras de un reflector diédrico y las reflexiones múltiples en el interior de cavidades.

En este apartado se estudiarán los métodos más generales para el análisis en alta frecuencia de la reflexión y de la difracción en superficies y aristas arbitrarias: los métodos de óptica física y de las corrientes equivalentes. Asimismo, se comentarán brevemente los métodos de *trazado de rayos* (óptica geométrica,

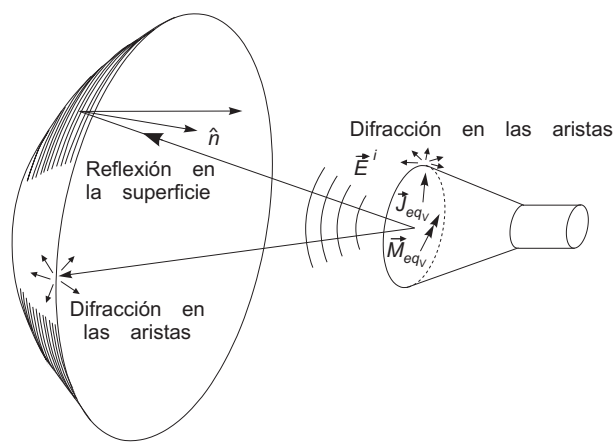


Fig. 8.25 Aplicación del teorema de equivalencia para el análisis en alta frecuencia de un reflector

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

teorías geométrica y física de la difracción, etc.), útiles para el análisis de geometrías sencillas con un esfuerzo computacional mínimo y de gran importancia histórica en el desarrollo de las técnicas de análisis electromagnético en alta frecuencia.

8.4.1 Óptica física

La teoría de óptica física (abreviado PO en inglés) se basa en aproximar las corrientes equivalentes desconocidas en cada punto de la estructura conductora por las que existirían sobre un plano infinito tangente a la superficie en este punto, si la superficie está directamente iluminada por el campo incidente, o por cero si no lo está (Fig. 8.26). En este caso, aplicando la teoría de imágenes para el plano infinito, se tiene

$$\vec{J}_{PO} = \hat{n} \times \vec{H} = \begin{cases} 2\,\hat{n} \times \vec{H}^i & \text{región iluminada} \\ 0 & \text{región de sombra} \end{cases} \tag{8.94}$$

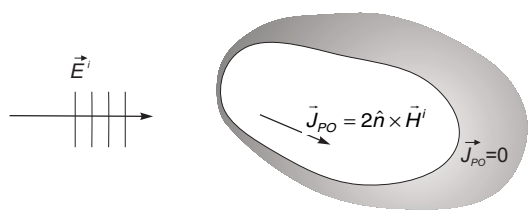


Fig. 8.26 Aproximación de las corrientes según óptica física

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie y $\vec{H}^i$ el campo magnético incidente en ese punto.

Obsérvese que la corriente inducida sobre la superficie conductora, igual a la corriente equivalente, se supone que en cada punto sólo depende del campo incidente $\left(\vec{H}^i\right)$ y de la geometría local de la superficie en este punto ($\hat{n}$): es la aproximación de difracción local en alta frecuencia. Por contra, en baja frecuencia la interacción entre distintos puntos de la superficie es muy importante y se expresa mediante la matriz de impedancias mutuas (8.53) del método de los momentos.

La radiación de las corrientes equivalentes (8.94) en el espacio libre, evaluada en campo lejano, es según (3.58)

$$\vec{E}^s = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iint_{S_{\text{iluminada}}} 2\,\hat{n} \times \vec{H}^i \; e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\, ds' \tag{8.95}$$

Dada la gran simplicidad de la formulación, la aproximación de óptica física es el método más utilizado en la actualidad para el análisis de la reflexión en superficies arbitrarias en la región de alta frecuencia. El coste computacional se reduce a una integración numérica en dos dimensiones y es muy inferior al que requieren los métodos numéricos. De esta forma, pueden analizarse antenas con reflectores de tamaño del orden de centenares o miles de longitudes de onda.

En la integral de óptica física (8.95) es habitual que la fase del integrando varíe muy rápidamente sobre la superficie. Las partes real e imaginaria del integrando varían aproximadamente como sinusoides, y los ciclos negativos tienden a cancelar los positivos. Sobre las superficies curvadas suele haber un *punto de fase estacionaria* en el que la fase varía lentamente, presentando un máximo o un mínimo. Como el valor del integrando en este punto no puede cancelarse, como sucede en los puntos de variación rápida de fase, ésta es la contribución principal al valor de la integral. La aproximación de fase estacionaria consiste en calcular la integral desarrollando la exponencial de fase

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

en serie de Taylor para $k \to \infty$ y realizar analíticamente la integral sobre el primer término del desarrollo. El resultado para integrales de una dimensión es

$$\lim_{k\to\infty} \int g(x)\, e^{-jkf(x)}\, dx = \left[\frac{2\pi}{jkf''(x_s)}\right]^{1/2} g(x_s)\, e^{-jkf(x_s)}, \qquad f'(x_s) = 0 \tag{8.96}$$

Obsérvese que el valor de la integral es igual al valor del integrando en el punto de fase estacionaria x_s, multiplicado por un factor que depende de la derivada segunda de la variación de fase. Sustituyendo la versión bidimensional de (8.96) en (8.95) se obtiene un resultado que puede interpretarse como si la reflexión se produjera únicamente en el punto de fase estacionaria y no en toda la superficie. Esta conclusión tiene sentido físico, pues es fácil demostrar que en el punto de fase estacionaria los rayos incidente (de la fuente a la superficie) y reflejado (de la superficie al observador) cumplen la ley de Snell de reflexión en un plano conductor infinito (Fig. 8.27). Es por este motivo que al punto de fase estacionaria se le denomina también *punto de reflexión especular*. Las teorías de trazado de rayos, como óptica geométrica, se basan en obtener la situación de los puntos de reflexión especular sobre la superficie y sumar por separado su contribución al campo reflejado total, evitando el cálculo de la integral de óptica física.

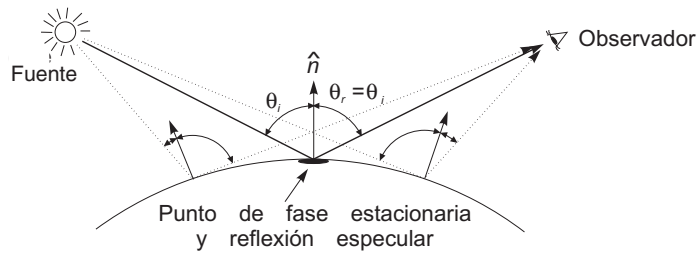


Fig. 8.27 La ley de Snell se cumple solamente en el punto de la superficie en el que la longitud total del camino fuente-superficie-observador es mínima (fase estacionaria)

En la mayoría de los casos, la corriente de óptica física no es nula en los límites de la integral (8.95), por lo que no puede cancelarse la fase de variación rápida como sucede en el interior del dominio de integración. Por tanto, el valor de la integral es igual a la contribución de los puntos de reflexión especular más la contribución de los límites de integración, que en general pueden ser de dos tipos:

- Límites debidos a la transición entre la región iluminada, donde $\vec{J}_{PO} = 2\hat{n} \times \vec{H}^i$, y la región de sombra, donde $\vec{J}_{PO} = 0$. Como esta discontinuidad en la corriente no existe en la realidad física, sino que su valor disminuye gradualmente, la contribución del límite de la integral en la transición entre regiones iluminada y de sombra introduce un error en el cálculo del campo reflejado.
- Límites debidos a la terminación brusca de la superficie en una arista. La contribución del límite de la integral de óptica física constituye una parte del campo difractado por la arista, debida a la superficie que termina en la misma. La otra parte, que proviene de la propia arista, debe calcularse por el método de las corrientes equivalentes.

La aproximación de óptica física proporciona muy buenos resultados para el análisis de la reflexión en grandes superficies. Sin embargo, presenta una serie de limitaciones que en algunos casos pueden introducir errores importantes:

- Debido a que se aproximan las componentes tangenciales del campo por las que habría sobre un plano infinito, se comete un error apreciable en aquellos puntos de la superficie en los que algún radio de curvatura sea menor que la longitud de onda.
- En las cercanías de una arista, la corriente inducida sobre la superficie tampoco puede aproximarse correctamente por la que existiría sobre un plano infinito tangente y, por tanto, el

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

resultado de óptica física no predice adecuadamente el fenómeno de difracción en aristas. En el caso de antenas de reflector, los resultados de óptica física son válidos únicamente en direcciones de observación próximas al lóbulo principal del diagrama, en las que predomina la contribución de la reflexión superficial sobre la difracción en las aristas que limitan la superficie reflectora. En la zona de lóbulos secundarios alejados del principal el valor del campo reflejado por la superficie es pequeño y, por tanto, es necesario añadir la contribución de las aristas, calculada por otros métodos.

- Otra fuente de error aparece al suponer que las corrientes equivalentes en la zona de sombra (no iluminada directamente por el campo incidente) son nulas, lo cual sólo es cierto en muy alta frecuencia. Esto significa que se desprecia el efecto de las ondas de superficie que dan la vuelta al objeto por la zona de sombra (*creeping waves* u ondas rampantes) e interfieren al campo reflejado por la zona iluminada. La contribución de estas ondas decrece muy rápidamente con la frecuencia y en muchos casos puede despreciarse. Sin embargo, deben tenerse en cuenta para analizar antenas en presencia de superficies suavemente curvadas, como un monopolo situado sobre el fuselaje de un avión. Para ello se utilizan métodos asintóticos de trazado de rayos que tengan en cuenta este efecto, como las teorías geométrica y uniforme de la difracción (GTD y UTD).
- La contribución de la discontinuidad artificial de las corrientes de óptica física en la transición entre la zona iluminada y la de sombra produce oscilaciones espurias en el valor calculado de la integral (8.95). Estas oscilaciones no aparecen si se calcula el campo a partir del principio de fase estacionaria (8.96) y los puntos de reflexión especular.

8.4.2 Método de las corrientes equivalentes (MEC)

El método de las corrientes equivalentes se basa en aproximar la radiación de la distribución superficial desconocida de corrientes equivalentes en las proximidades de una arista por la radiación de un filamento de corriente conocida, situado a lo largo de la arista. El campo eléctrico radiado a grandes distancias por un filamento de corrientes eléctrica I y magnética M es

$$\vec{E}^s = \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr} \int \left[\eta I \hat{r} \times \left(\hat{r} \times \hat{t} \right) + M \left(\hat{r} \times \hat{t} \right) \right] e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} \, dl' \tag{8.97}$$

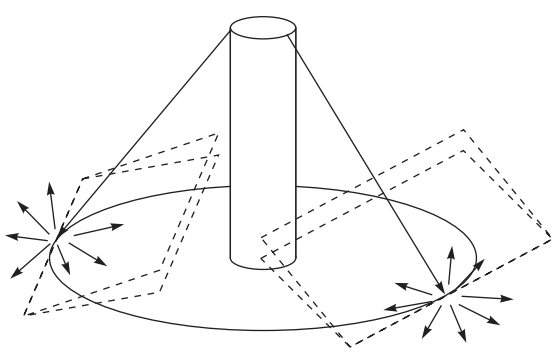


Fig. 8.28 Aproximación local de una arista curva por cuñas infinitas tangentes. Si el ángulo interno de la cuña es nulo ésta se reduce a un semiplano infinito

donde la integral se extiende solamente sobre la porción de la arista iluminada por el campo incidente, $\hat{t}$ es el vector unitario tangente a la arista en cada punto, $\vec{r}'$ el punto de integración sobre la arista, $\hat{r}$ la dirección de observación y η la impedancia de onda en el medio. Debe destacarse que estas corrientes equivalentes de arista son ficticias y no tienen una naturaleza física -dependen de la dirección de observación-; lo cual no sucede con las corrientes equivalentes superficiales, que coinciden con las corrientes inducidas sobre la superficie conductora.

El valor de las corrientes equivalentes de arista I, M se obtiene igualando la

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

expresión (8.97) al campo exacto calculado analíticamente para un objeto de geometría canónica que contenga una arista, como es la cuña infinita. Al ser la difracción un fenómeno local en alta frecuencia, la difracción en cada punto de una arista curvada depende únicamente del campo incidente y de la geometría local. Si el radio de curvatura de la arista es eléctricamente grande, cada punto de la arista puede aproximarse localmente por la arista recta de una cuña infinita tangente (Fig. 8.28) y, por tanto, las corrientes equivalentes de arista serán las mismas en cada punto de la arista curvada que en la cuña infinita tangente a ese punto.

Habitualmente, las corrientes equivalentes de arista se expresan en función de unos *coeficientes de difracción de longitud incremental*, abreviados como ILDC en inglés,

$$I = \frac{1}{jk\eta} D_{IE}\left(\vec{E}^i \cdot \hat{t}\right) + \frac{1}{jk} D_{IH}\left(\vec{H}^i \cdot \hat{t}\right)$$
$$M = \frac{\eta}{jk} D_{MH}\left(\vec{H}^i \cdot \hat{t}\right) \tag{8.98}$$

Sustituyendo las corrientes (8.98) en la integral de radiación (8.97) se obtiene la formulación del campo difractado en función de los ILDC

$$\vec{E}^s = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\int\left[D_{IE}\left(\vec{E}^i \cdot \hat{t}\right)\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\hat{t}\right) + D_{IH}\left(\eta\vec{H}^i \cdot \hat{t}\right)\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\hat{t}\right) + D_{MH}\left(\eta\vec{H}^i \cdot \hat{t}\right)\left(\hat{r}\times\hat{t}\right)\right] e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}\, dl' \tag{8.99}$$

donde se observa que los ILDC representan la contribución a las dos polarizaciones del campo total de un elemento diferencial de arista, separada en las componentes producidas por los campos eléctrico y magnético incidentes tangentes a la arista.

Análogamente a la integral de superficie de óptica física, en alta frecuencia la integral de arista (8.99) también presenta puntos de fase estacionaria. Por ello, la integral puede calcularse a partir del valor de los coeficientes de difracción en los puntos de fase estacionaria y la contribución de los límites de integración (vértices de la arista o transición artificial entre región iluminada y de sombra). En los puntos de fase estacionaria los rayos difractados hacia el observador forman con la arista el mismo ángulo que el rayo incidente (generalización de la ley de Snell), lo cual define un cono de direcciones de difracción denominado cono de Keller (Fig. 8.29).

Las teorías de trazado de rayos para análisis de aristas, como la teoría geométrica de la difracción, se basan en obtener los puntos de fase estacionaria sobre la arista en los que el cono de Keller coincide con la dirección de observación y sumar su contribución al campo difractado total; evitan así el cálculo numérico de la integral de línea sobre la arista.

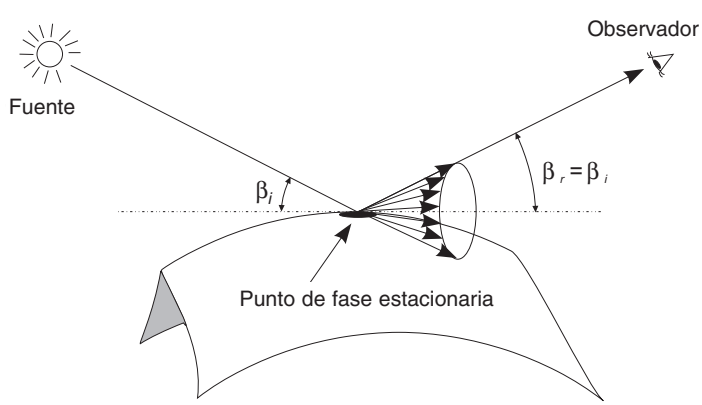


Fig. 8.29 Punto de fase estacionaria sobre una arista y cono de Keller de rayos difractados

Existen varias versiones de los coeficientes de difracción de longitud incremental. Algunas incluyen la contribución de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

óptica física del límite de la superficie que termina en la arista. Como en el caso de una cuña infinita esta superficie es un semiplano, su contribución en la dirección de reflexión especular es infinita y, para esta dirección de observación, los ILDC presentan una singularidad. Esto no sucede con las formulaciones de los ILDC que no incluyen la superficie lateral de la cuña; pero en ellos es necesario calcular la contribución de la superficie finita real próxima a la arista por otro método, habitualmente óptica física, y añadirla a la contribución de la arista.

En general, la formulación de los ILDC es muy compleja y, para simplificar, suelen utilizarse formulaciones más sencillas, que son válidas únicamente para direcciones de observación en el cono de Keller de algún punto de fase estacionaria. En este caso, los resultados coinciden con los obtenidos por los métodos de trazado de rayos. Las siguientes tablas resumen los tipos de coeficientes de difracción más utilizados para el análisis de antenas, la formulación de los cuales puede encontrarse en la literatura [Knott, Schaffer & Tuley'93].

a) ILDC que incluyen la contribución del límite de la integral de superficie de óptica física. Para direcciones de observación en el cono de Keller el resultado coincide con el de la teoría geométrica de la difracción (GTD).
Como ejemplo, la expresión de los coeficientes de difracción de Knott y Senior para el caso de un semiplano infinito, situado en el plano *xy* con la arista a lo largo del eje *z*, es

$$D_{IE} = \frac{1}{\text{sen}^2\,\theta_i}\left(\frac{1}{\cos\frac{\phi_r-\phi_i}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\phi_r+\phi_i}{2}}\right)$$

$$D_{IH} = 0 \qquad (8.100)$$

$$D_{MH} = \frac{1}{\text{sen}^2\,\theta_i}\left(\frac{1}{\cos\frac{\phi_r-\phi_i}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\phi_r+\phi_i}{2}}\right)$$

donde θ_i, ϕ_i son las coordenadas esféricas de la dirección de incidencia y θ_r, ϕ_r las de la dirección de observación. Obsérvese que son singulares cuando $\phi_r = \pi \pm \phi_i$, es decir, cuando la dirección de observación coincide con la reflexión especular de la superficie del plano infinito.

NOMBRE	DIRECCIONES DE OBSERVACIÓN VÁLIDAS	FORMULACIÓN
GTD (Ryan y Peters, Knott y Senior)	Cono de Keller	Sencilla
Michaeli (1984)	Todo el espacio	Complicada

Tabla 8.2 Complejidad de los ILDC que incluyen la contribución de óptica física

b) ILDC que no incluyen la contribución del límite de la integral de superficie de óptica física. Para direcciones de observación en el cono de Keller el resultado coincide con el de la teoría física de la difracción (PTD).
Como ejemplo, la expresión de los coeficientes de difracción de Ando para el mismo semiplano infinito es

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$
\begin{aligned}
D_{IE} &= 4\frac{\operatorname{sen}\frac{\phi_i}{2}}{\operatorname{sen}^2\theta_i}\,\frac{\cos\frac{\phi_i}{2}-\operatorname{sen}\frac{\phi_r}{2}}{\cos\phi_i+\cos\phi_r} \\
D_{IH} &= -2\frac{\cos\theta_i}{\operatorname{sen}^2\theta_i} \\
D_{MH} &= 4\frac{\cos\frac{\phi_r}{2}}{\operatorname{sen}^2\theta_i}\,\frac{\cos\frac{\phi_i}{2}-\operatorname{sen}\frac{\phi_r}{2}}{\cos\phi_i+\cos\phi_r}
\end{aligned}
\qquad (8.101)
$$

donde, ahora, no aparece la singularidad en la dirección de reflexión especular de la superficie plana infinita. La contribución de óptica física no está incluida y debe calcularse por separado para la superficie finita de la antena y sumarse al resultado de difracción en la arista.

NOMBRE	DIRECCIONES DE OBSERVACIÓN VÁLIDAS	FORMULACIÓN
PTD (Ufimtsev, Ando)	Cono de Keller	Sencilla
Mitzner (1974)	Todo el espacio	Complicada, presenta singularidades
Michaeli (1986)	Todo el espacio	Muy complicada, pero con menos singularidades

Tabla 8.3 Complejidad de las distintas formulaciones de los ILDC que no incluyen la contribución de óptica física

8.4.3 Métodos asintóticos o de trazado de rayos

Óptica geométrica

El método de óptica geométrica es el más antiguo de los de alta frecuencia. Se desarrolló originalmente para analizar la propagación de la luz a frecuencias ópticas, en las que no es necesario considerar la naturaleza ondulatoria de los campos electromagnéticos. De hecho, la teoría de óptica geométrica proviene de considerar el transporte de energía a lo largo de un tubo de rayos, sin precisar si la energía se propaga en forma de ondas o de partículas. Al no tener en cuenta la naturaleza ondulatoria de los campos, el método de óptica geométrica no es capaz de predecir la difracción, sino únicamente la reflexión en superficies de curvatura suave, y obtiene siempre regiones de sombra con transiciones abruptas. La teoría de óptica geométrica se basa en los siguientes conceptos:

- Las líneas de flujo de energía o *rayos* son rectas en un medio homogéneo. En medios heterogéneos, siguen el camino de longitud óptica estacionaria, es decir, mínima (principio de Fermat).
- Los rayos son reflejados por la superficie conductora según la ley de Snell. En consecuencia, a un punto de observación determinado llegan únicamente los rayos provenientes de los puntos de reflexión especular (Fig. 8.27) y no del resto de la superficie.
- La variación de la amplitud del campo a lo largo de un tubo de rayos está determinada por la ley de conservación de la energía. Por tanto, la amplitud del campo es inversamente proporcional a la sección recta transversal del tubo. Esta última es nula cuando el tubo de rayos

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

converge en una recta o un punto. Este conjunto de puntos del espacio en los que converge un número infinito de rayos se llama *cáustica* y, en ellos, la amplitud del campo predicha por las técnicas de trazado de rayos es infinita.

El campo reflejado, calculado mediante la aproximación de óptica geométrica, coincide con el obtenido mediante la evaluación de fase estacionaria (8.96) de la integral de óptica física (8.95). A pesar de la sencillez de la formulación y del concepto de óptica geométrica, el cálculo de la reflexión en una superficie arbitraria no es un problema trivial. Las principales dificultades que aparecen son la identificación de los puntos de reflexión especular y el cálculo de la derivada segunda del frente de fase en estos puntos. Además, la aparición de cáusticas es frecuente en las geometrías más habituales, lo cual produce campos reflejados infinitos. Por todo ello, la aproximación de óptica geométrica se utiliza en la práctica para el análisis de radiación de antenas cuya superficie tenga una forma muy sencilla, como se hizo en el capítulo 6 al analizar los reflectores parabólicos y las lentes.

Teoría geométrica de la difracción (GTD)

Keller introdujo a mediados de los años 50 la teoría geométrica de la difracción. Su objeto es el cálculo de los campos difractados en aristas en alta frecuencia, los cuales no pueden obtenerse con las aproximaciones de óptica geométrica ni de óptica física. La teoría geométrica de la difracción también se basa en el trazado de rayos, como la óptica geométrica, pero ahora se introducen los rayos difractados por las aristas. Al incidir un rayo sobre una cuña conductora se difracta formando un ángulo de reflexión con la arista igual al de incidencia. A diferencia de lo que sucede en las superficies planas, en las que hay una sola dirección de reflexión, ahora hay infinitas direcciones que forman con la arista un ángulo igual al ángulo de incidencia. Estas direcciones de difracción se encuentran sobre la superficie del cono de Keller (Fig. 8.29). Para comprobarlo, se han llevado a cabo experimentos con rayos láser incidiendo sobre una hoja de afeitar y se ha observado que la luz difractada realmente se encuentra confinada en el cono de Keller.

Para determinar la amplitud de los rayos difractados en todas las direcciones, Keller recurrió a la solución canónica exacta de la cuña infinita, debida a Sommerfeld (1896) y Pauli (1938). La mayoría de las técnicas de alta frecuencia se basan en realizar un desarrollo asintótico de esta expresión cuando la longitud de onda tiende a cero y tomar el primer término significativo. La formulación asintótica del campo difractado por la arista suele expresarse en función de coeficientes de difracción, coincidiendo con el resultado de la integral de línea del método de las corrientes equivalentes evaluada para observación en el cono de Keller mediante la aproximación de fase estacionaria.

Para obtener el campo difractado, en primer lugar, es necesario localizar los puntos en las aristas cuyo cono de Keller contenga alguna dirección que coincida con la dirección de observación, lo cual constituye un problema difícil, salvo en casos particulares con geometrías muy sencillas. El hecho de poder calcular los campos únicamente para las direcciones contenidas en conos de Keller constituye una limitación importante, común a todas las técnicas de trazado de rayos como la óptica geométrica. En éstas, no se obtiene el campo difractado más que en puntos de observación a los que llega algún rayo reflejado (óptica geométrica) o difractado (GTD).

Además, también tiene en común con óptica geométrica la predicción de campos infinitos en las cáusticas cuando llegan infinitos rayos difractados al punto de observación. Este fenómeno sucede con frecuencia al analizar cuerpos de revolución que contienen una arista circular, como los reflectores parabólicos simétricos. En este caso, un número infinito de rayos se difracta en la arista en la dirección del eje del paraboloide, y forman una cáustica.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Otra limitación es la singularidad de los coeficientes de difracción en las direcciones de observación que coinciden con la reflexión especular de las caras planas laterales de la cuña. Esta singularidad ya aparece en las expresiones originales de Sommerfeld para cuñas infinitas y es debida, como se ha indicado en la sección 8.4.2, a la contribución del límite de la integral de superficie de óptica física. Esto constituye un problema importante, debido al gran número de direcciones de observación singulares que aparecen al analizar una estructura complicada.

Existen formulaciones alternativas de la teoría geométrica de la difracción para el estudio, mediante trazado de rayos de otras fuentes de difracción como ondas rampantes, discontinuidades en la curvatura de la superficie, etc.

Teorías uniformes de la difracción

Las singularidades en los coeficientes de difracción de GTD pueden evitarse con una formulación más exacta de los mismos. Kouyoumjian y Pathak con la teoría uniforme de la difracción (UTD) y Lee y Deschamps con la teoría asintótica uniforme (UAT) proponen distintas soluciones al problema.

La teoría uniforme de la difracción obtiene una expresión en la que los coeficientes de difracción de Keller aparecen multiplicados por una integral de Fresnel, que vale cero en la dirección de reflexión especular y se aproxima a uno al alejarse de ella, eliminando así la singularidad. La solución UAT de Lee se basa en un desarrollo asintótico diferente de la solución canónica para la cuña infinita, y se obtienen resultados similares a los de Kouyoumjian y Pathak, aunque con una formulación distinta.

Sin embargo, todavía quedan pendientes de solución en las teorías uniformes el problema de las cáusticas y la restricción de la dirección de observación al cono de Keller.

Teoría física de la difracción (PTD)

La teoría física de la difracción, desarrollada por Ufimtsev simultáneamente a la teoría de Keller, obtiene resultados equivalentes evitando el problema de la singularidad. Para ello, también se basa en la solución canónica de Sommerfeld para la cuña infinita, de la que sustrae la contribución de los semiplanos infinitos que forman la superficie lateral de la cuña. Como la singularidad en los campos difractados en GTD proviene de esta última contribución, el resultado de PTD es finito y contiene únicamente la difracción en la arista. Por ello, al resultado de PTD se le deben sumar los campos reflejados en las superficies, que pueden calcularse, por ejemplo, con la aproximación de óptica física.

Puede parecer paradójico que se obtenga la difracción en las aristas sustrayendo la contribución de óptica física de la solución canónica de la cuña infinita y, posteriormente, se le sume la contribución de óptica física para obtener el resultado final. Sin embargo, el resultado será finito, pues la contribución de óptica física que se sustrae es la de los semiplanos infinitos que forman la cuña, y por tanto infinita, mientras que la que se suma es la contribución de las superficies presentes en la antena, que son finitas.

En resumen, la teoría física de la difracción proporciona los campos difractados únicamente por las aristas, de forma que se evita el problema de las singularidades en los coeficientes de difracción, pero no las otras limitaciones de GTD, como son la restricción al cono de Keller y los resultados infinitos en las caústicas.

La tabla siguiente resume las contribuciones al campo reflejado y difractado total, calculadas por los métodos de trazado de rayos y de óptica física:

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

CAMPO TOTAL			
Campo incidente	Campo dispersado		
	Puntos de reflexión especular en la superficie	Bordes de la superficie junto a las aristas	Arista
Óptica geométrica		Teoría geométrica de la difracción	
	Óptica física		Teoría física de la difracción

Tabla 8.4 Información sobre los campos aportada por los distintos métodos

Aunque los métodos de corrientes equivalentes constituyen la solución más completa para el análisis de la difracción en aristas en alta frecuencia, quedan todavía varios problemas por resolver:

- Los coeficientes de difracción se obtienen a partir de la solución canónica de la cuña infinita, que no tiene vértices. En la práctica, las aristas son finitas y, por tanto, todavía falta por considerar el efecto de la difracción en los vértices. Otra contribución de la misma importancia que la difracción en vértices, que no se ha tenido en cuenta, es la de las discontinuidades en la curvatura de las superficies.
- Las aproximaciones de alta frecuencia suponen que la contribución de cada centro de difracción (punto de reflexión especular, arista, etc.) es independiente de los demás. Sin embargo, hay situaciones en las que aparece una interacción múltiple entre dos o más centros de difracción que no puede despreciarse. En este caso, es necesario modificar la formulación de alta frecuencia, habitualmente GTD, para tener en cuenta esta interacción.

8.4.4 Ondas de superficie

Otra contribución importante a la difracción en alta frecuencia es la reflexión de ondas de superficie en discontinuidades, que ninguno de los métodos anteriores tiene en cuenta. Cuando la dirección de incidencia sobre una superficie eléctricamente grande es casi rasante, puede aparecer una onda de superficie que se propaga en la misma dirección que el campo incidente y radia en la dirección longitudinal, de la misma forma que las antenas de hilo largo y de onda progresiva. Cuando la onda alcanza una discontinuidad en la superficie (arista, ranura, cambio de curvatura, etc.) aparece una onda reflejada que radia también en la dirección longitudinal, pero en sentido contrario. Este efecto es particularmente importante en superficies largas y de curvatura suave que terminan de forma abrupta en una arista como, por ejemplo, las alas de un avión.

Un problema adicional es que la onda de superficie acopla los diversos centros de difracción existentes sobre la superficie, de forma que ya no radian el campo incidente independientemente y las técnicas de alta frecuencia dejan de ser aplicables. Una solución consiste en aplicar repetidamente una técnica de trazado de rayos (GTD) para obtener las interacciones múltiples entre distintas aristas. Como la GTD ya lleva implícitas las corrientes inducidas en las superficies limitadas por las aristas, se predice bastante bien el efecto de la onda de superficie en estructuras relativamente simples. Sin embargo, cuando la estructura es compleja la cantidad de rayos que deben considerarse es enorme y el problema de difracción múltiple se hace intratable.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

8.4.5 Análisis en alta frecuencia de superficies arbitrarias

Modelado por facetas

La técnica más utilizada en la actualidad para el análisis de superficies arbitrarias consiste en modelar la superficie con facetas poligonales planas, habitualmente triangulares (Fig. 8.20) o cuadrangulares (Fig. 8.18). Al tratarse de facetas planas limitadas por aristas rectilíneas, es sencillo calcular la integral de óptica física (8.95) sobre la superficie de las facetas y la del método de las corrientes equivalentes (8.97) a lo largo de las aristas. El campo difractado en la superficie completa se obtiene sumando coherentemente las contribuciones de cada una de las facetas y aristas iluminadas.

Debe destacarse que en este tipo de modelo aparecen dos tipos de aristas: las aristas reales del modelo, como por ejemplo el borde de salida de las alas de un avión, y las aristas artificiales debidas a la discretización de la superficie real curvada. El campo difractado por estas últimas corrige en parte el error cometido al discretizar una superficie curvada y aproximar el campo reflejado como la suma de las contribuciones de las facetas.

La contribución de las reflexiones dobles entre facetas, que es una fuente importante de polarización cruzada, puede analizarse utilizando expresiones analíticas aproximadas que tengan en cuenta la interacción entre un par de facetas arbitrario. Para evitar analizar todos los posibles pares de facetas se realiza una selección previa de pares candidatos a sufrir doble reflexión, basada en criterios elementales de óptica geométrica. Aunque de esta forma se reduce, en gran medida, el número de pares de facetas que se deben analizar, el proceso es computacionalmente muy costoso.

Otro problema importante surge del hecho de que la integral de superficie se extiende únicamente sobre la zona iluminada del objeto. Es por ello necesaria la distinción entre facetas iluminadas y oscuras. Gran parte de las facetas sombreadas se detectan fácilmente teniendo en cuenta que la normal exterior a la faceta forma un ángulo con la dirección de propagación de la onda incidente menor que 90º. La detección de facetas eclipsadas o ensombrecidas por otras partes del objeto es mucho más difícil y computacionalmente costosa, y requiere el uso de algoritmos especializados en la eliminación de partes ocultas. El problema se complica si se considera además la contribución de las facetas parcialmente eclipsadas, que deben ser divididas en una subfaceta iluminada y otra oscura.

El inconveniente principal del modelado por facetas planas reside en que la superficie real debe ser aproximada por el modelo facetizado con una precisión de al menos $\lambda/16$, por lo que el número de facetas crece con el tamaño y complejidad del objeto, y es muy elevado en el caso de estructuras complejas, como aviones o barcos. Ello eleva enormemente los requerimientos de capacidad de almacenamiento masivo, de memoria RAM y de tiempo de CPU.

Modelado mediante superficies paramétricas

Para el análisis de superficies arbitrarias también se han utilizado otros métodos de modelado mucho más precisos que la técnica de facetas planas, como son los modelos de superficies paramétricas. Sin embargo, el cálculo de las integrales de óptica física y del método de las corrientes equivalentes, o bien la localización de puntos de reflexión especular y de conos de Keller, son complicados debido tanto a la dificultad de obtener las características geométricas de las superficies y aristas en cada punto de las mismas como a la dificultad de identificar las superficies y aristas iluminadas.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Método de procesado gráfico

Recientemente, se ha desarrollado en el grupo de antenas, microondas y radar de la Universitat Politècnica de Catalunya un nuevo método de análisis de superficies arbitrarias en alta frecuencia que evita algunos de los problemas del modelado por facetas. Esta técnica, denominada *GRECO* (*GRaphical Electromagnetic COmputing*), se basa en utilizar las capacidades gráficas de las estaciones de trabajo modernas para identificar la parte iluminada de las superficies y de las aristas.

Para ello, en lugar de procesar la lista de facetas y aristas del modelo, se procesa una imagen del mismo en la pantalla de la estación gráfica vista por un observador situado sobre la fuente de iluminación. Como para obtener la imagen la estación de trabajo elimina las superficies no visibles por el observador, sólo aparecerán en la pantalla las superficies iluminadas por el campo incidente y solamente éstas serán procesadas. La eliminación de las superficies ocultas se lleva a cabo por *hardware* en las estaciones de trabajo más potentes, con lo que la generación de la imagen es instantánea. De esta forma, se evita el difícil problema de la identificación de las superficies iluminadas.

Una ventaja adicional reside en que la estación de trabajo proporciona las características geométricas de la superficie (vector normal, distancia al observador y vector tangente a las aristas) en cada pixel de la pantalla, con lo que se evita la dificultad de calcularlas por otros medios. Como el procesado de la imagen no depende del tipo de modelo geométrico que se ha utilizado para obtenerla, no es en absoluto necesario emplear el modelo de facetas planas y por ello se utiliza el modelo de superficies paramétricas, mucho más preciso y compacto en el almacenamiento de la información.

La utilización de esta nueva técnica permite analizar con relativa facilidad la reflexión y difracción en estructuras complicadas, como la superficie de un avión o reflectores conformados (no parabólicos) diseñados con objeto de optimizar algún parámetro del diagrama de radiación.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

8.1 ¿Cuál de los siguientes tipos de métodos numéricos utiliza la función de Green en su formulación?
a) Métodos de diferencias finitas.
b) Métodos integrales.
c) Método de Rayleigh-Ritz.
d) Métodos de alta frecuencia.

8.2 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto al principio de equivalencia es falsa?
a) El principio de equivalencia volumétrica puede utilizarse para calcular los campos en un volumen homogéneo.
b) El principio de equivalencia volumétrica puede utilizarse para calcular los campos en un volumen heterogéneo.
c) El principio de equivalencia superficial puede utilizarse para calcular los campos en un volumen homogéneo.
d) El principio de equivalencia superficial puede utilizarse para calcular los campos en un volumen heterogéneo.

8.3 Cuando se calcula numéricamente el valor de una integral cuyo integrando es singular, el valor obtenido es:
a) El valor principal de Cauchy de la integral.
b) La integral en un intervalo infinitesimal que contiene la singularidad.
c) La suma de los valores *a* y *b.*
d) Ninguno de los anteriores.

8.4 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa respecto a la EFIE y la MFIE?
a) Cuando se plantean sobre una superficie cerrada, ambas son resonantes a distinta frecuencia.
b) La EFIE puede aplicarse a superficies abiertas.
c) La MFIE puede aplicarse a superficies abiertas.
d) Ambas pueden aplicarse a superficies cerradas.

8.5 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa respecto al método de los momentos, para resolver una ecuación funcional $LX = Y$?
a) Para una cierta discretización de X, la norma del residuo $Y\text{-}LX_N$ es siempre mínima.
b) La proyección del residuo en el subespacio de funciones peso es siempre mínima.
c) Funciones peso de la forma $W_i = Lx_i$, donde x_i son las funciones base, producen siempre norma del residuo mínima.
d) Si el operador L es autoadjunto, el método de Galerkin produce una matriz $\langle w_i, Lx_j \rangle$ simétrica.

8.6 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa respecto al método del gradiente conjugado para resolver una ecuación funcional $LX = Y$?
a) Para una cierta discretización de X, la norma del residuo $Y\text{-}LX_N$ es siempre mínima.
b) El máximo número de iteraciones es igual al número de grados de libertad N, en ausencia de errores de redondeo.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

c) En presencia de errores de redondeo, la convergencia empeora cuando la matriz A que discretiza el operador L está bien condicionada.
d) En aplicaciones electromagnéticas, suele ser suficiente un número de iteraciones muy inferior al número de grados de libertad N.

8.7 ¿Cuál de los siguientes métodos es más adecuado para analizar la difracción en un cubo dieléctrico heterogéneo de tamaño eléctrico relativamente grande?
a) Equivalencia superficial con método de los momentos.
b) Equivalencia volumétrica con método de los momentos.
c) Equivalencia volumétrica con gradiente conjugado y FFT.
d) Métodos de alta frecuencia.

8.8 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a las funciones base del método de los momentos es falsa?
a) Las funciones pulso producen singularidades de carga.
b) Las funciones triángulo realizan una interpolación lineal de la incógnita.
c) Las funciones sinusoidales a trozos permiten el cálculo analítico de la integral de Pocklington.
d) Las funciones tejado (*rooftop*) producen singularidades de carga.

8.9 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a las funciones base del método de los momentos es falsa?
a) Funciones base hilo para modelar una corriente superficial permiten un cálculo preciso del campo proximo.
b) Las funciones base de Rao, Glisson y Wilton no producen singularidades de carga.
c) La carga total en una superficie discretizada con funciones base de Rao, Glisson y Wilton es nula.
d) Los elementos finitos superficiales (elementos de contorno) permiten una buena aproximación de la geometría y de la corriente.

8.10 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones referidas a los métodos de alta frecuencia es falsa?
a) Son válidos para superficies eléctricamente grandes y con radios de curvatura mayores que la longitud de onda.
b) Consideran la difracción electromagnética como un fenómeno local.
c) La aproximación de óptica física (PO) predice correctamente la reflexión en superficies y la difracción en bordes.
d) La teoría física de la difracción (PTD) no tiene en cuenta la contribución de óptica física y es válida unicamente en el cono de Keller.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

8.1 Dada una onda plana en el espacio libre con polarización lineal en $\hat{x}$, que se propaga en la dirección $\hat{z}$, aplicando el teorema de equivalencia sobre la superficie S definida por el plano $z = 0$ obtener el campo radiado en todo el espacio por las corrientes equivalentes:

a) Considerando el interior de la superficie S como el semiespacio $z<0$.

b) Considerando el interior de la superficie S como el semiespacio $z>0$.

NOTA: Utilizar la expresión del espectro de ondas planas de la función de Green:

$$\frac{e^{\pm jkR}}{4\pi R} = \pm\frac{j}{8\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm j(k_x x+k_y y+k_z z)}}{k_z}dk_x dk_y\,, \qquad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

y para simplificar los cálculos suponer $kR>>1$. No suponer a priori que el campo es nulo en el interior de S, sino comprobarlo mediante el cálculo de la integral de radiación.

8.2 Resolver por el método de los momentos la ecuación integral

$$\int_0^z f(z)\,dz = \frac{z^3}{3}$$

en el intervalo $0 \le z \le 1$. Utilizar funciones base pulso junto con los métodos de colocación y Galerkin. Comparar el error relativo entre la solución numérica y la exacta $f(z) = z^2$ obtenido con los dos tipos de funciones peso para N igual a 5 funciones base.

8.3 Resolver por el método de los momentos la ecuación integral

$$\int_0^z f(z)\,dz = \cos z$$

en el intervalo $0 \le z \le \pi/2$. Utilizar funciones base pulso y los métodos de colocación y Galerkin. ¿Por qué no funciona? Proponer una solución utilizando únicamente funciones base pulso.

8.4 Resolver por el método de los momentos la ecuación diferencial

$$y(z) = \frac{dx(z)}{dz} = 1$$

en el intervalo $0 \le z \le 1$ con la condición de contorno $x(0) = 0$. Usar funciones base

$$x_n(z) = \text{sen}\left(n\frac{\pi z}{2}\right) \qquad \text{con } n \text{ impar}$$

con los métodos de Galerkin y de mínimos cuadrados. Representar gráficamente la norma de la solución numérica x_N y de su derivada Lx_N en función del número de funciones base N. Obsérvese que cuando N tiende a infinito, uno de los dos métodos converge a la solución exacta mucho mejor que el otro. ¿ A qué es debido este comportamiento?

NOTA: El operador adjunto en el intervalo $0 \le z \le 1$ es

$$L^a y = -\frac{dy(z)}{dz}$$

con la condición de contorno $y(1) = 0$.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

9
Medida de antenas

9.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han descrito las técnicas de diseño de antenas y los modelos teóricos que permiten predecir las características de radiación de las mismas. También se han apuntado métodos de análisis que permiten conocer las características electromagnéticas de ciertas estructuras (método de los momentos, óptica física, etc.). Sin embargo, todas estas técnicas no están exentas de aproximaciones y limitaciones que hacen que no sean aplicables en ciertos casos. Además, ciertos parámetros como los errores en el mecanizado de las antenas, o la influencia de las estructuras de soporte de las mismas son difícilmente analizables. Por todo ello es necesario, finalmente, medir las características reales de la antena una vez fabricada para validar las predicciones teóricas. En los próximos apartados se verán, uno a uno, los procedimientos que se utilizan para la medida de los diferentes parámetros característicos de una antena.

9.2 Medida de diagramas de radiación. Campos de medida

Una de las características más importantes de una antena es su diagrama de radiación. Éste consiste en la representación de la amplitud o de la fase de los campos radiados por la antena en función de la dirección del espacio. Asociado a estas características está el sistema de coordenadas en el que se realiza la descripción. Normalmente se suele representar el diagrama de la antena en coordenadas esféricas, manteniendo la distancia de medida constante y haciendo variar los ángulos θ y ϕ, situando para ello la antena que se quiere medir en el origen de coordenadas.

Para medir el diagrama de radiación de la antena se desplaza otra antena, denominada sonda, a una distancia R constante y se van registrando las señales recibidas por la sonda en función de la posición angular. La representación de estas variaciones constituye el diagrama de la antena. En la práctica, la sonda se suele mantener fija y es la antena que se mide la que, mediante un sistema de posicionado, se hace rotar. Como la antena que se quiere medir y la sonda son recíprocas es indiferente cuál de ellas se emplee como transmisora y cuál como receptora, ya que el diagrama es el mismo.

Dado que la medida del diagrama para todos los ángulos es imposible, se realiza un muestreo del diagrama, normalmente para intervalos angulares constantes. Se puede demostrar que la función que representa el diagrama de radiación de una antena es una función de espectro limitado. El ancho de banda de dicho espectro es función del tamaño eléctrico de la antena por lo que, muestreando

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

correctamente, es posible reconstruir el diagrama para cualquier dirección del espacio mediante técnicas de interpolación. En muchos casos, dado el coste en medios y tiempo que representa una medida completa, se realizan tan sólo cortes del diagrama según planos representativos del mismo, de manera que sea posible extraer de ellos información de los anchos de haz, los niveles de lóbulos, etc.

9.2.1 Criterios de diseño de los campos de medida

Si bien, estrictamente hablando, es cierto que el diagrama de radiación de una antena varía con la distancia, se puede considerar que a partir de una determinada distancia el diagrama sólo depende de la dirección del espacio y mantiene la misma forma a distintas distancias. Para medir correctamente una antena deberemos hacer incidir sobre ella una onda plana según una determinada dirección del espacio. La respuesta de la antena a dicha onda será proporcional al diagrama de radiación de la antena en aquella dirección del espacio.

Ya que no es posible conseguir una onda estrictamente plana, vamos a ver una serie de criterios para dimensionar el campo de medida de manera que se obtengan unos resultados lo más exactos posibles. En la figura 9.1 se muestra esquemáticamente un campo de medida en donde se ven la sonda y la zona donde se sitúan las antenas que se quieren medir. Varias son las causas que hacen que la onda sobre la zona de medida de antenas no sea plana. Entre ellas hay que considerar en primer lugar que no estamos en la región de campos lejanos y que la amplitud de la onda varía en la zona de medida; puede haber también variaciones de fase; y por último la existencia de reflexiones altera la distribución de los campos.

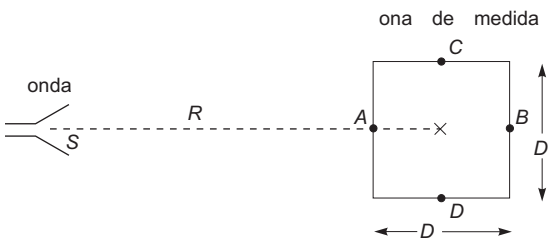


Fig. 9.1 Campo de medida de antenas

Amplitud de los campos inducidos

Se ha visto en el capítulo 3 que los campos totales creados por una antena se pueden descomponer en una parte de campos radiados, E^r, cuya amplitud decrece con la distancia, y una parte de campos inducidos, E^i, que decrecen con el cuadrado de la distancia. Los primeros sólo contienen componentes de campo ortogonales a la dirección de propagación, mientras que los inducidos también poseen componentes radiales. Como al medir una antena lo que interesa es conocer sus campos radiados a grandes distancias de ella, deberá procurarse que la amplitud de los campos inducidos sea lo suficientemente pequeña como para no alterar la medida. Un criterio habitual es considerar que

$$\left|E^i\right| \leq \frac{\left|E^r\right|}{20\pi} \tag{9.1}$$

con lo que teniendo en cuenta la variación de los campos con la distancia

$$\left|E^i\right| \propto \frac{1}{R^2} \ , \qquad \left|E^r\right| \propto \frac{k}{R} \tag{9.2}$$

se obtiene que la distancia R entre la antena y la sonda debe ser mayor que 10λ.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Variación transversal de la amplitud

Como la distancia R entre la sonda y la antena que se quiere medir es finita, el ángulo bajo el cual la sonda ve el punto central O y los extremos C y D es diferente; la amplitud con la que los iluminará dependerá del diagrama de radiación de la sonda. Esta variación transversal de la amplitud de los campos en la zona de medida provocará errores en el diagrama de radiación de la antena medido. Piénsese, por ejemplo, en una antena de tipo apertura con una determinada función de iluminación $f(x,y)$; el hecho de que al medirla la iluminemos, no con una onda plana sino con una onda con una determinada distribución $g(x,y)$, equivale a decir que el diagrama de radiación que se medirá realmente será el de una apertura con una iluminación $f(x,y)\cdot g(x,y)$. La solución consiste en utilizar como sonda una antena con un gran ancho de haz, de manera que las variaciones de amplitud de su diagrama dentro de la zona de medida sean pequeñas. Sin embargo, esta solución se contrapone con el hecho de que a mayor anchura en el diagrama de la sonda, mayores serán las interferencias debidas a reflexiones en los elementos del campo de medida. La solución final es un compromiso entre ambos problemas, que dependerá de la antena y del tipo de medida que se vaya a realizar. Un criterio habitual es tolerar una variación transversal de la amplitud menor que 0,25 dB. También es cierto que las distancias entre la sonda y el punto central de la zona de medida y el extremo (SO, SC) son diferentes, lo que también provoca diferencias en la amplitud de los campos, pero este efecto es mucho menos notable.

Variación longitudinal de la amplitud

Como en el caso anterior, las variaciones de amplitud del campo en el sentido longitudinal, entre los puntos A y B, deben ser lo más pequeñas posibles. Considérese, por ejemplo, la medida de una agrupación longitudinal o de una antena Yagi. La amplitud del campo sobre los primeros elementos de la antena será mayor que sobre los últimos, por estar más cerca de la sonda, lo que equivale a medir una antena con diferentes ponderaciones de amplitud en sus elementos. Empíricamente se ha comprobado que, fijando una variación inferior a 1 dB en la amplitud, los errores en la medida se pueden considerar despreciables. Siendo D la dimensión longitudinal de la zona de medida y R la distancia de su centro a la sonda, la condición anterior se puede expresar como

$$20\log\left(\frac{R+\frac{D}{2}}{R-\frac{D}{2}}\right) < 1 \text{ dB} \tag{9.3}$$

que da un criterio de diseño $R>8{,}7D \approx 10D$

Variación transversal de la fase

Si la antena empleada como sonda es pequeña se puede considerar que la onda generada es una onda esférica, y ésta, si la distancia de la sonda a la zona de medida es grande, podrá aproximarse localmente por una onda plana. Sin embargo las pequeñas desviaciones de fase respecto a las de la onda plana provocan grandes variaciones en la medida de diagramas de radiación. El efecto más importante que se observa es un aumento en la amplitud de los lóbulos secundarios y una menor profundidad en los nulos del diagrama. En la figura 9.2 se presenta el diagrama de radiación de una apertura medida a diferentes distancias R entre la sonda y la antena, donde se pueden observar los efectos comentados.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

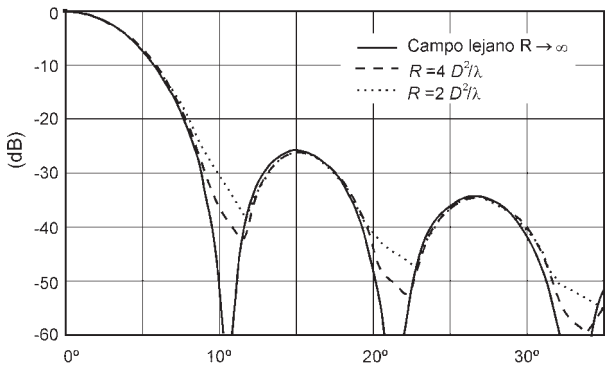


Fig. 9.2 Diagrama de radiación de una agrupación triangular de $N = 21$ elementos separados 0,5 λ, a varias distancias

El criterio comúnmente usado es exigir que la máxima desviación de fase entre los extremos de la zona de medida, puntos C y D, y el centro O sea de π/8 radianes, lo que lleva a la condición

$$R > \frac{2D^2}{\lambda} \qquad (9.4)$$

Haciendo más restrictiva la condición anterior los resultados de las medidas serán más precisos.

Amplitud de las señales reflejadas

Lo ideal en un sistema de medida sería poder aislar la sonda y la antena que se quiere medir del entorno que los rodea y así garantizar que son los únicos elementos que intervienen en la medida. Evidentemente no es posible conseguir esto en su totalidad, por lo que, cuando se mide una antena, además de la señal directa entre la antena y la sonda, hay presentes señales reflejadas en el resto de elementos del campo de medida, como el suelo, las paredes, los posicionadores, etc. Para ilustrar la importancia de estas señales reflejadas veamos su efecto en la medida del diagrama de radiación de la antena de la figura 9.3. Supondremos que sobre la antena objeto de la medida llegan dos señales, la onda directa, E_D, generada por la sonda, y una onda reflejada, E_R, que incide sobre la antena bajo un ángulo θ respecto a la onda directa y de amplitud 40 dB menor que ésta. La antena que se quiere medir posee un lóbulo secundario a 25 dB por debajo del máximo y a un ángulo θ respecto a éste.

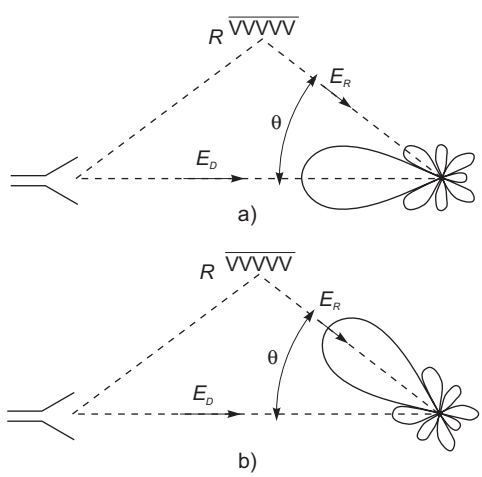


Fig. 9.3 Efecto de las reflexiones en la medida del diagrama: a) medida del lóbulo principal y b) medida del lóbulo secundario

Al medir el diagrama de radiación de la antena en la dirección del máximo, el campo real medido será la suma del campo directo, multiplicado por la ganancia de la antena en la dirección del máximo, más el campo reflejado, multiplicado por la ganancia de la antena en la dirección θ. El error cometido en la medida será máximo cuando las dos señales se sumen en fase o en contrafase. Su valor será

$$e = \frac{E_D\sqrt{G(0)} \pm E_R\sqrt{G(\theta)}}{E_D\sqrt{G(0)}} \qquad (9.5)$$

Sustituyendo los valores anteriores en (9.5) el error es 0,005 dB, por lo que se puede considerar despreciable. Pero si repetimos el mismo proceso para la medida del diagrama en la posición de un lóbulo secundario, en el peor caso la señal reflejada se recibirá por la dirección del máximo y su nivel se verá multiplicado por la ganancia en esa dirección,

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

mientras que la señal directa se verá multiplicada por el diagrama en la dirección θ, que es menor; el error cometido en la medida será

$$e = \frac{E_D \sqrt{G(\theta)} \pm E_R \sqrt{G(0)}}{E_D \sqrt{G(\theta)}} \qquad (9.6)$$

Para los datos anteriores el error cometido ahora es considerable y vale 1,42 dB y -1,71 dB. Se ve, por lo tanto, que, dada una antena y la precisión con la que se pretende medir su diagrama, se puede estimar la reflectividad máxima permitida en las estructuras del campo de medida o, a la inversa, dada una reflectividad, cuál es la cota de error previsible en una medida.

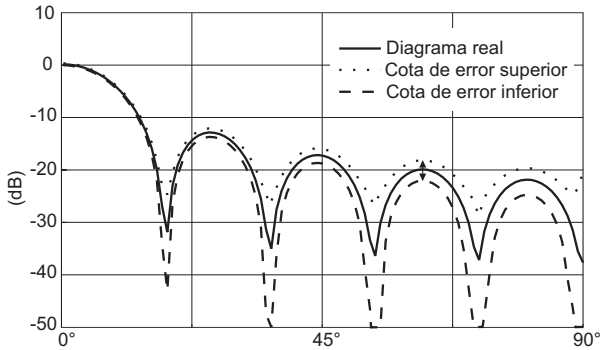


Fig. 9.4 Cotas de error en la medida de un diagrama de radiación debidas a las ondas reflejadas en las paredes (R = -30 dB)

Ejemplo 9.1 Para comparar la influencia de cada una de las condiciones anteriores en las dimensiones necesarias del campo de medida, calcularemos la dimensión mínima R del campo de medida para el caso de diferentes antenas, imponiendo los criterios anteriores. La primera antena es una Yagi de 90 cm de longitud con una frecuencia de trabajo de 300 MHz, la segunda una bocina cónica de 20 cm de diámetro a una frecuencia de 6 GHz y por último un reflector parabólico de 50 cm de diámetro a 10 GHz. La tabla siguiente muestra los valores de R obtenidos para cada una de las condiciones: amplitud de los campos inducidos, variación transversal de la fase y variación longitudinal de la amplitud.

	f	D	R > 10 λ	R > 10 D	R > 2 D^2/ λ
YAGI	300 MHz	90 cm = 0,9 λ	10 m	9 m	0,81 m
BOCINA CÓNICA	6 GHz	20 cm = 4 λ	0,5 m	2 m	1,60 m
REFLECTOR PARABÓLICO	10 GHz	50 cm = 16,7 λ	0,3 m	1,5 m	16,7 m

En la tabla se observa que la condición más restrictiva depende de la longitud eléctrica de la antena. Aunque no pueda extrapolarse para todos los casos, se ve que a bajas frecuencias la condición determinante es la referente a la amplitud de los campos inducidos, mientras que a altas frecuencias suele serlo la de las variaciones transversales de fase.

9.2.2 Campos de medida

Como ya se ha comentado, lo más importante en un sistema de medida es conseguir una onda plana sobre la antena a medir. Además del problema de las dimensiones mínimas del campo de medida necesarias para que se cumpla esta condición está el problema de las reflexiones en los elementos circundantes, que suele ser el más difícil de evitar. Existen diversas soluciones para satisfacer todos estos requisitos, algunas de las cuales se presentan a continuación.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Campos de medida en reflexión

A bajas frecuencias es muy difícil eliminar las reflexiones, por lo que, en vez de evitarlas, se intenta controlarlas de manera que sus efectos sean menos desfavorables. Estos campos se diseñan de manera que la suma de la señal directa y las reflejadas produzcan dentro de la zona de medida una onda aproximadamente plana. En el capítulo 2 se vio que en la propagación de la onda de espacio existían variaciones de amplitud en función de la distancia entre antenas y la altura de éstas, según se sumaran en fase o en contrafase las señales directa y reflejada. En los campos de medida en reflexión se procura que en la zona de medida de la antena ambas se sumen en fase. Se utilizan en VHF y UHF, por lo que al ser las longitudes de onda grandes, las variaciones de amplitud en función de la posición serán pequeñas.

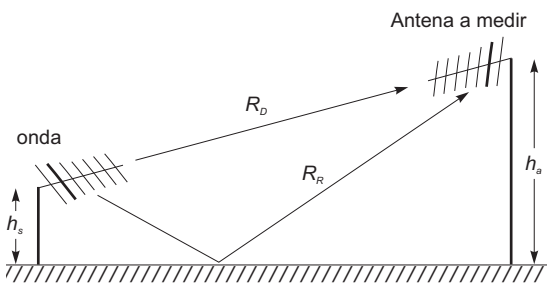


Fig. 9.5 Campo de medida en reflexión

Campos de medida elevados

En algunas ocasiones, para evitar las reflexiones en el suelo, se sitúan la sonda y la antena que se quiere medir en lugares elevados, como por ejemplo dos montañas separadas por un valle, de manera que por la directividad de la sonda y la rugosidad del suelo el efecto de las reflexiones sea prácticamente despreciable. Si no es posible disponer de lugares suficientemente elevados, se suelen colocar entre la sonda y la antena una serie de obstáculos, en forma de pantallas difractantes, de manera que corten la trayectoria de los rayos reflejados en el suelo. La figura 9.6 muestra un corte esquemático de un campo de estas características situado cerca de Niza.

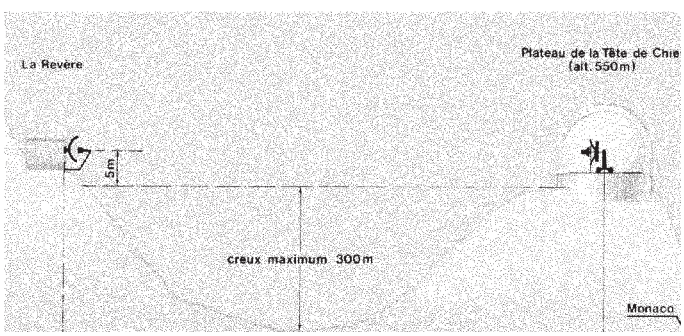


Fig. 9.6 Campo de medida elevado del CNET (La Turbie, Niza)

Campos de medida inclinados

En ocasiones, cuando existen problemas de espacio y para evitar las reflexiones, se utilizan los campos de medida inclinados. En éstos se sitúa la antena que se quiere medir sobre una torre o mástil, usualmente telescópico para facilitar el montaje de la antena. En el suelo y a cierta distancia de la torre se sitúa la sonda de medida cuyo diagrama de radiación se diseña de tal manera que presente un nulo en la dirección del suelo donde se produce la reflexión. Para minimizar los efectos de la torre, se puede

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

construir ésta de materiales dieléctricos o recubrirse de materiales absorbentes. Este tipo de campo de medida es usual en la medida de antenas de VHF y UHF.

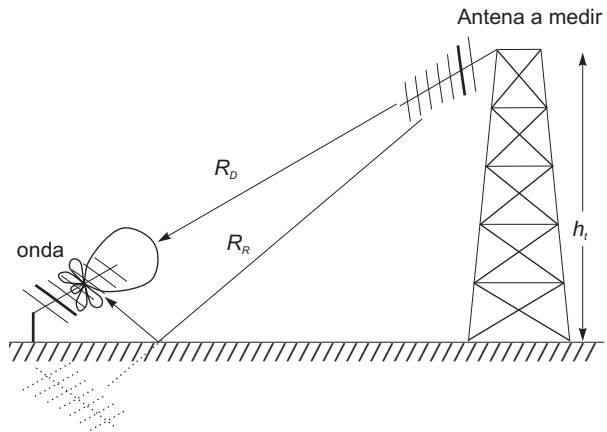


Fig. 9.7 Campo de medida inclinado

Cámaras anecoicas

La mejor manera de medir antenas es evitar las reflexiones o por lo menos que éstas tengan un valor muy bajo. Esto es lo que se intenta lograr en las cámaras anecoicas, que son recintos cerrados recubiertos, en sus paredes, con paneles de materiales absorbentes, de manera que las reflexiones en ellos sean muy pequeñas.

Estos materiales están hechos a base de unas espumas especiales cargadas con negro de humo que hacen que tengan pérdidas elevadas. La filosofía de su funcionamiento es la de dar a los materiales unas formas especiales de manera que las ondas que incidan sobre ellos encuentren un medio cuya impedancia vaya pasando progresivamente de la del aire a la del material, para que las reflexiones por desadaptación sean pequeñas, y que una vez en el interior del material sus altas pérdidas hagan que prácticamente toda la energía se disipe en el interior y no llegue a las paredes de la cámara y pueda reflejarse.

El material absorbente se fabrica en paneles formados por pirámides. Esta geometría hace que las reflexiones no sean especulares, sino que se produzcan múltiples reflexiones entre las caras de las pirámides, de manera que en cada reflexión la onda vaya perdiendo energía. La absorción de los rayos en el material aumenta con el tamaño de las pirámides que lo forman (no según el tamaño real sino en función de la longitud de onda). Por lo tanto, cuanto menor sea la frecuencia, mayores deberán ser las pirámides. Así resulta que el rango de frecuencias útil de una cámara, construida con un determinado tipo de material, queda limitado por la frecuencia inferior. La absorción del material también depende del ángulo de incidencia de la onda: para incidencias normales a la superficie del panel la absorción es

Fig. 9.8 Cámara anecoica de la ETSITB

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

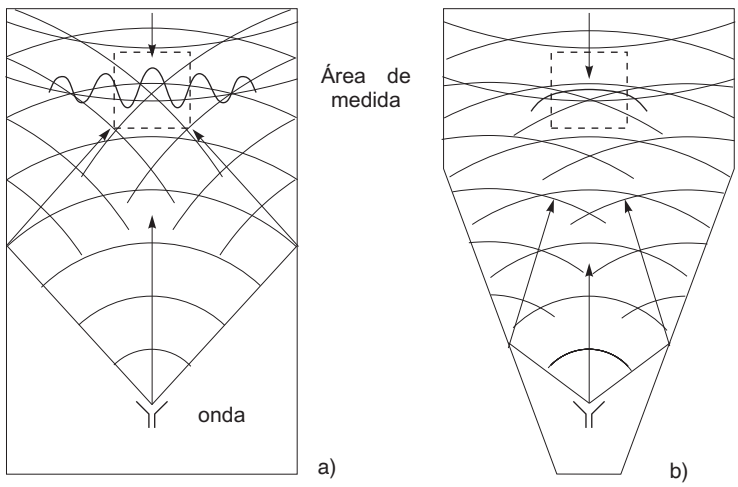


Fig. 9.9 Cámaras anecoicas: a) rectangular y b) abocinada

máxima, y disminuye al aumentar el ángulo.

Aunque la forma habitual de las cámaras anecoicas es la rectangular, a veces se opta por darles formas especiales, como la indicada en la figura 9.9. La ventaja de este diseño se encuentra en las bajas frecuencias. La absorción de los paneles a estas frecuencias es menor, y las reflexiones en las paredes hacen que en la zona de medida la suma del rayo directo y del reflejado produzca oscilaciones notables en la amplitud del campo. Al darle forma abocinada a la cámara lo que se consigue es que las diferencias de camino entre ambos rayos sean pequeñas, más aún a frecuencias bajas, por lo que la amplitud del campo en la zona de medida variará más suavemente.

Las ventajas de la medida en cámara anecoica son muchas: el ambiente de la medida se puede controlar al ser un recinto cerrado (temperatura, humedad, limpieza), no hay dependencia de las condiciones exteriores, (interferencias o inclemencias meteorológicas), etc.. Por otra parte, el tamaño de las antenas que se pueden medir directamente es reducido, ya que las dimensiones de las cámaras no pueden ser muy grandes por problemas de espacio y coste.

Campos de medida compactos

Ya se ha visto en el apartado anterior que para medir correctamente una antena debemos generar sobre ella una onda plana, y que ello exigía que la distancia entre la antena y la sonda fuese relativamente grande. Como esto no siempre es posible, sobre todo en las cámaras anecoicas, se recurre a generar la onda plana mediante métodos alternativos. Uno de ellos se basa en el hecho de que los campos próximos a la apertura de un reflector parabólico se pueden considerar como los de una onda plana. Ya se vio, en la sección 6.4.2.2, que en un reflector parabólico, bajo la aproximación de óptica física, los rayos reflejados eran paralelos y estaban en fase, por lo que el frente de onda es plano. Esto sólo es cierto localmente, es decir, a distancias cortas de la apertura y en una región restringida del espacio, debido a que el reflector tiene unas dimensiones finitas. A medida que la onda se aleja del reflector, se va transformando en una onda esférica.

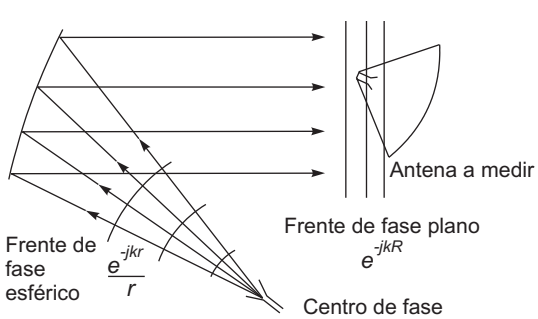


Fig. 9.10 Campo de medida compacto

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Para evitar los problemas del bloqueo del alimentador las geometrías del reflector suelen ser asimétricas, u otras aún más complejas (dobles reflectores, cassegrain o gregorianas). La antena que se quiere medir se coloca en frente del reflector, cuyo tamaño deberá ser lo suficientemente grande como para garantizar una onda plana sobre toda la antena. Aun así, las dimensiones totales del conjunto son mucho menores que las exigidas en uno de medida en campo lejano directo. Debido a su reducido tamaño se les denomina campos de medida compactos.

Su realización práctica no es sencilla, pues han de solventarse ciertos problemas importantes, como la difracción de los campos en los bordes del reflector, o la radiación directa del alimentador en la dirección de la antena a medir. Estos problemas dan origen, básicamente, a rizados en la zona de medida. Para evitarlos se suele esconder el alimentador en recintos convenientemente aislados, que quedan ocultos desde la zona de medida, y para disminuir la difracción de los bordes del reflector se le da a éste formas aserradas o curvadas.

Campos de medida próximos

Otra solución para evitar las grandes dimensiones de los campos de medida es no medir el campo radiado lejano de la antena, sino los campos próximos, y mediante un proceso matemático hallar los campos radiados lejanos. La idea se basa en el teorema de equivalencia que ya se utilizó cuando se analizaron las aperturas. Si se conocen los campos tangenciales que una antena crea sobre una superficie que la rodea, se pueden sustituir dichos campos por unas corrientes equivalentes y a partir de éstas hallar los campos radiados.

El proceso de medida exige que ésta sea completa, es decir, se deben medir los campos sobre una superficie cerrada y que incluya totalmente a la antena, y se debe medir según dos polarizaciones ortogonales, tanto en módulo como en fase. En principio la medida debería ser continua, es decir, de absolutamente todos los puntos de la superficie, pero como las funciones que describen el diagrama de radiación son de espectro finito, se pueden muestrear. La superficie de medida puede ser arbitraria, pero lo habitual es que sea una superficie sencilla: plana, cilíndrica o esférica, que son las que dan soluciones matemáticas cerradas.

Otra manera de enfocar el problema es ver que en realidad lo que se está haciendo es generar la onda plana, no colocando una sonda a una distancia muy grande para poder considerar sus campos como localmente planos, sino sintetizándola como la suma de las contribuciones de muchas sondas que se encuentran a corta distancia de la antena, ponderando la amplitud de cada una de ellas de forma adecuada.

En el apartado 9.10 se realiza una descripción más detallada de estos sistemas de medida.

Fig. 9.11 La medida de antenas es un proceso complejo que requiere personal altamente cualificado

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

9.2.3 Instrumentación de medida

La figura 9.12 muestra el esquema general de un sistema para la medida de antenas. Los elementos básicos que lo configuran son: un generador de radiofrecuencia, una sonda de medida, unos posicionadores para mover la antena, un sistema de detección y medida de la señal recibida y un sistema de control y almacenamiento de los datos recibidos.

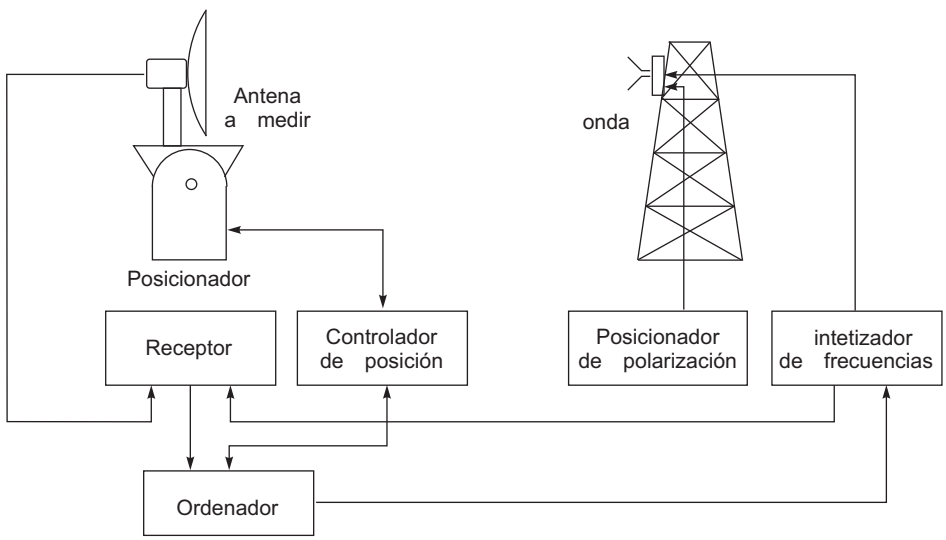


Fig. 9.12 Esquema de la instrumentación de un campo de medida

Sondas de medida

Normalmente los campos de medida se diseñan para que puedan cubrir múltiples aplicaciones en un margen amplio de frecuencias, por lo que es necesario disponer de diferentes sondas para cada banda. A bajas frecuencias, por debajo de 1 GHz, se suelen emplear antenas lineales, como dipolos o agrupaciones logoperiódicas de dipolos. A frecuencias más elevadas se usan antenas de tipo bocina e incluso pequeños reflectores parabólicos. La polarización de estas antenas es lineal, por lo que para poder realizar medidas de polarización se suele montar la sonda sobre un posicionador que permite rotarla. En algunas aplicaciones se emplean sondas ortomodo, que reciben simultáneamente dos polarizaciones ortogonales y eliminan la necesidad del posicionador.

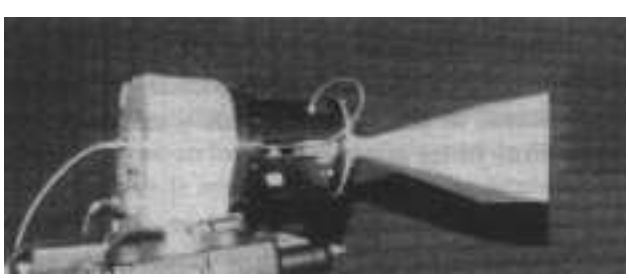


Fig. 9.13 Detalle de una sonda de medida (bocina piramidal) montada sobre un rotor de polarización

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Sistemas transmisores y receptores

Los sistemas generadores de señal pueden ser muy diversos, y van desde un simple oscilador a los sintetizadores de frecuencia que permiten cambiar rápidamente la frecuencia, con gran precisión, estabilidad y pureza espectral, pasando por tubos de onda progresiva para conseguir grandes potencias de salida en los campos lejanos de medida. El empleo de unos u otros dependerá de los requisitos de la medida.

Como sistemas detectores se pueden emplear desde simples detectores a base de un diodo rectificador cuya salida se conecta a un voltímetro, hasta los modernos equipos receptores que permiten medir la amplitud y la fase de la señal recibida y cuya salida suele estar ya digitalizada para ser leída directamente desde un ordenador. Las características del sistema receptor son muy importantes, pues son las que intervienen más en la calidad de la medida. Parámetros como la sensibilidad y el margen dinámico son importantes cuando se quieren realizar medidas precisas de los lóbulos secundarios del diagrama. En los equipos actuales estos valores son del orden de 90 dB para el margen dinámico y de -110 dBm para la sensibilidad, a frecuencias de hasta 40 GHz, y mejores incluso para frecuencias menores.

Sistemas de posicionado

Para hallar el diagrama de radiación de la antena es necesario desplazar una sonda de medida alrededor de la antena e ir registrando las variaciones de la señal recibida. A nivel práctico no siempre es la sonda la que se mueve; lo más habitual es que sea la antena la que se haga rotar en el espacio y la sonda esté fija, si bien a veces se combinan los movimientos de ambos elementos. A no ser que se realice alguna medida especial en campo próximo, el movimiento aparente entre la antena y la sonda es esférico, es decir, como si la sonda se desplazase sobre una esfera centrada en la antena, siguiendo los movimientos de los ángulos esféricos θ y ϕ.

Si sólo se requiere la medida de un corte del diagrama será suficiente con un motor que mueva la antena respecto a un eje. Pero lo habitual es querer hacer medidas completas del diagrama, con lo cual son necesarios dos motores o posicionadores que se muevan sobre ejes ortogonales. Existen varias configuraciones de posicionadores que permiten realizar estos movimientos. La figura 9.14 muestra dos de ellas. La primera

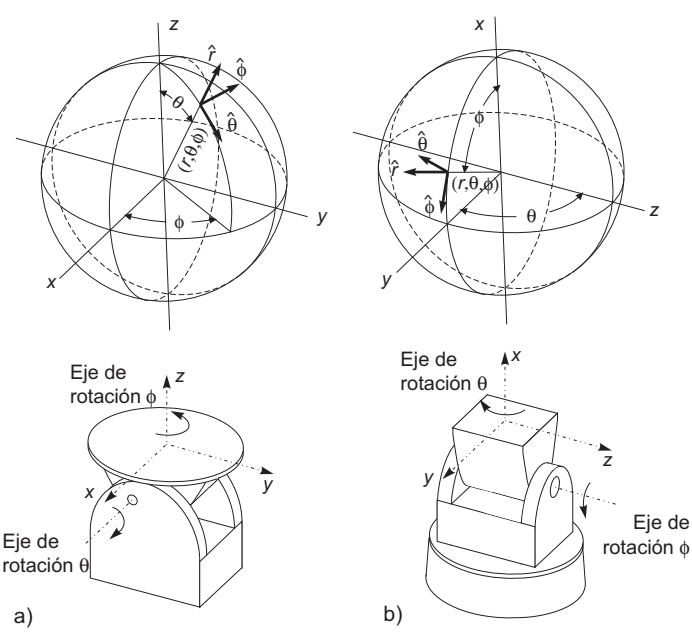


Fig. 9.14 Posicionadores para medida en coordenadas esféricas: a) acimut sobre elevación y b) elevación sobre acimut

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

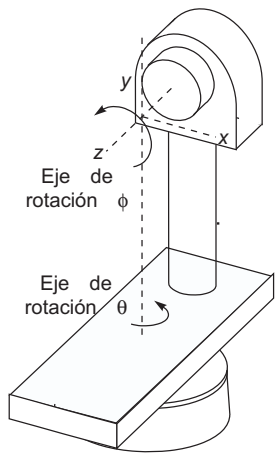


Fig. 9.15 Posicionador de rol sobre acimut

consta de un posicionador con el eje horizontal, sobre el que se coloca otro posicionador con el eje vertical ortogonal al anterior y sobre el que se monta la antena que se quiere medir. El movimiento del primer motor es respecto al ángulo θ y el segundo respecto al ángulo ϕ. Es por esto que este tipo de configuración se denomina de acimut sobre elevación. El segundo es un motor con el eje vertical sobre el que se monta otro con el eje horizontal, por lo que se denomina de elevación sobre acimut. Cada uno presenta sus ventajas, dependiendo del tipo de antena que se quiere medir y del tipo de medida que se vaya a realizar.

El problema de los posicionadores anteriores es que el centro de la antena no coincide con el centro del sistema de coordenadas representado por los ejes de los posicionadores, lo cual no interesa en la medida de antenas en campo próximo, o en medidas en las que también sea necesario conocer la fase. En estos casos se emplean posicionadores como los de la figura 9.15, configuración denominada de rol sobre acimut, aunque en este caso el rotor denominado de acimut representa movimientos según θ, y el denominado de polarización o rol, según ϕ.

Sistema de control y procesado

Los datos medidos pueden registrarse de forma inmediata sobre algún soporte gráfico, normalmente se hace con un trazador sobre papel. Lo más habitual es que todo el proceso de la medida sea controlado por un ordenador, desde el movimiento de los posicionadores hasta el control de los generadores y medidores, con lo que los datos se suelen almacenar en el ordenador y se pueden representar o realizar sobre ellos cualquier tipo de procesado, como en el caso de las medidas en campo próximo.

9.3 Medida de ganancia

Uno de los parámetros más importantes que caracteriza a una antena es su ganancia. Existen dos clasificaciones básicas de los métodos de medida de ganancia: absolutos y por comparación. La medida absoluta se suele hacer con antenas que luego se van a emplear como referencia en otras medidas. Las dos antenas más comúnmente empleadas como patrones en la medida de otras son el dipolo resonante en λ/2 (con una ganancia de 2,1 dB) y las bocinas piramidales (con ganancias entre 10 y 25 dB).

Hay varias técnicas para determinar la ganancia absoluta de una antena, todas ellas basadas en la fórmula de Friis, que es la ecuación de transmisión (1.44). En la medida se supone que las antenas se encuentran en campo lejano, están adaptadas, alineadas en la dirección de máxima radiación, que existe adaptación de polarización y que la distancia entre ellas y la frecuencia de trabajo son datos conocidos.

Método de las dos antenas

Si realizamos un enlace entre dos antenas la ecuación de transmisión se puede escribir como

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T\, G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \tag{9.7}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Si las dos antenas son exactamente iguales, en la ecuación anterior sólo existirá una incógnita, la ganancia, pues los demás datos son medibles o conocidos.

Método de las tres antenas

Si las dos antenas no son exactamente iguales, puede emplearse una tercera antena. Midiendo la relación P_R/P_T para cada una de las tres combinaciones de pares de antenas y planteando en cada caso la ecuación de transmisión, queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, las ganancias de las tres antenas, que puede resolverse para obtener sus valores.

Medida de la ganancia por comparación

Es el método más común para la medida de ganancia. Se basa en comparar la potencia recibida en un sistema cuando se emplea la antena que se desea medir y la recibida cuando se emplea una antena patrón. El sistema de medida es, entonces, más sencillo, porque la medida de potencia no tiene que ser absoluta, sino relativa, ya que lo único que interesa es la diferencia de señal recibida en uno y otro caso. La ganancia de la antena será la de la de referencia más la diferencia entre las señales. La desventaja de este método es que se precisa una antena de referencia bien calibrada.

9.4 Medida de directividad

A diferencia de la ganancia, que es un parámetro que también depende de la eficiencia de la antena, la directividad depende únicamente del diagrama de radiación, por lo que para hallarla es preciso conocer éste. El conocimiento del diagrama deberá ser más o menos extenso según la precisión que se quiera en la medida de la directividad.

Un método es hallar la directividad a partir de sus expresiones aproximadas en función del ángulo sólido equivalente. Este último se puede estimar como el producto de los anchos de haz a -3 dB de la antena en sus planos principales.

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_{eq}} \approx \frac{4\pi}{\Delta\theta_1 \, \Delta\theta_2} \tag{9.8}$$

La aproximación anterior es tanto más válida cuanto más directiva sea la antena y menores sean sus lóbulos secundarios. Existen otras aproximaciones debidas a diversos autores que, a partir de los anchos de haz, encuentran expresiones más o menos exactas de la directividad y que se ajustan mejor o peor, dependiendo del tipo de antena.

Si se quiere una medida de la directividad más exacta debe tenerse información de todo el diagrama de la antena y aplicando la expresión (1.15) de la directividad se tiene, en función del diagrama de radiación normalizado $t(\theta, \phi)$,

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi} \tag{9.9}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

En la expresión anterior hay que tener en cuenta que la antena radiará según las dos polarizaciones ortogonales, usualmente definidas como θ y ϕ, con lo que el campo radiado por la antena se deberá medir según ambas polarizaciones.

9.5 Medida de impedancia

El conocimiento de la impedancia de entrada de una antena es importante, pues el ancho de banda útil de la antena suele estar fijado por el margen de frecuencias en que está adaptada al transmisor o al receptor.

La medida de la impedancia es igual a la de cualquier dispositivo de un acceso, con la particularidad de que hay que tener en cuenta que los elementos que rodean a la antena afectan a su impedancia y por lo tanto, al hacer la medida, se deberán reproducir lo más fielmente posible las condiciones reales de funcionamiento de la antena. Se comentarán a continuación algunos métodos de medida.

Puente de impedancias

Se basa en el puente de Wheatstone; consiste en dos divisores de tensión entre cuyos puntos medios se conecta un instrumento de medida. Variando uno de los elementos del puente se puede hacer que éste quede equilibrado, y que por lo tanto la medida en el instrumento sea nula. Conociendo el valor de tres de los elementos del puente se puede hallar el valor del cuarto elemento, que es la antena cuya impedancia se desea medir. El elemento variable deberá tener una parte resistiva y una parte reactiva para poder equilibrar el puente, pues en principio la antena también presentará una impedancia de entrada compleja.

Se suele emplear a frecuencias bajas, por debajo de los 100 MHz, en las que los elementos discretos que se utilizan, bobinas y condensadores, se comportan como tales.

Línea ranurada

Cuando se conecta una carga al extremo de una línea de transmisión cuya impedancia no es la característica de la línea, se produce una desadaptación, que hace que parte de la energía de la señal incidente desde la línea hacia la carga se refleje en ésta y vuelva por la línea. La suma de las señales incidente y reflejada hace que el campo eléctrico en la línea varíe de un punto a otro según se sumen en fase o contrafase las dos ondas. El resultado es una onda estacionaria cuya amplitud y fase dependerán del valor de la impedancia de carga. A partir de la medida de la amplitud y de la fase de esta onda estacionaria se puede hallar el valor de la impedancia de la carga.

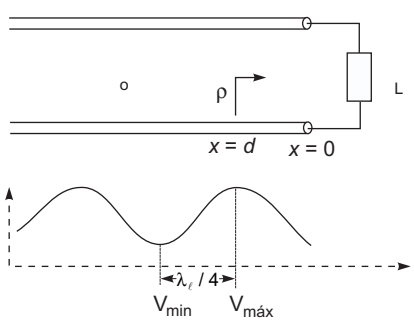


Fig. 9.16 Línea ranurada para la medida de impedancias

El coeficiente de reflexión en el extremo de la línea se puede encontrar como

$$\rho = |\rho| e^{j\varphi} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad (9.10)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde Z_L es la impedancia de la carga y Z_0 la de la línea. La medida de $|\rho|$ se realiza a través de la relación de onda estacionaria (ROE o SWR en inglés), que es el cociente entre la tensión máxima y la mínima en la línea, y se relaciona con ρ a través de

$$S = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = \frac{|V|_{máx}}{|V|_{mín}} \tag{9.11}$$

Sabiendo que la distancia entre dos máximos o dos mínimos de tensión es $\lambda_\ell/2$, con λ_ℓ la longitud de onda en la línea, la fase del coeficiente de reflexión se puede calcular midiendo la distancia entre la carga y el mínimo más próximo a ésta, *d*, con el resultado

$$\varphi = 2\beta d = \frac{4\pi}{\lambda_\ell} d \tag{9.12}$$

Una línea ranurada es una línea coaxial de dieléctrico aire en la que una ranura longitudinal permite introducir una sonda de medida. La línea se termina con la impedancia que se desea medir. La sonda, al desplazarse por la ranura, detectará una tensión proporcional al campo eléctrico en el interior de la línea, que es a su vez proporcional a la amplitud de la tensión en aquel punto de la línea. Midiendo la relación entre el máximo y el mínimo de tensión y la distancia entre la carga y el mínimo más próximo y aplicando las relaciones anteriores se halla la impedancia de la carga.

El margen de frecuencias de utilización de un sistema coaxial de medida está entre los 300 y los 800 MHz. A frecuencias más bajas las longitudes de onda son muy grandes y el sistema tendría unas dimensiones que lo harían inmanejable. A frecuencias mayores la longitud de onda es pequeña y el tamaño de la sonda y de la ranura ya no son despreciables, por lo que sus efectos alteran la medida. Existen también guías ranuradas, que se fabrican haciendo en el centro de la cara ancha de una guía rectangular estándar una fina ranura longitudinal.

Analizador de redes

Medir el coeficiente de reflexión de una carga equivale, de hecho, a medir el parámetro S_{11} de un dispositivo de un acceso. La medida se puede hacer con la misma instrumentación que se emplea en la medida de dispositivos: los analizadores de redes. Éstos realizan la medida automáticamente y además hacen todos los cálculos anteriores; presentan directamente el valor de la impedancia, numéricamente o sobre una carta de Smith, no sólo a una frecuencia sino realizando un barrido de frecuencias, con lo que medir el ancho de banda de una antena en función de su adaptación es, prácticamente, inmediato.

9.6 Medida de la distribución de corriente

Es interesante la medida de la distribución de corriente en antenas de tipo dipolo, ya que a partir de su distribución es posible calcular el diagrama de radiación y otros parámetros de la antena. También es de interés conocer el campo eléctrico existente en antenas de tipo apertura, como bocinas y reflectores.

Para la medida de corrientes el método más simple consiste en desplazar una pequeña antena, usualmente una espira, es decir, un dipolo magnético elemental, paralelamente y muy próxima al hilo de corriente. Si el plano de la espira y el del dipolo coinciden, la tensión inducida en ella será proporcional al flujo magnético que la atraviesa. Si el tamaño de la espira es suficientemente pequeño

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

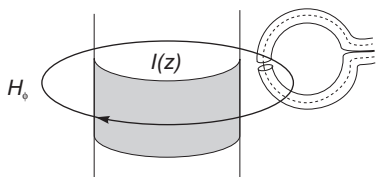


Fig. 9.17 Medida de la corriente en dipolos

se puede decir que el campo magnético será constante y proporcional a la corriente del hilo en aquel punto (Fig. 9.17).

En el caso de la medida del campo en una apertura se suele emplear un dipolo eléctrico de pequeñas dimensiones. Como se vio al definir la longitud efectiva, la tensión inducida en sus bornes será proporcional al valor del campo eléctrico paralelo a él en el punto donde se halle. Dado que a frecuencias de microondas es muy complejo construir pequeños dipolos, las sondas que se utilizan son bocas de guía de reducidas dimensiones, incluso a veces cargadas de dieléctricos de alta permitividad.

Tanto en uno como en otro caso, el problema más importante es evitar que la presencia de la sonda modifique las distribuciones de corriente y de campo, por lo que se deben emplear antenas muy pequeñas y soportes también reducidos. Se debe cuidar también que los campos eléctricos radiados por la antena que se está midiendo no induzcan corrientes en los hilos que van de la sonda al instrumento de medida, ya que falsearían los resultados.

9.7 Medida de polarización

A grandes distancias de una antena, el campo eléctrico radiado por ésta sólo tiene componentes normales a la dirección de propagación, que se designan en general como E_θ y E_ϕ. La resultante total del campo eléctrico será un vector que dependerá de la relación entre estas dos componentes y, en general, no será constante, sino que variará su orientación y su amplitud con el tiempo. La figura que describe el vector campo eléctrico en el plano perpendicular a la dirección de propagación es, en su forma más general, una elipse. La forma de esta elipse describe polarimétricamente a la onda.

En general, la polarización de una antena queda definida si se conocen las amplitudes y las fases relativas de cada una de sus componentes ortogonales, pero es más habitual definirla a partir de otros parámetros como son la relación axial, el sentido de giro y el ángulo de inclinación de la elipse, respecto a una dirección de referencia.

En la práctica, es difícil construir una antena que mantega sus características de polarización para cualquier punto de su diagrama, por lo que para una caracterización completa se deberán medir las características de polarización en múltiples direcciones. Hay diferentes técnicas para determinar la polarización de una onda, a continuación se presentan algunas de ellas.

Medida del diagrama de polarización

Esta medida da información de la relación axial y del ángulo de inclinación de la onda, pero no de su sentido de giro. La antena que se quiere medir se puede emplear en transmisión o en recepción y se precisa de una antena linealmente polarizada, por ejemplo un dipolo, montado según indica la figura 9.18.

El dipolo se hace girar según el eje de propagación de la onda y se registra la tensión medida. Los valores obtenidos son proporcionales al coeficiente de desacoplo de polarización entre la sonda y la antena, por lo que la representación gráfica de los mismos se denomina diagrama de polarización de la antena. La forma más general del diagrama de polarización es la representada en la figura 9.18c.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

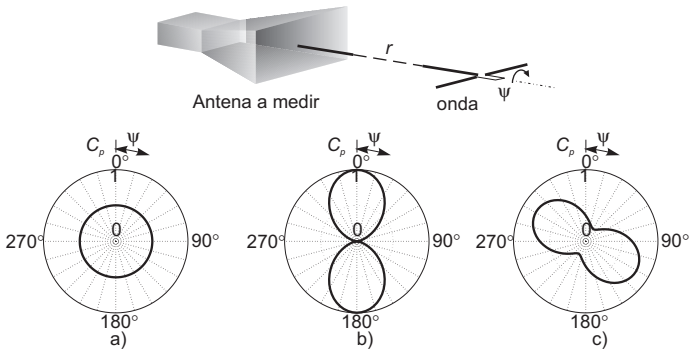


Fig. 9.18 Medida del diagrama de polarización de una antena para tres casos: a) circular, b) lineal y c) elíptica

La elipse de polarización se inscribe en él y sus ejes mayor y menor lo cortan a 90º, coincidiendo con los valores máximo y mínimo del diagrama. La relación axial de la onda es directamente el cociente entre las amplitudes del eje mayor y del eje menor de la elipse y el ángulo de inclinación es el que forman el eje mayor y la dirección de referencia.

El sentido de rotación puede obtenerse con medidas adicionales, por ejemplo midiendo el coeficiente de desacoplo de polarización de la antena respecto a dos antenas circulares, una polarizada a derechas y otra a izquierdas. La que dé mayor amplitud determinará el sentido de giro.

Medida de la amplitud y de la fase

Los instrumentos que se emplean en los campos de medida permiten conocer no sólo la amplitud, sino también la fase de la señal. Midiendo la tensión recibida por una antena linealmente polarizada cuando se orienta según dos direcciones ortogonales del espacio la polarización de la onda queda ya completamente definida. En realidad no es necesario que la antena de prueba sea lineal, ni que sea la misma en ambas medidas ni que las dos polarizaciones sean ortogonales. La medida se puede realizar con dos antenas cualesquiera que no tengan la misma polarización pero que estén caracterizadas, tanto en polarización como en ganancia, realizando algunos cálculos para expresar, finalmente, el resultado en función de dos componentes ortogonales.

Método con tres antenas

La precisión de los resultados del método anterior dependerá de la calidad de los patrones empleados. Si se requiere una elevada precisión se deberá emplear un método de medida absoluto. Para ello se emplean tres antenas cuyas características de polarización son desconocidas. La única limitación es que al menos dos de ellas no tengan polarización circular. Emitiendo por una antena se mide, en módulo y fase, la tensión recibida por otra de ellas. La medida se repite rotando 90º las antenas entre sí. Realizando el mismo proceso con todas las combinaciones de antenas resulta finalmente un conjunto de seis medidas en donde quedan como incógnitas la polarización de las antenas y la ganancia de las mismas. Planteando un sistema de ecuaciones y con los datos medidos se obtienen finalmente las características de polarización de las tres antenas, sin necesidad de conocer a priori la polarización de ninguna de ellas.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

9.8 Medida de la temperatura de antena

La medida de la temperatura de antena, T_a, se realiza comparando la potencia de ruido recibida por la antena con la de una fuente de temperatura de ruido conocida, T_{ref}. Para mayor exactitud en las medidas es preferible que la temperatura de la fuente de referencia sea lo más parecida posible a T_a. Es posible encontrar fuentes con temperaturas de ruido T_{ref} entre 3 y 10.000 K. Algunas de ellas están construidas a base de un resistor que se enfría o calienta mediante medios externos y cuya temperatura física será su temperatura de ruido. Para enfriarlas se puede emplear hidrógeno líquido (77,4 K) o helio líquido (4,2 K). Para conseguir temperaturas de ruido más altas se emplean dispositivos semiconductores como diodos zener o de avalancha y tubos de gas, con lo que se llega a temperaturas de ruido de hasta 10.000 K. En todos los casos se debe procurar que la fuente de ruido esté perfectamente adaptada a las líneas de transmisión y que éstas no tengan pérdidas que modifiquen el valor de T_a.

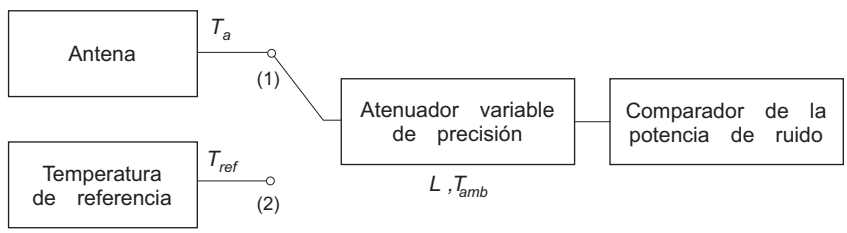


Fig. 9.19 Medida de la temperatura de ruido de antena

Existen diversos métodos de medida dependiendo del valor de la temperatura que se quiere medir o del tipo de antena. El esquema más sencillo es el mostrado en la figura 9.19. El proceso se basa en medir la potencia de ruido recibida cuando se conecta a la entrada del medidor la antena (posición 1) o la fuente de referencia (posición 2). Para no tener que realizar medidas absolutas de potencia se coloca un atenuador variable a la entrada del medidor, de tal manera que se ajusta su valor en cada una de las posiciones del conmutador para tener a la salida la misma potencia. Si denominamos L_1 y L_2 al valor del atenuador en cada una de las posiciones, las potencias de ruido serán respectivamente

$$N_1 = K T_a B \frac{1}{L_1} + K T_{amb} \left(1 - \frac{1}{L_1}\right) B \tag{9.13}$$

$$N_2 = K T_{ref} B \frac{1}{L_2} + K T_{amb} \left(1 - \frac{1}{L_2}\right) B \tag{9.14}$$

Ajustando ambas para que sean iguales se puede hallar la temperatura de antena en función de la de referencia y el valor de los atenuadores

$$T_a = T_{amb} + \frac{L_1}{L_2}\left(T_{ref} - T_{amb}\right) \tag{9.15}$$

La medida de la temperatura de antena se puede emplear para obtener la eficiencia de la misma, midiendo la potencia de ruido recibida al apuntar la antena hacia una fuente de ruido de temperatura conocida, generalmente alguna galaxia o estrella.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

9.9 Modelos a escala

Para medir el comportamiento exacto de una antena la medida debe realizarse en las condiciones más próximas a la realidad que sea posible, teniendo en cuenta las estructuras y soportes que rodearán a la antena cuando esté funcionando. En muchas aplicaciones, como antenas en aviones o barcos, las estructuras son tan grandes o pesadas que es imposible incluirlas en el campo de medida. En estos casos es posible realizar las medidas sobre un modelo a escala. Ya se ha visto que el comportamiento de una antena no depende de sus dimensiones absolutas sino de las relativas respecto a la longitud de onda de trabajo. Por lo tanto, el comportamiento de una antena y un modelo a escala será el mismo si se escala la frecuencia de funcionamiento por el mismo factor. En líneas generales esto es cierto pero hay otros factores que se deben escalar también para que las dos antenas se comporten exactamente igual, como por ejemplo, la conductividad de los materiales empleados en su construcción. En la tabla siguiente se muestra la relación entre los parámetros de la antena y los de su modelo a escala 1:n (éstos últimos marcados con ').

LONGITUDES	$\ell' = \ell/n$
TIEMPO	$t' = t/n$
LONGITUD DE ONDA	$\lambda' = \lambda/n$
CAPACIDAD	$C' = C/n$
INDUCTANCIA	$L' = L/n$
ÁREA EFECTIVA	$A_e' = A_e/n^2$
FRECUENCIA	$f' = nf$
CONDUCTIVIDAD	$\sigma' = \sigma n$
PERMITIVIDAD	$\varepsilon' = \varepsilon$
PERMEABILIDAD	$\mu' = \mu$
VELOCIDAD	$v' = v$
IMPEDANCIA	$Z' = Z$
GANANCIA	$G' = G$
SECCIÓN RECTA RADAR	$\sigma' = \sigma/n^2$

A partir del modelo a escala es posible obtener información del modelo real, pero si en la construcción de la antena original se emplean buenos conductores es difícil cumplir la condición respecto a la conductividad en la maqueta, lo que hace que la medida de la eficiencia óhmica no sea posible en el modelo.

9.10 Medidas en campo próximo

La necesidad de técnicas precisas de medida del diagrama de radiación de antenas ha aparecido ligada al desarrollo de antenas de altas prestaciones y a la mejora de los métodos de análisis de las mismas. Por ejemplo, en aplicaciones de comunicaciones espaciales es necesario conocer el diagrama de radiación de las antenas con precisiones del orden del 1% en ganancia. En otros casos, las propias características de la antena imponen, como única alternativa viable, la medida en campo próximo.

En general, la dificultad principal para medir directamente en campo lejano antenas de gran tamaño eléctrico estriba en las considerables dimensiones que debe tener el campo de medida, como ya se ha comentado en apartados anteriores. Además el criterio habitualmente empleado para la distancia antena-sonda de $R > 2D^2/\lambda$ es insuficiente si se requie-

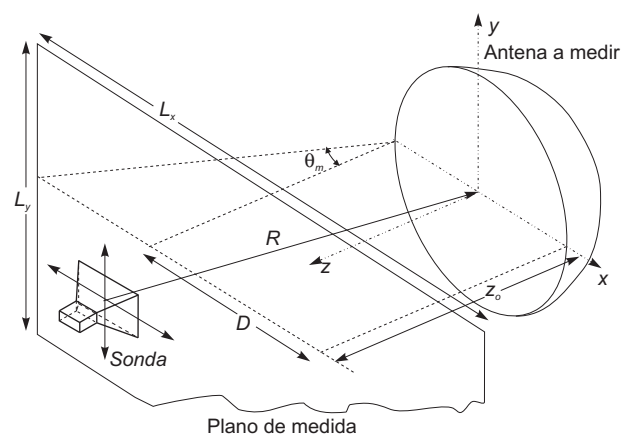


Fig. 9.20 Esquema de una exploración en campo próximo en coordenadas planas rectangulares

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

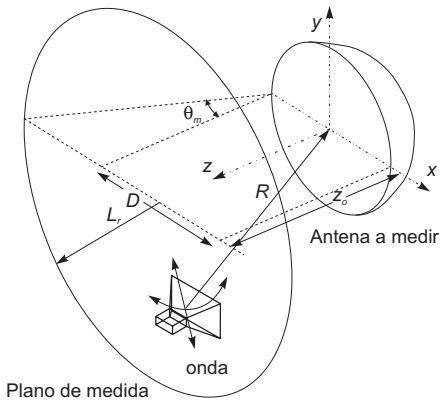


Fig. 9.21 Esquema de una exploación en campo próximo en coordenadas planas polares

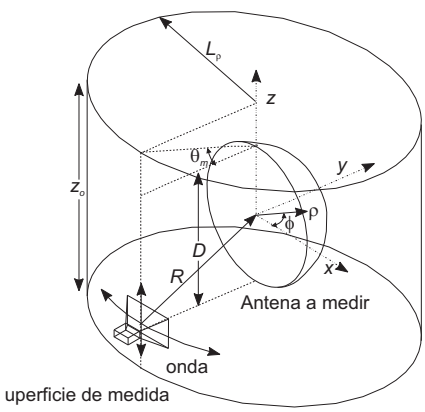


Fig. 9.22 Esquema de una exploración en campo próximo en coordenadas cilíndricas

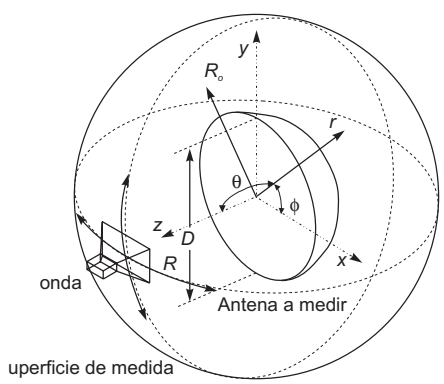


Fig. 9.23 Esquema de una exploración en campo próximo en coordenadas esféricas

ren medidas muy precisas. Es por estas razones que en los últimos años se ha dedicado un esfuerzo importante al desarrollo de nuevas técnicas de medida. En este sentido, las medidas en campo próximo se han convertido en el método de medida habitual cuando se requieren medidas precisas, o bien cuando las dimensiones de la antena hacen prohibitiva la medida en campo lejano.

En las medidas en campo próximo las componentes tangenciales del campo eléctrico producido por la antena bajo prueba se miden, en amplitud y fase, por la sonda sobre una superficie que puede encontrarse a unas pocas longitudes de onda de la estructura de la antena. Las superficies de medida más utilizadas son: la plana, la cilíndrica y la esférica. En las figuras 9.20 a 9.23 se representan las distintas superficies de exploración.

Al proceso de obtención del diagrama de radiación de la antena se le llama la transformación de campo próximo-campo lejano, y requiere el procesado matemático a posteriori de las medidas. Así pues, a diferencia de las medidas en campo lejano, para obtener un solo corte del diagrama de radiación es necesario explorar toda la superficie de medida con dos polarizaciones, en módulo y en fase. Por tanto, en general, el tiempo de medida será superior en las medidas en campo próximo, si bien este inconveniente queda parcialmente superado con el uso de instrumentación de medida rápida.

Por otra parte, el conocimiento de los campos en módulo y fase sobre una superficie cercana a la antena permite emplear la técnica de medida en campo próximo como una herramienta útil de diagnóstico de antenas, más allá de la simple obtención del diagrama de radiación.

Dentro de la geometría plana, la medida puede realizarse en coordenadas cartesianas o en polares, refiriéndose normalmente a cada una de las situaciones como plana y plana-polar respectivamente (Figs. 9.20 y 9.21). La medida plana-polar tiene la ventaja sobre la medida en plano que puede realizarse con un solo sistema de posicionador lineal junto con otro de polarización; para la medida en coordenadas cilíndricas (Fig. 9.22), se requiere un posicionador en acimut y otro lineal en vertical; y finalmente, para la medida en esféricas (Fig. 9.23), la sonda permanece quieta y la antena se monta sobre un posicionador de rol que se encuentra situado sobre otro de acimut.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Para realizar la transformación de campo próximo-campo lejano es necesario conocer las componentes tangenciales del campo eléctrico sobre la superficie de medida. Para ello se puede realizar la medida dos veces, empleando en cada caso una sonda sensible a una polarización ortogonal, o bien emplear una sonda ortomodo que permita acceder a las dos polarizaciones en cada punto mediante conmutación electrónica. Evidentemente este último caso es más eficiente desde el punto de vista del tiempo de medida.

Para obtener el diagrama de radiación de la antena es necesario compensar los efectos de la sonda de medida. A este proceso se le llama corrección de sonda, y tiene por objeto eliminar el efecto del diagrama de radiación de la sonda sobre la medida, y la presencia de una cierta respuesta de la sonda a la polarización cruzada. En las medidas en campo lejano es habitual emplear como sondas antenas directivas, con el fin de mejorar el margen dinámico y reducir el efecto de las reflexiones. Por el contrario, en las medidas en campo próximo es importante que la sonda no presente ningún nulo, ya que no podría ser corregido. Por otra parte, los requerimientos de margen dinámico se cumplen fácilmente debido a la proximidad de las dos antenas.

Para realizar la corrección de sonda se requiere haber caracterizado previamente su diagrama de radiación. Para que ésta se realice correctamente es preciso situar la sonda con la misma referencia con la que fue medida, de forma que, en general, todo el sistema de alineamiento de las antenas es mucho más crítico en las medidas en campo próximo que en las de campo lejano.

9.10.1 Formulación del caso plano

A continuación formularemos el algoritmo de transformación de campo próximo-campo lejano para el caso de una geometría plana. Para ello partiremos de una situación como la de la figura 9.24, donde suponemos conocidos los campos eléctricos tangenciales E_x y E_y producidos por la antena en un plano xy situado en $z = z_o$. A partir de estos campos hallaremos los campos radiados por la antena. Para ello encontraremos el diagrama de radiación que produciría una apertura plana infinita con una distribución de campos $\vec{E}(x, y; z=z_0)$ y $\vec{H}(x, y; z=z_0)$, (Fig. 9.24a). A partir del teorema de equivalencia podemos reformular el problema sustituyendo las distribuciones de campos por unas corrientes eléctricas y magnéticas equivalentes dadas por (3.112)

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \hat{n} \times \vec{H} \\ \vec{M}_s &= -\hat{n} \times \vec{E} \end{aligned} \qquad (9.16)$$

Estas corrientes equivalentes producirán los mismos campos para $z > z_o$ y campos nulos para $z<z_o$ (Fig. 9.24b). Dado que sólo conocemos los campos eléctricos, interesa encontrar una situación equivalente donde sólo existan corrientes magnéticas. Podemos conseguirlo situando un conductor eléctrico en la zona

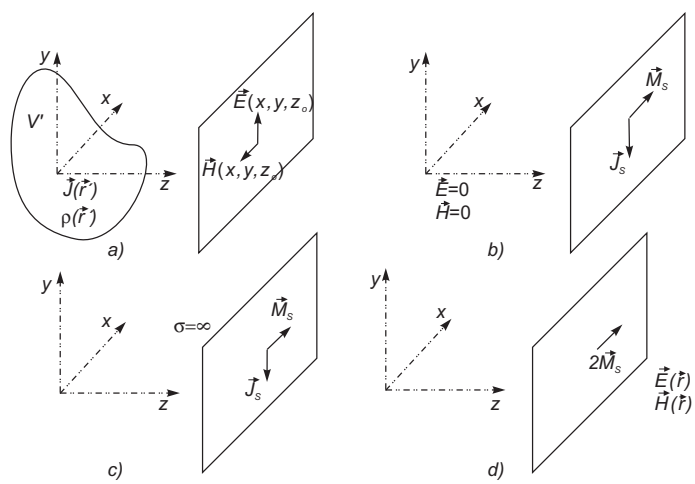


Fig. 9.24 Formulación del problema de la transformación campo próximo-campo lejano

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

definida por $z < z_o$; como en esta zona los campos son nulos, la introducción del conductor no perturba la situación. Para abordar ahora el problema de la radiación de las corrientes eléctricas y magnéticas frente a planos conductores aplicamos la teoría de imágenes. Fácilmente se observa que las corrientes eléctricas se anulan, por ser tangentes a un conductor eléctrico, mientras que las corrientes magnéticas se duplican.

Así pues, al igual que en el análisis de ranuras, el problema original ha quedado reducido a determinar el diagrama de radiación producido por una corriente magnética. Por tanto podemos expresar el vector de radiación mediante (3.79)

$$L = e^{-jk_z z_0} \int_{-\infty}^{\infty} 2 M_s \, e^{jk_x x} \, e^{jk_y y} \, dx \, dy \tag{9.17}$$

con (3.83)

$$k_x = k \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \qquad k_y = k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad k_z = k \cos\theta \tag{9.18}$$

Al estar las corrientes magnéticas definidas por (3.112)

$$\begin{aligned} M_S &= -n \times E \\ M_S &= -z \times E = \left[-E_x \;\; x, y; z = z_0 \;\; y + E_y \;\; x, y; z = z_0 \;\; x \right] \end{aligned} \tag{9.19}$$

se obtiene el vector de radiación

412

$$L\;\; k_x, k_y, k_z \;\; = e^{-jk_z z_0} \, 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[E_y \;\; x, y; z = z_0 \;\; x - E_x \;\; x, y; z = z_0 \;\; y \right] e^{jk_x x} \, e^{jk_y y} \, dx \, dy \tag{9.20}$$

Podemos observar que el vector de radiación es la transformada de Fourier del campo eléctrico sobre la superficie de medida, afectado de un término de fase, que es función de la distancia de medida z_o. Si expresamos el vector de radiación en coordenadas esféricas tendremos, usando (3.63),

$$\begin{aligned} L_\theta &= \cos\theta \cos\phi \, L_x + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \, L_y \\ L_\phi &= -\operatorname{sen}\phi \, L_x + \cos\phi \, L_y \end{aligned} \tag{9.21}$$

El potencial vector magnético F se puede calcular mediante (3.78)

$$F = \varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} L \tag{9.22}$$

con lo que podemos hallar los campos radiados a través de la relación (3.77)

$$E_\theta = -j\omega\eta F_\phi = -j\omega\eta \frac{\varepsilon \, e^{-jkr}}{4\pi r} L_\phi, \qquad E_\phi = j\omega\eta F_\theta = j\omega\eta \frac{\varepsilon \, e^{-jkr}}{4\pi r} L_\theta \tag{9.23}$$

Estos campos se pueden escribir como

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{jk}{2\pi r} e^{-jkr} \, e^{-jk_z z_0} \left[\cos\phi \, A_x \;\; k_x, k_y; z_0 \;\; + \operatorname{sen}\phi \, A_y \;\; k_x, k_y; z_0 \;\; \right] \\ E_\phi &= \frac{jk}{2\pi r} e^{-jkr} \, e^{-jk_z z_0} \left[-\cos\theta \operatorname{sen}\phi \, A_x \;\; k_x, k_y; z_0 \;\; + \cos\theta \cos\phi \, A_y \;\; k_x, k_y; z_0 \;\; \right] \end{aligned} \tag{9.24}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

donde se ha definido

$$\begin{aligned} A_x\ k_x, k_y; z_0 &= E_x\ x, y; z_0\ e^{jk_x x}\ e^{jk_y y}\ dx\ dy \\ A_y\ k_x, k_y; z_0 &= E_y\ x, y; z_0\ e^{jk_x x}\ e^{jk_y y}\ dx\ dy \end{aligned} \tag{9.25}$$

En consecuencia, podemos expresar el campo radiado por la antena en función del campo eléctrico medido en un plano alejado una cierta distancia. Se observa de nuevo que la relación básica entre los campos medidos y los campos radiados es una transformada de Fourier. La formulación descrita es válida para el caso en que se hubiera empleado como sonda de medida una sonda eléctrica ideal. En el caso de emplear una sonda magnética ideal se puede realizar un desarrollo análogo, situando un conductor magnético en $z < z_o$. Para una sonda real habrá que incluir en la formulación la corrección de sonda.

El algoritmo de transformación está basado en la transformada de Fourier y, por tanto, puede programarse de forma eficiente mediante la transformada rápida de Fourier (FFT). Desde el punto de vista práctico quedan por determinar aspectos importantes, como el efecto de tener una superficie finita, y cuál debe ser el número de puntos que deben medirse sobre la superficie. En las expresiones (9.25) se observa que el hecho de tener una superficie limitada es equivalente a enventanar los campos por una función pulso bidimensional, lo que equivale a convolucionar las funciones A_x y A_y por la función sinc bidimensional. Esto se traduce en una distorsión del diagrama de radiación, que lleva a definir una zona angular de validez, donde el diagrama de radiación se obtiene con precisión. Esta zona viene definida por el ángulo que forma el extremo de la antena con el de la superficie de medida (figura 9.20), que puede escribirse como

$$\operatorname{tg}\theta_m = \frac{L - D}{2 z_0} \tag{9.26}$$

donde L es la dimensión de la zona de medida y D la de la antena.

Esta zona de validez no debe entenderse como una frontera absoluta, y sólo indica que en aquellas direcciones en las que no se haya medido el campo próximo, difícilmente se puede obtener un diagrama de radiación correcto.

El siguiente punto que debe plantearse es con qué paso debe muestrearse el campo sobre la superficie de medida. Dado que la relación básica entre el campo medido y el diagrama de radiación es una transformada de Fourier, el paso de muestreo vendrá dado por el criterio de Nyquist, aplicado a la anchura espectral en el dominio k_x, k_y de los campos E_x, E_y. De las expresiones (9.18) se deduce que k_x, k_y y k_z se corresponden con direcciones del espacio y, por tanto, su valor estará limitado entre $-k$ y k; por ello el paso de muestreo es

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{k_{x\max}} = \frac{\lambda}{2} \qquad \Delta y = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{k_{y\max}} = \frac{\lambda}{2} \tag{9.27}$$

9.10.2 Campo próximo cilíndrico y esférico

La solución de las ecuaciones de Maxwell en geometría cilíndrica incluye funciones de Bessel y funciones exponenciales, lo cual complica la formulación matemática respecto a la geometría plana. Como contrapartida, la superficie de medida envuelve mucho más a la antena que se quiere medir, con lo que los errores debidos al truncamiento son menores.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Estos errores desaparecen en la geometría esférica, ya que ésta rodea totalmente a la antena, y los campos hallados son del todo exactos. En la formulación matemática aparecen funciones de Hankel y polinomios de Legendre, lo cual la hacen la más complicada de las tres formulaciones. Sin embargo, con el gran avance que se ha producido en la capacidad de memoria y la velocidad de cálculo de los ordenadores, los problemas matemáticos son cada vez menores.

9.10.3 Ventajas e inconvenientes de la medida en campo próximo

A modo de resumen, enumeramos las características principales de las medidas en campo próximo.

Como ventajas podemos citar:

- Las medidas se pueden realizar en el ambiente controlado de una cámara anecoica, eliminando la influencia de factores externos.
- La precisión obtenida es igual o superior a la que se obtiene en campo lejano.
- Se puede realizar la medida de grandes antenas en campos de medida de dimensiones reducidas.
- La información obtenida permite caracterizar completamente la antena.

Como inconvenientes cabe señalar:

- El sistema de medida puede resultar más complejo y costoso.
- El alineamiento y la caracterización de la sonda son críticos para obtener una buena medida.
- No se obtienen los resultados en tiempo real.
- Para obtener un corte del diagrama es necesario realizar una medida completa.
- Para la geometría plana y para la cilíndrica sólo se obtienen resultados correctos para ciertas regiones angulares.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Cuestiones

9.1 ¿Cuál debe ser la longitud mínima de una zona de medida de diagramas en campo lejano para antenas de una dimensión máxima de 50 cm, si la frecuencia ha de abarcar desde 100 MHz hasta 10 GHz?

a) 10 m b) 20 m c) 30 m d) 50 m

9.2 En un campo de medida la distancia sonda-antena es de 100 m. La directividad máxima de los reflectores medibles a f=10 GHz será:

a) 20 dB b) 30 dB c) 40 dB d) 50 dB

9.3 Queremos diseñar una cámara de medida en campo lejano para medir antenas de hasta 1,5 m entre 100 MHz y 1 GHz. ¿Cuál debe ser la dimensión longitudinal mínima de la cámara?

a) 5 m b) 10 m c) 15 m d) 30 m

9.4 En una cámara anecoica recubierta con material absorbente de -35 dB de reflectividad existe, en la zona de medida, una distribución de campo con un rizado resultado de la superposición de la onda directa y de la reflejada. La amplitud del rizado es:

a) ±0,003 dB b) ±0,08 dB c) ±0,15 dB d) ±0,3 dB

9.5 Al medir al diagrama de radiación de una antena en una cámara recubierta con material absorbente de reflectividad σ = -40 dB, ¿qué margen de error aproximado tendrá en la medida de los lóbulos a -30 dB?

a) ±1 dB b) ±3 dB c) ±6 dB d) ±10 dB

9.6 Para la medida de la ganancia de una bocina se utilizó la técnica de comparación con una bocina patrón de 18 dB de ganancia. La potencia recibida con la antena que se tuvo que medir fue de 3 μW, y la recibida con la antena patrón fue de 6 μW. La ganancia de la bocina es:

a) 12 dB b) 15 dB c) 21 dB d) 24 dB

9.7 Para la medida del diagrama en campo lejano de una bocina de 20 dB de directividad a 10 GHz se utiliza otra antena igual separada una distancia de 75 m. Si la potencia del transmisor es de 10 mW, ¿cuál es la sensibilidad mínima necesaria en el receptor para medir un NLPS de 50 dB?

a) -30 dBm b) -50 dBm c) -90 dBm d) -110 dBm

9.8 ¿Cuál de los siguientes parámetros de una antena no puede obtenerse con un modelo a escala?

a) Directividad. b) Resistencia de radiación.
c) Diagrama de radiación. d) Temperatura de antena.

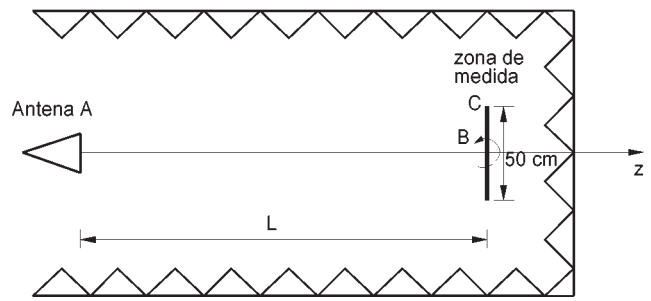
9.9 La obtención del diagrama de radiación de una antena a partir de la medida de su campo próximo sólo precisa:

a) Amplitud y fase de las dos componentes tangenciales del campo.
b) Amplitud de las dos componentes tangenciales del campo.
c) Amplitud y fase de una componente tangencial del campo.
d) Fase de las dos componentes tangenciales del campo.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Problemas

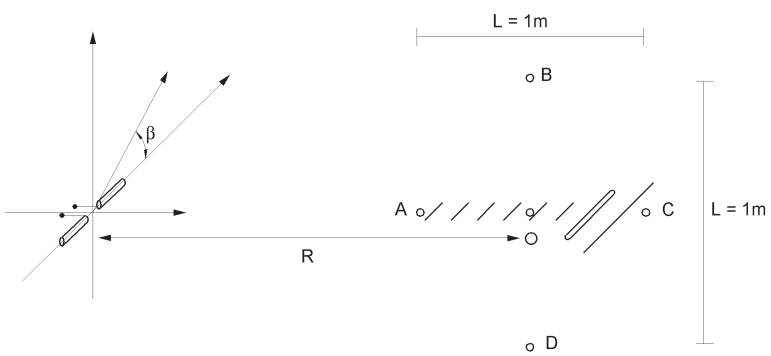
9.1 Se desea diseñar una cámara anecoica para la medida de antenas en campo lejano. La banda de frecuencias de trabajo es de 8 a 12 GHz y la dimensión máxima de la antena a medir es de 50 cm. La cámara debe permitir la medida de una relación delante-atrás de 30 dB con una exactitud de ±2 dB. Se supone que las reflexiones existentes en la cámara provienen básicamente de la pared posterior (se desprecia el efecto de las paredes laterales). Suponer polarización lineal.



a) Calcular la dimensión L necesaria.
b) Calcular la reflectividad que debe tener el material absorbente de la pared posterior.
c) Calcular la oscilación de campo que se mediría con una sonda que se desplazara sobre la zona de medida según el eje z.

9.2 Para medir el diagrama de radiación de una antena Yagi se emplea como sonda de medida un dipolo elemental. La medida se realiza en una cámara anecoica, y la situación de medida es la de la figura.

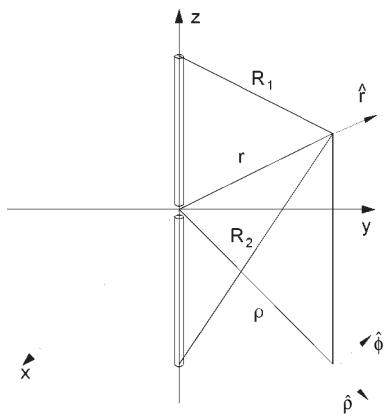
f = 800 MHz
Relación
delante-atrás = 25 dB
D = 20 dB
T_a = 290 K
$B_{receptor}$ = 10 kHz
F = 4 dB



a) Encontrar la distancia mínima de medida R.
b) Con un material absorbente de - 40 dB de reflectividad, ¿cuál es el error cometido en la medida de la relación delante-atrás?
c) Tomando como distancia de medida 10 m, ¿cuál debe ser la potencia transmitida para que la relación S/N en la medida del lóbulo posterior de la antena sea de 10 dB?

9.3 Se quiere medir la distribución de corriente en una antena lineal (dipolo en λ/2) y para ello se utiliza sucesivamente una sonda de campo eléctrico (dipolo eléctrico elemental de longitud ℓ) y

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.



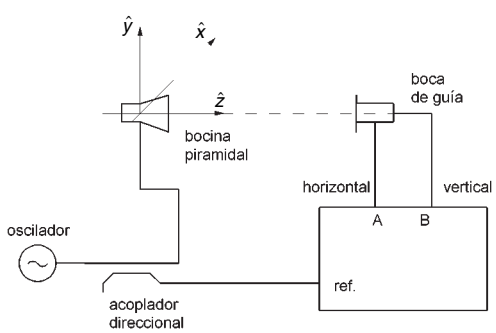
una sonda de campo magnético (dipolo magnético elemental de perímetro ℓ). Suponiendo que la medida se realiza sobre la antena ($\rho \to 0$):

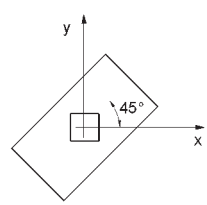
a) Calcular la tensión en circuito abierto en bornes del dipolo, orientado según z, en función del punto de medida z.
b) Calcular la tensión en circuito abierto en bornes de la espira, situada con su eje normal a z.
c) Comparar las dos tensiones y comentar cuál de ellas reproduciría más fielmente la distribución de corriente en la antena.

9.4 Una bocina piramidal radia una onda elípticamente polarizada $\vec{E} = (a\hat{u} + jb\hat{v})e^{-jkz}$ que se recibe con dos dipolos iguales, ortogonales y orientados según $\hat{x}, \hat{y}$ ($\hat{x}\cdot\hat{u} = \cos\alpha,\ \hat{x}\cdot\hat{v} = \text{sen}\alpha$).

a) Calcular la relación de las señales recibidas en los dipolos en función de α.
b) Calcular la relación de las señales recibidas en dos hélices en modo axial idénticas, con arrollamientos opuestos, en función de α.

9.5 Se trata de medir la polarización de los campos radiados por una bocina cónica. Para ello se dispone del equipo indicado en la figura. La bocina piramidal de calibración tiene polarización lineal; en cada una de las transiciones guía-coaxial se miden señales polarizadas horizontal y verticalmente, y el receptor utilizado, con dos canales de amplitud y fase, se encuentra descalibrado.





posición relativa de la bocina y la boca de guía cuadrada

a) Con el montaje indicado, respecto a la referencia se mide para las amplitudes y fases.

	AMPLITUD	FASE
CANAL A	-28dB	10º
CANAL B	-26dB	15º

¿Qué factores de corrección se aplicarían para este canal?

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) Se sustituye la bocina piramidal por la cónica y se mide:

	AMPLITUD	FASE
CANAL A	-25dB	20º
CANAL B	-23dB	110º

Dibujar la elipse de polarización de la señal incidente.

c) Se gira la bocina cónica 45º. ¿Cuál será la medida en los dos canales A y B?

d) Si se utiliza la bocina cónica como receptora, ¿cuál sería la relación, en dB, de la respuesta a una señal polarizada circularmente a derechas o izquierdas?

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Anexo A
Solución de la ecuación de onda. Función de Green

Vamos a establecer la solución general de la ecuación de onda (3.23), que es escalar, y obtendremos de forma equivalente la solución de (3.22) para cada una de las componentes en coordenadas cartesianas. Si se representa con un sistema de coordenadas primadas $(\vec{r}')$ los puntos de fuente y con $\vec{r}$ los puntos de campo, tal como se indica en la figura 3.3, transformando en el dominio del tiempo $\rho(\vec{r}', t)$ y $\Phi(\vec{r}', t)$ se obtiene

$$\rho(\vec{r}', t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\omega(\vec{r}')\, e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad \Phi(\vec{r}', t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\omega(\vec{r}')\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{A.1}$$

$$\rho_\omega(\vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}', t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \qquad \Phi_\omega(\vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\vec{r}', t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{A.2}$$

y sustituyendo en (3.23) resulta la ecuación de Helmholtz

$$\nabla'^2 \Phi_\omega(\vec{r}') + k^2 \Phi_\omega(\vec{r}') = -\rho_\omega(\vec{r}')/\varepsilon \tag{A.3}$$

A partir de la solución de esta ecuación para una fuente puntual $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ se conocerá la solución general para cualquier otra fuente. Denominando $G(\vec{r}, \vec{r}')$ a dicha solución, también llamada la función de Green, se tiene

$$\nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{A.4}$$

Si se aplica el lema de Green a $G(\vec{r}, \vec{r}')$ y $\Phi_\omega(\vec{r}')$ se obtiene

$$\int_{V'} \left(\Phi_\omega \nabla'^2 G - G \nabla'^2 \Phi_\omega\right) dv' = \int_{S'} \left(\Phi_\omega \nabla' G - G \nabla' \Phi_\omega\right) \cdot d\vec{s}' = 0 \tag{A.5}$$

ya que Φ_ω y G en la superficie S' del volumen de integración, que es la superficie del infinito, dan una contribución a la integral de superficie nula, como consecuencia de las condiciones de radiación en el infinito, también conocidas como de Sommerfeld.

Sustituyendo (A.3) y (A.4) en (A.5) resulta

$$\int_{V'} \left(-\Phi_\omega(\vec{r}')\, \delta(\vec{r} - \vec{r}') + G(\vec{r}, \vec{r}')\, \rho_\omega(\vec{r}')/\varepsilon\right) dv' = 0 \tag{A.6}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\Phi_\omega(\vec{r}) = \int_{V'} G(\vec{r},\vec{r}')\,\rho_\omega(\vec{r}')/\varepsilon\, dv' \tag{A.7}$$

que es una integral de convolución de las fuentes con la función de Green. Debemos obtener la solución de (A.4) para una fuente puntual en R = 0 $(\vec{r} = \vec{r}')$; tenemos simetría esférica en torno a dicho punto y la ecuación de onda (A.4) toma la forma

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right) + k^2 G = 0, \quad R \neq 0 \tag{A.8}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RG) + k^2 G = 0 \tag{A.9}$$

cuya solución es RG = A $e^{\pm jkR}$

$$G(\vec{r},\vec{r}') = A\frac{e^{\pm jkR}}{R} \tag{A.10}$$

que es singular en R = 0, ya que allí existe una fuente puntual. La constante A puede obtenerse por sustitución en (A.4) e integración de dicha ecuación en un volumen esférico elemental ε′ centrado en R = 0.

$$\int_{\varepsilon'}\left(\nabla'^2 + k^2\right) G\, dv' = -\int_{\varepsilon'}\delta(R)\, dv' \tag{A.11}$$

Para R ≈ 0 se tiene $G(\vec{r},\vec{r}') \approx \frac{A}{R}$, de donde se obtiene

$$A\int_{\varepsilon'}\left[\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{k^2}{R}\right] dv' = -1 \tag{A.12}$$

Como

$$\lim_{R\to 0}\int_{\varepsilon'}\frac{dv'}{R} = 0 \tag{A.13}$$

y

$$\int_{\varepsilon'}\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right) dv' = \int_{S_{e'}}\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\hat{n}\, ds' = -\int_{S_{e'}}\frac{1}{R^2}\, ds' = -4\pi \tag{A.14}$$

resulta

$$4\pi A = 1 \tag{A.15}$$

y la función de Green, o potencial producido por una carga puntual, vale

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{\pm jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{A.16}$$

que sustituido en (A.7) da, para el potencial escalar, la integral de convolución

$$\Phi_\omega(\vec{r}) = \int_{V'}\frac{\rho_\omega(\vec{r}')\, e^{\pm jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv' \tag{A.17}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Ésta es también la solución que se obtendría para la ecuación (3.23) si las fuentes variasen en el tiempo de forma armónica. Para hallar la solución general hay que transformar para volver al dominio del tiempo mediante (A.1)

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{V'} \frac{\rho_\omega(\vec{r}')\, e^{j\omega t}\, e^{\pm jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv' \tag{A.18}$$

y sustituyendo (A.2) para $\rho_\omega(\vec{r}')$ resulta

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{V'} \frac{e^{j\omega t}\, e^{\pm jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}',t')\, e^{-j\omega t'}\, dt'$$

teniendo en cuenta que k = ω/v y que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\left(t-t'\pm\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)} d\omega = \delta\left(t-t'\pm\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right) \tag{A.19}$$

se obtiene

$$\Phi(\vec{r},t) = \int_{V'} dv' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\vec{r}',t')}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \delta\left(t\pm\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}-t'\right) dt' \tag{A.20}$$

$$\Phi(\vec{r},t) = \int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t\pm\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv' \tag{A.21}$$

y análogamente para el potencial vector

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{V'} \frac{\mu\vec{J}\left(\vec{r}', t\pm\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv' \tag{A.22}$$

En ambas expresiones se observa que la solución en el instante *t* viene dada en función de lo que ocurre en la fuente en el instante $t\pm|\vec{r}-\vec{r}'|/v$. El signo positivo implica una violación del principio de causalidad: se estaría produciendo un efecto antes de existir una causa, y sólo es válido el signo negativo, ya que significa un seguimiento del efecto a la causa con un retardo $|\vec{r}-\vec{r}'|/v$; éste es el tiempo empleado en viajar desde el punto de fuente $\vec{r}'$ al punto de campo $\vec{r}$ con velocidad $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Por ello $\vec{A}$ y Φ se conocen como potenciales retardados, y toman en general el valor

$$\Phi(\vec{r},t) = \int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dv' \tag{A.23}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right) = \int_{V'} \frac{\mu \vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}{v}\right)}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} dv' \tag{A.24}$$

Para el caso armónico resulta

$$\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V'} G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)\rho\left(\vec{r}'\right) dv' \tag{A.25}$$

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \mu \int_{V'} G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)\vec{J}\left(\vec{r}'\right) dv' \tag{A.26}$$

con la función de Green dada por

$$G\left(\vec{r},\vec{r}'\right) = \frac{e^{-jk\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \tag{A.27}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Anexo B
Directividad de agrupaciones

En este anexo se presenta un método gráfico para el análisis de la directividad de agrupaciones lineales, que permite llegar a los resultados que ya se han obtenido en la sección 5.6.1 mediante un cálculo riguroso de la integral de radiación. Este método gráfico ayuda a la comprensión intuitiva de la variación de la directividad con los distintos parámetros de la antena, lo cual será de utilidad para estudiar posteriormente la relación entre la directividad, el ancho de haz y el nivel de lóbulo principal a secundario.

B.1 Método gráfico

Hemos visto en la ecuación (5.17) que la fórmula general de la directividad, cuando se expresa la integral de la potencia total radiada en función del ángulo eléctrico ψ, es

$$D = \frac{2kd\left|FA_{MÁX}\right|^2}{\int_{\alpha-kd}^{\alpha+kd}\left|FA(\psi)\right|^2 d\psi} = \frac{1}{\frac{1}{2kd}\int_{\alpha-kd}^{\alpha+kd}\frac{\left|FA(\psi)\right|^2}{\left|FA_{MÁX}\right|^2}d\psi} \tag{B.1}$$

Obsérvese que esta expresión puede interpretarse como el inverso del valor medio en el margen visible del cuadrado del factor de la agrupación normalizado. Esta interpretación es coherente con la definición de la directividad: es el cociente entre la máxima densidad de potencia radiada por unidad de ángulo sólido y el valor medio de la misma sobre una esfera, es decir, el inverso del valor medio de la densidad de potencia radiada normalizada.

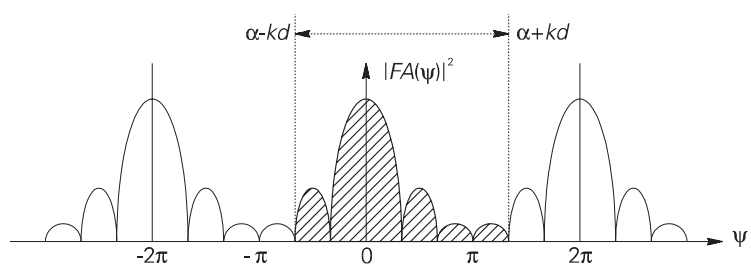


Fig. B.1 Integral del factor de la agrupación en el margen visible

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

El valor de la integral es el área contenida bajo la curva de la función $|FA(\psi)|^2$, en un intervalo de longitud *2kd* centrado en $\psi = \alpha$ (Fig. B.1). Cuando las alimentaciones son reales y positivas, el máximo de $FA(\psi)$ se encuentra en el origen. Supondremos además que el origen se encuentra dentro del margen visible, por lo que las siguientes conclusiones no serán válidas para las agrupaciones de Hansen-Woodyard.

Espaciado mucho menor que la longitud de onda

Cuando el espaciado es mucho menor que la longitud de onda ($kd \to 0$) el margen visible se estrecha alrededor del máximo y el origen, $\psi = 0$, estará contenido en él ($|\alpha| \le kd$). En este caso puede aproximarse $FA(\psi) \approx FA(0) = FA_{MÁX}$ (figura B.2), y el valor de la directividad es

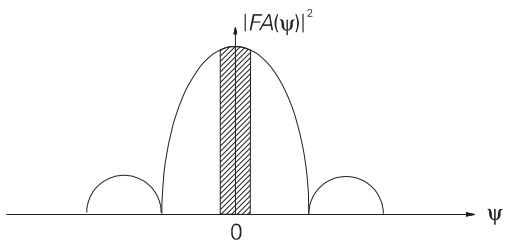


Fig. B.2 Factor de la agrupación y margen visible para pequeños espaciados

$$\lim_{kd \to 0} \int_{\alpha - kd}^{\alpha + kd} \left| FA\left(\psi\right) \right|^2 d\psi \; = \; 2\,kd \left| FA_{MÁX} \right|^2 \Rightarrow D \to 1$$

Este resultado coincide con el obtenido en la sección 5.6.1, y es coherente con el hecho de que al ser el margen visible mucho menor que el ancho del lóbulo principal, el factor de la agrupación es prácticamente igual al máximo y al valor medio en el margen visible del cuadrado del factor de la agrupación normalizado, $|FA(\psi)|^2 / |FA_{MÁX}|^2 = 1$

Aproximación lineal de la directividad

De la expresión (B.1) de la directividad se deduce fácilmente que tendrá una variación lineal con el espaciado cuando el valor de la integral en el margen visible sea constante. En este caso, la pendiente de la curva será inversamente proporcional al valor constante de la integral, el cual puede aproximarse por el área de un periodo de $|FA(\psi)|^2$ si se cumplen las siguientes condiciones:

a) El número de elementos de la agrupación es suficientemente grande como para que el ancho del lóbulo principal de $FA(\psi)$ sea mucho menor que π.
b) El espaciado sea tal que los límites del margen visible $\psi = \alpha \pm kd$ se encuentren en la zona de lóbulos secundarios, lejos del lóbulo principal y lejos también de los lóbulos principales periódicos centrados en $\psi = \pm 2\pi$.

En este caso, como el margen visible contiene el lóbulo principal y los primeros lóbulos secundarios, el área de la función $|FA(\psi)|^2$ contenida en un periodo 2π es aproximadamente igual a la contenida dentro del margen visible, siempre que el espaciado cumpla la condición b). Por ello, al aumentar el espaciado, en (B.1) el margen visible aumenta linealmente, mientras que el valor de la integral permanece prácticamente constante, de forma que la directividad también aumenta linealmente.

En el caso transversal podemos aproximar el área contenida en el margen visible por el área contenida en un periodo del factor de la agrupación (Fig. B.3), y en el caso longitudinal por la contenida en medio periodo (Fig. B.4). El área contenida en un periodo de $|FA(\psi)|^2$ se puede calcular como la potencia de la función periódica $FA(\psi)$ mediante el teorema de Parseval, siendo igual a la suma de los cuadrados de los coeficientes $[a_n]$ de su serie de Fourier

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

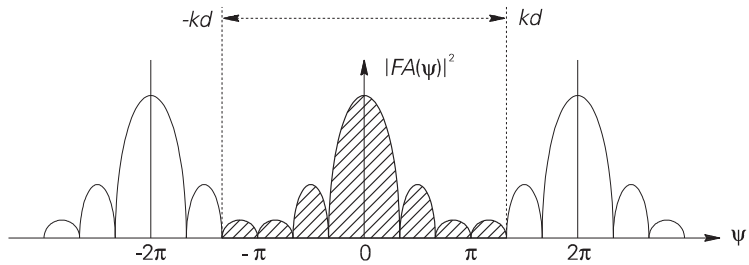


Fig. B.3 Agrupación transversal. Aproximación de la integral sobre el margen visible por la integral sobre un periodo

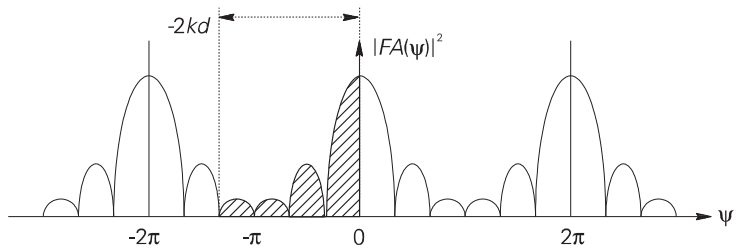


Fig. B. 4 Agrupación longitudinal. Aproximación de la integral sobre el margen visible por la integral sobre un semiperiodo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|FA\left(\psi\right)\right|^2 d\psi \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}FA\left(\psi\right)FA^{*}\left(\psi\right)d\psi \;=\; \sum_{n=0}^{N-1}a_n^2 \tag{B.2}$$

Si sustituimos la integral sobre el margen visible de (B.1) por el área en un periodo, según el teorema de Parseval, tendremos la expresión aproximada para el caso transversal

$$d<\lambda \;\Rightarrow\; D_{transversal} \;=\; 2\frac{d}{\lambda}\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2} \tag{B.3}$$

En el caso longitudinal la integral sobre el margen visible se aproxima por el área en medio periodo, por lo que su valor es la mitad y la directividad el doble

$$d<\frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; D_{longitudinal} \;=\; 4\frac{d}{\lambda}\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2} \tag{B.4}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Para valores del espaciado comprendidos entre $M\lambda$ y $(M+1)\lambda$, M ∈ N, en el caso transversal, en los que los límites del margen visible se encuentren en la zona de lóbulos secundarios pequeños, el margen visible contiene $2M+1$ periodos. Por ello, el valor de la integral será $2M+1$ veces mayor (Fig.B.5), y la pendiente de la aproximación lineal $2M+1$ veces menor

$$M\lambda < d < (M+1)\lambda \Rightarrow D_{transversal} = \frac{1}{2M+1} 2\frac{d}{\lambda} \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2} \tag{B.5}$$

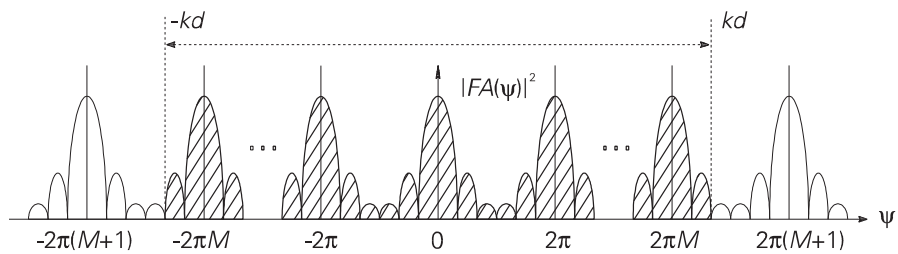


Fig. B.5 Agrupación transversal. Espaciado $M\lambda < d < (M+1)\lambda$. Aproximación lieal en el margen visible por $2M+1$ periodos

En el caso longitudinal, el razonamiento es análogo para espaciados comprendidos entre $M\lambda/2$ y $(M+1)\lambda/2$, en los que el margen visible contiene $2M+1$ semiperiodos de $|FA(\psi)|^2$ (Fig. B.6)

$$M\frac{\lambda}{2} < d < (M+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow D_{longitudinal} = \frac{1}{2M+1} 4\frac{d}{\lambda} \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2} \tag{B.6}$$

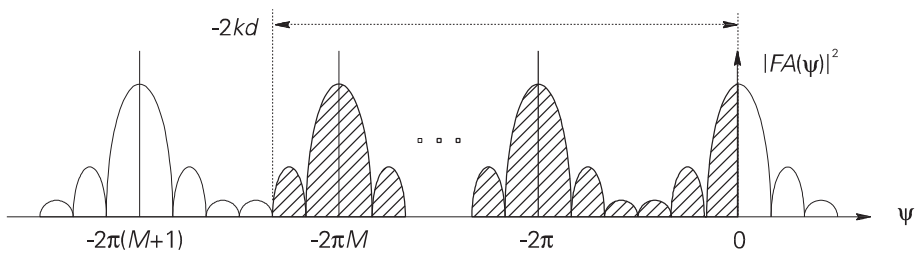


Fig. B.6 Agrupación longitudinal. Espaciado $M\lambda/2 < d < (M+1)\lambda/2$. Aproximación de la integral en el margen visible por $2M+1$ semiperiodos

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Espaciado igual a un número entero de semilongitudes de onda

Las expresiones aproximadas obtenidas en el apartado anterior se hacen exactas cuando el margen visible coincide exactamente con un periodo 2π en el caso transversal ($d = \lambda/2$), o con un semiperiodo π en el caso longitudinal ($d = \lambda/4$), y se obtiene el resultado ya conocido

$$D_{transversal}\left(d=\lambda/2\right) = D_{longitudinal}\left(d=\lambda/4\right) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2} \qquad \text{(B.7)}$$

Para un espaciado igual a un número entero de periodos ($d = n\,\lambda/2$, en el caso transversal), o semiperiodos ($d = n\lambda/4$, en el caso longitudinal) el valor de la integral es n veces mayor que el área contenida bajo un periodo de la función. Como el margen visible es también n veces mayor, el valor medio de la función en el margen visible y, por tanto, la directividad son los mismos que en el caso $d = \lambda/2$, $\alpha = 0$ (transversal) o $d = \lambda/4$, $\alpha = -90º$ (longitudinal).

Como estos razonamientos son igualmente válidos en el límite cuando $n \to \infty$, la directividad para espaciado infinito será la misma que para media longitud de onda, como ya se ha demostrado en la sección 5.6.1.

Cuando el espaciado se acerca a $n\lambda$ en el caso transversal, o $n\lambda/2$ en el longitudinal, la aproximación lineal de la directividad deja de ser válida. Ello es debido a que un lóbulo principal periódico entra en el margen visible, con lo que el valor de la integral aumenta bruscamente (Fig.B.7) y la directividad disminuye, y en el diagrama de radiación aparece un lóbulo de difracción por el que se radia tanta potencia como por el haz principal, lo cual provoca la disminución de la directividad.

Cuanto más ancho es el haz principal (agrupación poco directiva), la disminución de la directividad es menos brusca y se produce a partir de un espaciado menor, por lo que el margen de validez de la aproximación lineal se reduce ligeramente.

B.2 Relación entre alimentación, directividad y diagrama

En el apartado 5.4, dedicado a las distribuciones de corrientes uniforme, triangular y binómica, y en las tablas comparativas 5.2 y 5.3 se ha visto que existe una relación entre la forma de la distribución de corrientes, la directividad y los parámetros del diagrama de radiación: cuanto más uniforme es la distribución de corriente, mayor será la directividad, más estrecho el haz principal y peor el nivel de lóbulo principal a secundario.

Sin embargo, la relación entre estos parámetros no es tan sencilla y depende de más factores. Para reducir el número de variables que se deben considerar puede aislarse fácilmente la dependencia con el espaciado y la fase progresiva: en la zona de validez de la aproximación lineal y para

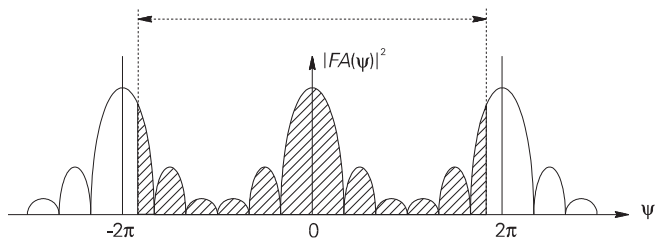


Fig. B7 Espaciado próximo a $n\lambda$. En el margen visible entran lóbulos de difracción que aumentan la potencia total radiada y, por tanto, disminuyen la directividad

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

diagramas transversales o longitudinales, la directividad es proporcional al espaciado y el ancho de haz es inversamente proporcional a él. De esta forma, podemos centrar el análisis en la forma de la distribución de corrientes $[a_n]$ y su relación con el diagrama de radiación.

La directividad, el nivel de lóbulo principal a secundario y el ancho de haz principal dependen por separado de distintas características de la alimentación; además existe una estrecha relación entre estos tres parámetros del diagrama.

Directividad

A partir de las gráficas de directividad de las distribuciones uniforme, triangular y binómica, se observa que cuanto más uniforme es la distribución, mayor es la directividad, y cuanto más acampanada (por ejemplo la binómica) menor es la directividad. Ello es debido a que el cociente $[\Sigma a_n]^2 / \Sigma a_n^2$, al que es siempre proporcional la directividad, es mayor para agrupaciones uniformes y disminuye cuando existe una dispersión de valores en los coeficientes de la alimentación a_n. La relación entre la directividad y la dispersión en los coeficientes a_n puede estudiarse a través de la varianza de la distribución de corrientes.

Sea σ la varianza de la secuencia $[a_n]$ y sea $m = \sum a_n / N$ su valor medio

$$\sigma = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(a_n - m)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2 - m^2 \tag{B.8}$$

Si definimos $\sigma_1 = \sigma/m^2$ como la varianza de la secuencia $[a_n]$ normalizada a valor medio la unidad, $[a_n/m]$, resulta

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{m^2} = N\frac{\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2} - 1 \tag{B.9}$$

Si en la expresión anterior sustituimos el cociente de sumatorios por el valor de la directividad para espaciado $n\lambda/2$ (ecuación (B.7)) y despejamos la directividad normalizada con el número de elementos, obtenemos

$$\frac{D_{\lambda/2}}{N} = \frac{1}{\sigma_1 + 1} \tag{B.10}$$

y resulta que la directividad de una agrupación para $d = n\lambda/2$, normalizada con el número de elementos, depende exclusivamente de la varianza de la distribución de corrientes, normalizada a valor medio la unidad.

Si además nos encontramos en la zona de validez de las aproximaciones lineales obtenemos, sustituyendo $D_{\lambda/2}$,

$$\begin{aligned} &\textit{transversal}: \quad D = 2\frac{Nd}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1+1} \approx 2\frac{L}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1+1} \\ &\textit{longitudinal}: \quad D = 4\frac{Nd}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1+1} \approx 4\frac{L}{\lambda}\frac{1}{\sigma_1+1} \end{aligned} \tag{B.11}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

lo cual significa que, en estos casos, la directividad depende únicamente de dos parámetros: la longitud eléctrica de la agrupación, L/λ, y la varianza de la alimentación normalizada, σ_1.

Por otra parte, como los coeficientes de la alimentación a_n son los coeficientes de la serie de Fourier de la función periódica $FA(\psi)$ y esta última es la transformada de Fourier de la secuencia discreta a_n, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

Ancho de haz

Cuanto mayor es el número de antenas N, mayor es la longitud de la secuencia $[a_n]$ y, por tanto, más estrecho es el lóbulo principal de su transformada $|FA(\psi)|$. Ello implica un haz más estrecho. Por tanto, mayor es la zona de validez de la aproximación lineal de la directividad y más bruscas son las caídas de directividad en $d = n\lambda$ (transversal) o $d = n\lambda/2$ (longitudinal) debidas a la aparición de un nuevo haz principal en el diagrama de radiación.

Nivel de lóbulo principal a secundario

Cuanto más irregular o discontinua sea la alimentación, mayor importancia tienen las altas frecuencias ψ en $FA(\psi)$ y peor es el nivel de lóbulo principal a secundario en el diagrama de radiación (Fig. B.8 y B.9). En general, para una función continua, la ley de decrecimiento asintótico de los lóbulos secundarios de su transformada es del tipo $1/\psi^r$, donde r-1 es el orden de la primera derivada discontinua de la función.

En el caso de agrupaciones de antenas, la distribución de corrientes a_n es una secuencia discreta. En este caso, su transformada es una función periódica. Como la distribución de corrientes es siempre una secuencia de duración finita, su espectro no es de banda limitada y se producen solapamientos. Por ello, los lóbulos secundarios alejados del máximo son mayores de lo esperado según la ley $1/\psi^r$, especialmente en agrupaciones con nivel de lóbulo principal a secundario bajo, como la uniforme (Fig. B.9). Sin embargo, si el número de elementos es grande, el primer lóbulo secundario sí que sigue aproximadamente la ley $1/\psi^r$, por lo que ésta nos permite predecir correctamente el NLPS.

Obsérvese, comparando las figuras B.8 y B.9, que la distribución uniforme es discontinua en los extremos, con lo que los primeros lóbulos secundarios decrecen de la forma $1/\psi$ y el NLPS es de unos 13 dB.

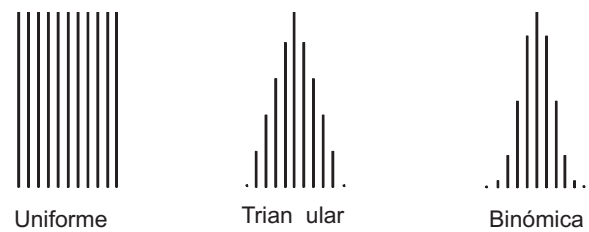


Fig. B.8 Distribuciones de corriente uniforme, triangular y binómica de 11 elementos

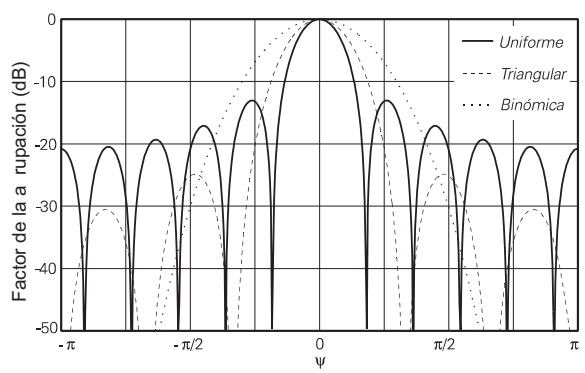


Fig. B.9 Factor de la agrupación de las distribuciones uniforme, triangular y binómica de 11 elementos

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

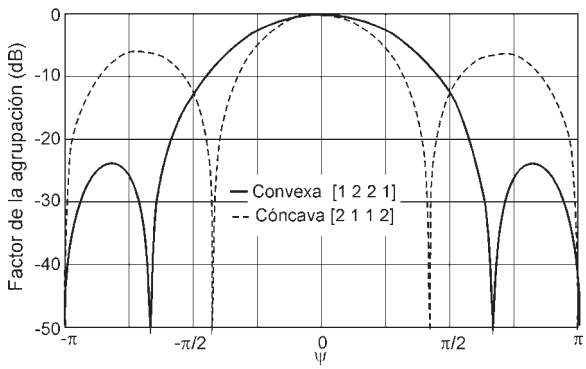


Fig. B.10 Factor de una agrupación convexa comparado con el de una cóncava

Como la triangular es continua con primera derivada discontinua, los primeros lóbulos secundarios decrecen de la forma $1/\psi^2$ y el NLPS es el doble, unos 26 dB. El caso límite es la distribución binómica, que con infinitas derivadas discretas continuas carece de lóbulos secundarios.

Por ejemplo, las alimentaciones que son crecientes del centro a los extremos (distribuciones cóncavas) poseen lóbulos secundarios que decrecen mucho más lentamente que los de las crecientes de los extremos al centro (distribuciones convexas). Ello es debido a que los coeficientes a_n próximos a los extremos presentan en las agrupaciones cóncavas una variación incluso más brusca que en la uniforme, y en ésta más que en las convexas, con lo que aumenta la importancia de las altas frecuencias en el factor de la agrupación, y empeora el NLPS (Fig. B.10).

Relación entre directividad, ancho de haz y nivel de lóbulo principal a secundario

- La relación entre la directividad y el ancho de haz es bien conocida: en un diagrama de radiación con buen NLPS, prácticamente toda la potencia se radia en el haz principal, con lo que puede definirse un ángulo sólido equivalente Ω_{eq} (1.13) tal que $D = 4\pi/\Omega_{eq}$. En estas condiciones de lóbulos secundarios pequeños y si sólo hay un haz principal, la directividad y el ancho de haz son inversamente proporcionales. Esta relación se cumple en los casos típicos de las distribuciones uniforme, triangular y binómica.
- Por otra parte, si dos distribuciones tienen igual directividad para espaciado $\lambda/2$, lo cual implica igual cociente $[\Sigma a_n]^2 / \Sigma a_n^2$, el área encerrada bajo un periodo de $|FA(\psi)|^2 / |FA_{MÁX}|^2$ es la misma. Esto significa que la que tenga mejor NLPS tendrá menos área en los lóbulos secundarios y, por tanto, más en el lóbulo principal. Como la amplitud del lóbulo principal normalizado es siempre uno, la agrupación con mejor NLPS tendrá el haz principal más ancho, y viceversa.
  Esta propiedad puede observarse claramente en la figura B.10 para las alimentaciones [1 2 2 1] (convexa) y [2 1 1 2] (cóncava), y también la cumplen, en cierta manera, los casos uniforme, triangular y binómico aunque la directividad no sea exactamente la misma en todos ellos.

Otras consideraciones

- En general, la gráfica de directividad oscila ligeramente alrededor de la aproximación lineal, debido a la contribución de los lóbulos secundarios con signos alternados que van entrando en el margen visible. Esta oscilación se pone de manifiesto únicamente en agrupaciones poco directivas (de pocos elementos), y su amplitud es tanto menor cuanto mejor sea el nivel de lóbulo principal a secundario.
  Obsérvese, en la figura B.11, la oscilación con amplitud creciente de la directividad de la agrupación uniforme al aproximarse el espaciado a la longitud de onda. Cada oscilación

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

representa la entrada de un lóbulo secundario, cada vez mayor, en el margen visible. En las agrupaciones triangular y binómica, por su elevado NLPS, el efecto no es apreciable.

- Si dos agrupaciones tienen el mismo número de elementos, y las distribuciones de corrientes son tales que el cociente $[\Sigma a_n]^2 / \Sigma a_n^2$ es el mismo en ambas, su directividad será la misma para $d = n\lambda/2$, y diferirá en la zona de aproximación lineal de la siguiente forma: en el caso transversal para $2M\lambda/2<d<(2M+1)\lambda/2$ es más directiva la distribución con peor nivel de lóbulo principal a secundario, mientras que para $(2M+1)\lambda/2 <d<(2M+2)\lambda/2$ la que lo tenga mejor será la más directiva (Fig. B.12).

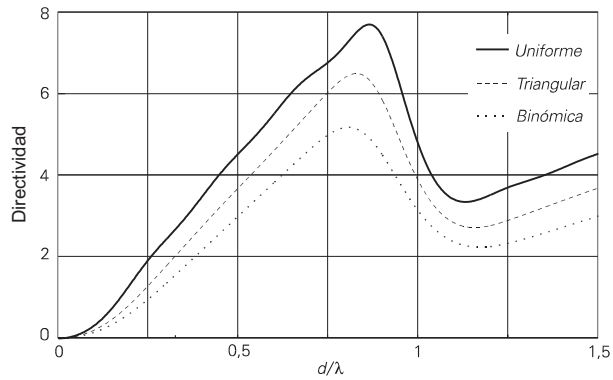


Fig. B.11 Directividad de agrupaciones transversales uniforme, triangular y binómica de 5 elementos

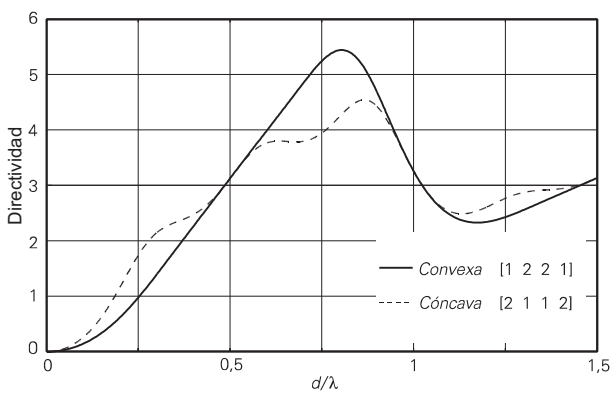


Fig. B.12 Directividad de una agrupación convexa comparada con una cóncava, ambas transversales

Esto es evidente teniendo en cuenta que cuando el margen visible es un número entero de periodos, $d = n\lambda/2$, la integral de $|FA(\psi)|^2$ es la misma para ambas agrupaciones. Entonces, cuando el margen visible es ligeramente inferior, $2M\lambda/2< d <(2M+1)\lambda/2$, el área es menor en la que tenga mayores lóbulos secundarios (más área fuera de la integral), con lo que la directividad será mayor (la "cóncava" de la figura B.12). Inversamente, cuando el margen visible es ligeramente superior a un número entero de semiperiodos, $(2M+1)\lambda/2< d <(2M+2)\lambda/2$, el área es menor, y la directividad será mayor en la que tenga menores lóbulos secundarios (la "convexa" de la figura B.12).

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Anexo C
Símbolos y constantes físicas

C.1 Símbolos

A	amperio
A_{ef}	área efectiva
$\vec{A}$	potencial vector
B	ancho de banda
$\vec{B}$	inducción magnética
B	susceptancia
C	capacidad
C_a	coeficiente de desadaptación
C_p	coeficiente de desacoplo de polarización
C	culombio
c	velocidad de la luz
D	directividad
$\vec{D}$	inducción eléctrica
$\vec{E}$	intensidad de campo eléctrico
e	presión parcial de vapor
F	factor de ruido
F	faradio
$\vec{F}$	potencial vector
FA	factor de agrupación
f	distancia focal
f	frecuencia
f/D_a	relación distancia focal-diámetro
f_p	frecuencia de plasma
G	conductancia
G	función de Green
G	ganancia
G	giga (10^9)
H	henrio
$\vec{H}$	intensidad de campo magnético
I	intensidad de corriente
I_a	intensidad de corriente antisimétrica
I_m	intensidad de corriente máxima
I_s	intensidad de corriente simétrica
$\vec{J}$	densidad de corriente eléctrica
$\vec{J}_s$	densidad laminar de corriente eléctrica
K	intensidad de radiación
K	kelvin
k	kilo (10^3)
k	número de onda
L	atenuación total
L	inductancia
L	pérdida de propagación
L_o	pérdida de propagación en espacio libre
$\vec{L}$	vector de radiación
ℓ_{ef}	longitud efectiva
M	mega (10^6)
$\vec{M}$	densidad de corriente magnética
$\vec{M}_s$	densidad laminar de corriente magnética
MUF	frecuencia máxima utilizable
m	mili (10^{-3})

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

m	momento dipolar magnético
N	coíndice de refracción
N	densidad de ionización
N	ruido
$\vec{N}$	vector de radiación
NLPS	nivel de lóbulo principal a secundario
NLS	nivel de lóbulos secundarios
n	índice de refracción
n	nano (10^{-9})
P	potencia
P	presión atmosférica
P_a	potencia en la apertura
P_{co}	potencia radiada en la polarización de referencia
P_{cx}	potencia radiada en la polarización cruzada
P_e	potencia entregada
P_L	potencia entregada a una carga
P_R	potencia recibida
P_r	potencia radiada
P_T	potencia transmitida
℘	densidad de potencia
$\vec{\wp}$	vector de Poynting
PIRE	potencia isótropa radiada equivalente
p	momento dipolar eléctrico
p	pico (10^{-12})
Q	factor de calidad
R	resistencia
R_e	resistencia de entrada
R_r	resistencia de radiación
R	resistencia de pérdidas
RA	relación axial
rad	radián
S	relación de onda estacionaria
S	señal
S/N	relación señal-ruido
s	segundo
sr	stereoradián
T	temperatura absoluta
T	tesla
T	tera (10^{12})
T_a	temperatura de ruido de antena
T_b	temperatura de brillo
t	diagrama de radiación
V	voltio
v	velocidad
v_f	velocidad de fase
v_g	velocidad de grupo
X	reactancia
X_e	reactancia de entrada
Y	admitancia
Z_a	impedancia de antena
Z_e	impedancia de entrada
Z_m	impedancia mutua
Z_o	impedancia característica
Z_{11}	autoimpedancia
α	ángulo (coseno director respecto a x)
α	atenuación
α	desfase progresivo
β	ángulo (coseno director respecto a y)
β	ángulo de observación de bordes
β	constante de fase
γ	ángulo (coseno director respecto a z)
γ	atenuación específica
γ	constante de propagación compleja
δ	profundidad de penetración
Δθ	ancho de haz
$\Delta\theta_c$	ancho de haz entre ceros
$\Delta\theta_{-3\ dB}$	ancho de haz a -3 dB
ε	permitividad
ε′	parte real de la permitividad relativa
ε″	parte imaginaria de la permitividad relativa
η	impedancia de onda
η_ℓ	eficiencia de pérdidas
η_{il}	eficiencia de iluminación
η_s	eficiencia de desbordamiento
η_x	eficiencia de polarización
η_b	eficiencia de bloqueo
η_t	eficiencia total

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

θ	ángulo polar
λ	longitud de onda
λ_g	longitud de onda en una guía
λ_c	longitud de onda de corte
μ	micro (10^{-6})
μ	permeabilidad
υ	frecuencia de colisiones
ρ	coeficiente de reflexión
ρ	densidad de carga eléctrica
σ	conductividad
σ	espaciado relativo
σ	sección recta radar
σ_s	densidad superficial de carga eléctrica
τ	decaimiento de la iluminación en bordes
τ	densidad de carga magnética
τ_s	densidad superficial de carga magnética
τ	factor de escala
ϕ	ángulo acimutal
Φ	potencial escalar
χ	susceptibilidad
ψ	potencial escalar
Ω	ángulo sólido
Ω	ohmio
ω	pulsación angular
$\hat{}$	vector unitario

C.2 Constantes físicas

carga del electrón	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
masa del electrón	$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
constante de Boltzman	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K
velocidad de la luz	$c \approx 3 \cdot 10^{8}$ m/s
permeabilidad del vacío	$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
permitividad del vacío	$\varepsilon_o \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m

conductividad

acero	$\sigma = 1{,}1 \cdot 10^{6}$ S/m
aluminio	$\sigma = 3{,}8 \cdot 10^{7}$ S/m
cobre	$\sigma = 5{,}8 \cdot 10^{7}$ S/m
latón	$\sigma = 1{,}5 \cdot 10^{7}$ S/m

permitividad relativa

alúmina	$\varepsilon' = 10$
fibra de vidrio	$\varepsilon' = 4{,}1$
cuarzo fundido	$\varepsilon' = 3{,}8$
PTFE (teflón)	$\varepsilon' = 2{,}1$
PVC	$\varepsilon' = 2{,}7$
vidrio	$\varepsilon' = 4\text{-}8$

C.3 Dimensiones y factores de conversión

radio medio de la tierra	6.370 km
radio medio de la luna	1.728 km
distancia a la luna	380.000 km
milla estatutaria	1.609 m
milla náutica	1.852 m
pulgada	25,4 mm
pie	304,8 mm

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Anexo D
Operadores vectoriales y transformación de coordenadas

D.1 Relaciones vectoriales y operadores

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\nabla(\Phi+\psi) = \nabla\Phi+\nabla\psi$$

$$\nabla(\Phi\,\psi) = \Phi\nabla\psi+\psi\nabla\Phi$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(\psi\vec{A}) = \nabla\psi\times\vec{A}+\psi\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\nabla\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi = \nabla^2\psi$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$$

$$\nabla\times\nabla\psi = 0$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

Teorema de Stokes

$$\int_S \nabla\times\vec{A}\cdot\hat{n}\,ds = \int_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\int_S \hat{n}\times\nabla\psi\,ds = \int_C \psi\,d\vec{\ell}$$

Teorema de la divergencia

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dv = \int_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds$$

$$\int_V \nabla\times\vec{A}\,dv = \int_S \hat{n}\times\vec{A}\,ds$$

$$\int_V \nabla\psi\,dv = \int_S \psi\,\hat{n}\,ds$$

D.2 Opeadores vectoriales en sistemas de coordenadas habituales

Coordenadas cartesianas (*x, y, z*)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad \nabla^2\vec{A} = \nabla^2 A_x\hat{x} + \nabla^2 A_y\hat{y} + \nabla^2 A_z\hat{z}$$

Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\phi} = \hat{\phi} \qquad \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi} = -\hat{\rho}$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{A_\rho}{\rho^2}\right)\hat{\rho} + \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{\rho^2}\right)\hat{\phi} + \left(\nabla^2 A_z\right)\hat{z}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

438

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta} \qquad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{r} \qquad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \hat{\phi}\,\mathrm{sen}\theta \qquad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} = \hat{\phi}\cos\theta \qquad \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi} = -\hat{r}\,\mathrm{sen}\theta - \hat{\theta}\cos\theta$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{A}_\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\mathrm{sen}\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\mathrm{sen}\theta\mathrm{A}_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \left[\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \mathrm{cotg}\theta\mathrm{A}_\theta + \mathrm{cosec}\theta\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right]\hat{r} +$$

$$+ \left[\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(\mathrm{cosec}^2\theta\mathrm{A}_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + 2\mathrm{cotg}\theta\mathrm{cosec}\theta\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\right]\hat{\theta} +$$

$$+ \left[\nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2}\left(\mathrm{cosec}^2\theta\mathrm{A}_\phi - 2\mathrm{cosec}\theta\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - 2\mathrm{cotg}\theta\mathrm{cosec}\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\right]\hat{\phi}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

D.3 Transformaciones de coordenadas

Cartesianas - cilíndricas

$x = \rho\cos\phi \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = z$

$$\begin{pmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\phi}\\ \hat{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & \mathrm{sen}\,\phi & 0\\ -\mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\mathrm{sen}\,\phi & 0\\ \mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\phi}\\ \hat{z}\end{pmatrix}$$

Cartesianas - esféricas

$x = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$

$$\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi & \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & -\mathrm{sen}\,\theta\\ -\mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\mathrm{sen}\,\phi\\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\phi}\end{pmatrix}$$

Cilíndricas - esféricas

$\rho = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \phi = \phi \qquad z = r\cos\theta$

$$\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\,\theta\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\phi}\\ \hat{z}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\phi}\\ \hat{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\phi}\end{pmatrix}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Anexo E
Funciones

Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

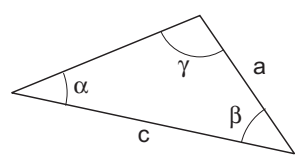
$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \qquad 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) \qquad 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

teorema de los senos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

fórmula de Moivre: $(\cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + j\operatorname{sen} n\alpha$



$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = -4\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(4\alpha) = 8\cos^3\alpha\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

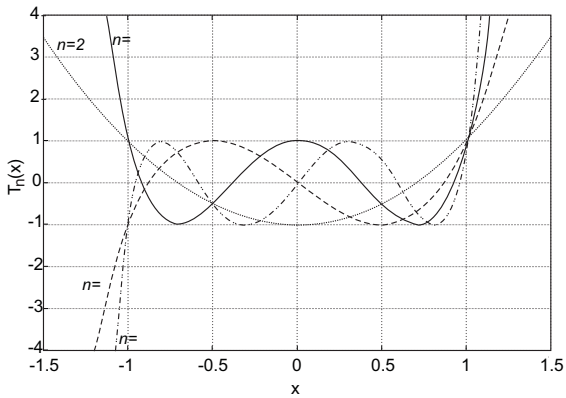
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\operatorname{sen}^3\alpha = \frac{1}{4}(-\operatorname{sen}3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha) \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

$$\operatorname{sen}^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3) \qquad \cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

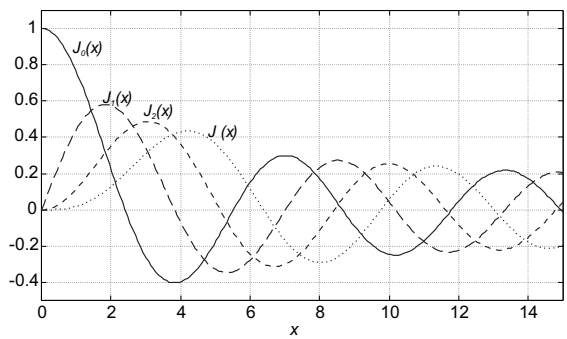
Polinomios de Chebychev

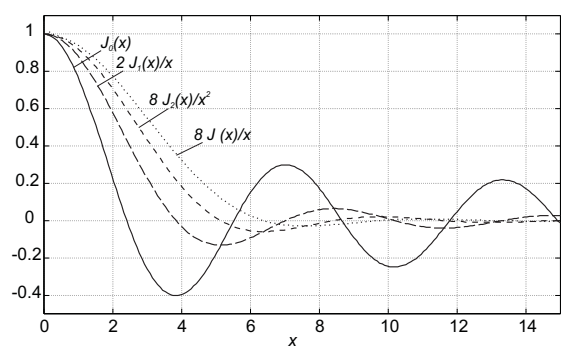


$$T_n(x) = \begin{cases} \cos nt, & x = \cos t \\ \operatorname{ch} nt, & x = \operatorname{ch} t \end{cases}$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Funciones de Bessel





$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{m!\,(m+n)!}$$

$$J_n(x) = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jx\cos\alpha} \cos n\alpha \, d\alpha$$

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$$

$$\int J_1(x)\, dx = -J_0(x)$$

$$\int x J_0(x)\, dx = x J_1(x)$$

$$\int x^{n+1} J_n(x)\, dx = x^{n+1} J_{n+1}(x)$$

Integrales habituales

$$\int_{-1}^{1} e^{jux}\, dx = 2\frac{\operatorname{sen} u}{u} \qquad \int_{-1}^{1} (1-|x|) e^{jux}\, dx = \left(\frac{\operatorname{sen} u/2}{u/2}\right)^2 \qquad \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) e^{jux}\, dx = \frac{\pi \cos u}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - u^2}$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Anexo F
Respuestas a cuestiones y problemas

1. Consideraciones generales sobre antenas

Cuestiones

1.1 d	**1.2** d	**1.3** a	**1.4** a	**1.5** b	**1.6** b	**1.7** c
1.8 c	**1.9** d	**1.10** a	**1.11** a	**1.12** c	**1.13** b	**1.14** d
1.15 c	**1.16** c	**1.17** b	**1.18** b	**1.19** b	**1.20** d	

Problemas

1.1 $\Delta\theta_{-3dB} = 8{,}4º$, NLPS = 13,2 dB

1.2 a) D = 2 (n+1)
b) n = 1: $\Delta\theta_{-3dB} = 120º$, D ≈ 2,9 (D = 4); n = 2: $\Delta\theta_{-3dB} = 90º$, D ≈ 5,1 (D = 6)

1.3 $\wp = 8\ \mu W/m^2$; E = 54,8 mV/m; V = 54,8 mV; P_L =10 µW

1.4 S = 1,4 µW; S/N = 59,8 dB

1.5 a) $f_d = f2v/c = 3{,}9$ kHz
b) $r_{máx} = 736$ m

1.6 Margen de 11,9 dB en la interrogación y de 12,5 dB en la respuesta

1.7 a) $\eta_a = 1{,}22 \cdot 10^{-6}$
b) S = -74,6 dBm; N = -127,6 dBm
c) S/N = 53 dB

1.8 D > 31,3 dB

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

1.9 a) P_R = -38,5 dBm
b) S/N = 56,7 dB
c) G: 16,5 - 36,5 dB

1.10 a) S/N = 9,5 dB
b) $\Delta\theta = \pm 0{,}4^\circ$
c) S/N = -6,6 dB
d) $\Delta S/N|_{ant}$ = 2,1 dB; $\Delta S/N|_T$ = 0,48 dB; $\Delta S/N|_B$ = 7,26 dB; S/N = 3,3 dB
e) $\Delta\theta = \pm 0{,}01^\circ$

2 Propagación

Cuestiones

2.1 a	**2.2** a	**2.3** a	**2.4** d	**2.5** c	**2.6** c	**2.7** d
2.8 a	**2.9** b	**2.10** c	**2.11** a	**2.12** b	**2.13** d	**2.14** a
2.15 a	**2.16** c	**2.17** b	**2.18** b	**2.19** d	**2.20** d	

Problemas

2.1 a) S/N =37,4 dB
b) α = 6 dB
c) L = 1,8 dB; L = ±0,4 dB
d) L = 12 dB
e) h = 36,8 m o 55,8 m si se deja libre la primera zona de Fresnel.

2.2 a) P_R/P_T = -86,5 dB; P_R/P_T = -125,6 dB
b) S/N = 44 dB; S/N = 5 dB

2.3 a) $T_a = T_b L + T_m (1-L)$, $L = 10^{-\alpha D/10}$
b) f = 1 GHz, $\Psi = 5^\circ$: T_a = 3,9 K
f = 1 GHz, $\Psi = 90^\circ$: T_a = 2,8 K
f = 10 GHz, $\Psi = 5^\circ$: T_a = 101,8 K
f = 10 GHz, $\Psi = 90^\circ$: T_a = 13,1 K

2.4 a) d = 455 km
b) P_T = 265 kW
c) d = 50 km sobre tierra seca y 750 km sobre el mar.
d) $\eta_{(} = 3 \cdot 10^{-9}$
e) De día hay absorción en la capa D y sólo se produce propagación mediante onda de superficie.

2.5 a) F_2
b) $d_{máx}$ = 3.830 km; $d_{mín}$ = 2.290 km
c) R = 14.600 km
d) 2.290 - 3.530 km

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

3 Fundamentos de radiación

Cuestiones

3.1 d	**3.2** a	**3.3** c	**3.4** a	**3.5** a	**3.6** a	**3.7** c
3.8 d	**3.9** d	**3.10** b	**3.11** d	**3.12** c	**3.13** a	**3.14** c
3.15 d	**3.16** c	**3.17** a	**3.18** a	**3.19** c	**3.20** a	

Problemas

3.1 a) $5{,}6\cdot10^{-11}$ A/m^2
b) $2{,}8\cdot10^{-4}$ A/m^2
c) $8{,}3\cdot10^{8}$ A/m^2

3.2 $\text{tg}\,\delta = \omega_p^2\nu / (\omega(\omega^2 + \nu^2 - \omega_p^2))$

3.3 $|N_\theta| = |1\text{-}\cos\phi\,\text{sen}\,2\theta|^{1/2}$; $|N_\phi| = 1$

3.5 $\vec{N}_2 = \exp\left(j\vec{k}\cdot\vec{r}_c\right)\vec{N}_1$

3.6 $r = 50\,\lambda$

4 Análisis de antenas básicas

Cuestiones

4.1 b	**4.2** a	**4.3** c	**4.4** b	**4.5** b	**4.6** c	**4.7** d
4.8 b	**4.9** c	**4.10** c	**4.11** a	**4.12** a	**4.13** a	**4.14** b
4.15 a	**4.16** c					

Problemas

4.1 a) $\vec{m} = I\ell_1\ell_2(\hat{x}+\hat{y})$ (es equivalente a una espira rotada 45º)
$t(\theta,\phi) = (1+\cos^2\theta - \text{sen}\,2\phi\,(1-\cos^2\theta))/2$
b) $\pm\hat{z}$: horizontal; $\pm\hat{x}$, $\pm\hat{y}$: vertical
c) D = 3/2

4.2 a) $$\vec{N}_\perp = \hat{\theta}\left[j\frac{4k}{k^2-k_x^2}\cos k_x\frac{\lambda}{4}\text{sen}\,k_y\frac{\lambda}{4}\cos\theta\cos\phi - j\frac{4k}{k^2-k_y^2}\cos k_y\frac{\lambda}{4}\text{sen}\,k_x\frac{\lambda}{4}\cos\theta\,\text{sen}\,\phi\right] +$$
$$+\hat{\phi}\left[-j\frac{4k}{k^2-k_x^2}\cos k_x\frac{\lambda}{4}\text{sen}\,k_y\frac{\lambda}{4}\text{sen}\,\phi - j\frac{4k}{k^2-k_y^2}\cos k_y\frac{\lambda}{4}\text{sen}\,k_x\frac{\lambda}{4}\cos\phi\right]$$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) $\left|E_\phi\right| = \frac{120}{r}\left|\frac{\cos(0{,}5\pi\cos\phi)\,\mathrm{sen}(0{,}5\pi\,\mathrm{sen}\,\phi)}{\mathrm{sen}\,\phi} + \frac{\cos(0{,}5\pi\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\mathrm{sen}(0{,}5\pi\cos\phi)}{\cos\phi}\right|$

c) D = 2,5 dB

4.3 a) $Z_1 = 75 - j75\ \Omega$; $Z_2 = 75 + j75\ \Omega$; $Z_e = 75\ \Omega$

$I_1(0) = I(0)\,0{,}707\,e^{j\frac{\pi}{4}}$; $I_2(0) = I(0)\,0{,}707\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$\vec{I}_1 = \hat{x}\,I(0)\,0{,}707\,e^{j\frac{\pi}{4}}\,\frac{\mathrm{sen}\,k(H-|x|)}{\mathrm{sen}\,kH}$

$\vec{I}_2 = \hat{y}\,I(0)\,0{,}707\,e^{-j\frac{\pi}{4}}\,\frac{\mathrm{sen}\,k(H-|y|)}{\mathrm{sen}\,kH}$

$V_{ca} = -\lambda\,0{,}164\,e^{j\frac{\pi}{4}}$ V / m

b) $V_{ca} = -\lambda\,0{,}164\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$ V / m
c) Circular a derechas
d) Sólo ha de simetrizarse

e) $Z_{12} = \frac{9{,}81\lambda}{|z_o|}e^{-j(k|z_o|-\pi/4)}$

446

4.4 a)

$$I = \begin{cases} \hat{y}\,\frac{I_0}{2}\left(1-\frac{y}{\ell}\right) & 0 \le y \le \ell \\ \hat{z}\,I_0\left(1-\frac{z}{2\ell}\right) & 0 \le z \le \ell \end{cases}$$

b) *xz*: $\vec{N} = I_0\,\ell\{-1{,}5\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\theta} + j0{,}5\,\mathrm{sen}(\pi\cos\theta/60)\hat{\phi}\}$
xy: $\vec{N} = -I_0\,\ell 1{,}5\hat{\theta}$

c) $\hat{x}:\vec{E} = \hat{z}\,2{,}4$ mV / m; $\hat{y}:\vec{E} = \hat{z}\,2{,}4$ mV / m; $\hat{z}:\vec{E} = \hat{y}\,41\,\mu$V / m
d) D = 3; $Z_e = 0{,}062 - j3.115\ \Omega$. Monopolo simple: D = 1,5; $Z_e = 0{,}027 - j5.725\ \Omega$

4.5 a) $\ell_1 = 0{,}166$ m
b) $\ell_2 = 0{,}166$ m
c) $\ell_3 = 0{,}21$ m
d) $\ell_{ef} = 0{,}106$ m; $R_r = 36{,}5\ \Omega$
e) $\ell_{ef} = 0{,}247$ m; $R_r = 24\ \Omega$

4.6 a) $I_2 = I_1$; $Z_{e1} = Z_{e2} = Z_{11} + Z_{12} = 79 + j35\,\Omega$

b) $|E_\theta| = \frac{120 I_1}{r}\left|\frac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\mathrm{sen}\,\theta}\cos(0{,}7\pi\cos\theta)\right|$; $\Delta\theta^E_{-3dB} = 37^\circ$

c) D = 3 = 4,8 dB; $D_{aprox} = \frac{4\pi}{2\pi\Delta\theta} = 3{,}1$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

4.7 a) $I_2 = -I_1$; $Z_{e1} = Z_{e2} = Z_{11} - Z_{12} = 9 + j40\,\Omega$

b) $|E_0| = \dfrac{120\,I_1}{r}\left|\dfrac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}(0{,}125\pi\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\right|$; $D_{max} = 3{,}9 = 5{,}9\,\text{dB}$

c) $t_E(\theta) = 20\log\left[\dfrac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\operatorname{sen}(0{,}125\pi\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\pi/8}\right]\text{dB}$

d) $\eta_\ell = 9/11$; $G_{\max} = 3{,}2 = 5\,\text{dB}$

4.8 a) $I_2 = I_1$; $Z_{e1} = Z_{e2} = Z_{11} + Z_{12} = 60 + j13\,\Omega$

Se sintonizaría acortando, o C en la base, o L en A-A'; $Z_0 = 77{,}5\ \Omega$

b) $I_e = 1{,}55\,\text{A}$; $I = 1\,\text{A}$; $\left|E_\theta\right| = \dfrac{120}{r}\left|\dfrac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\cos(0{,}5\pi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\right|$

c) $t_E(\theta) = 20\log\left[\dfrac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\right]\text{dB}$; $t_H(\phi) = 20\log\left[\cos(0{,}5\pi\operatorname{sen}\phi)\right]\text{dB}$

d) $D_{max} = 4$

e) $V_{ca} = 1{,}23$ mV; $P_R = 7{,}6\cdot10^{-9}$ W

4.9 a) $\dfrac{1}{Z_e} = \dfrac{1}{4Z_{11}} + \dfrac{1}{j2Z_0\,\text{tg}\,kL/2}$

b) L = 0,40 λ: $Z_e = 349 - j125\ \Omega$
L = 0,45 λ: $Z_e = 290 + j24\ \Omega$
L = 0,50 λ: $Z_e = 292 + j172\ \Omega$
Resonancia: L ≈ 0,442 λ

c) $Z_1 \approx 75\ \Omega$; $\ell_1 = \lambda/2$

d) $t(\theta,\phi) = \left[\dfrac{\cos(kL\cos\theta/2) - \cos(kL/2)}{\operatorname{sen}\theta}\right]^2$

5 Agrupaciones de antenas

Cuestiones

5.1 d	**5.2** b	**5.3** c	**5.4** c	**5.5** a	**5.6** d	**5.7** c
5.8 c	**5.9** a	**5.10** b	**5.11** d	**5.12** d	**5.13** c	**5.14** d
5.15 b	**5.16** d	**5.17** c	**5.18** b	**5.19** d	**5.20** c	

Problemas

5.1 a) $FA(\psi) = 4\cos\left(\dfrac{\psi}{2}\right) + 2\cos\left(\dfrac{3\psi}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}(\psi/2)}\dfrac{\operatorname{sen}(3\psi/2)}{\operatorname{sen}(\psi/2)}$; $P(z) = 1 + 2z + 2z^2 + z^3$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) Ceros en $\psi_c = 120º, 180º, -120º$
d) $\Delta\theta_c = 98{,}2º$
e) *NLPS* = 1,7 (4,8 dB)

5.2 a) $FA(\psi) = \dfrac{\text{sen}(4\psi)}{\text{sen}(\psi/2)}$, $f = 3$ GHz: $\psi = \pi\cos\theta - 2\pi$, $\theta_{max} = 90º$

b) $f = 2{,}5$ GHz: $\text{kd} = 0{,}83\pi$, $\alpha = -1{,}67\pi$; $\theta_{max} = 113{,}6º$
$f = 3{,}5$ GHz: $\text{kd} = 1{,}17\pi$, $\alpha = -2{,}33\pi$; $\theta_{max} = 73{,}4º$

c) $f = 4$ GHz: $\theta_{max} = 60º,\ 180º$

d) $FA(\psi) = \dfrac{2\,\text{sen}^2(2\psi)}{\text{sen}(\psi/2)}$, $\psi = \pi\cos\theta$

5.3 a) $FA(\psi_1) = 2\cos\psi_1/2, \quad \psi_1 = 0{,}5\pi(\cos\Phi - 1)$
$FA(\psi_2) = 2\cos\psi_2/2, \quad \psi_2 = 0{,}9\pi(\cos\Phi - 1)$

b) $FA(\psi) = 4\cos(0{,}25\pi(\cos\Phi - 1))\cos(0{,}45\pi(\cos\Phi - 1))$

c) $\Phi_{c_1} = 180º$, $\Phi_{c_2} = 96{,}4º$

d) $t(\theta,\phi) = \left|\dfrac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\text{sen}\,\theta}\cos(0{,}25\pi(\text{sen}\,\theta\cos\phi - 1))\cos(0{,}45\pi(\text{sen}\,\theta\cos\phi - 1))\right|^2$

5.4 a) $FA(\psi) = \left[\dfrac{\text{sen}(3\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)}\right]^2$; $P(z) = (1 + z + z^2)^2 = 1 + 2z + 3z^2 + 2z^3 + z^4$

b) Ceros en $\psi_c = \pm 120º$ dobles
c) NLPS = 9 (19 dB); $\Delta\theta_c = 219º$

d) $P(z) = 2 + 3z + 2z^2$; $FA(\psi) = 3 + 4\cos\psi$

f) NLPS = 7 (16,9 dB); $\Delta\theta_c = 245º$

5.5 a) $[V] = [1\ 1\ 1\ 1]$

b) $\vec{E} = j60\dfrac{I_0}{r}e^{-jkr}\dfrac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\text{sen}\,\theta}\cdot\dfrac{\text{sen}(2\pi\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi)}{\text{sen}(0{,}5\pi\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi)}\,\hat{\theta}$

c) $FA = 2\,\text{sen}(0{,}5\pi\,\text{sen}\,\theta\cos\phi)$

d) Como el de la figura 4.36 con el cortocircuito en el plano conductor.

5.6 a) $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 3z^3 + 2z^4 + z^5$; $\psi_c = 90º, 120º, 180º, 240º, 270º$

b) Hexadecimal: 0, 2, 3, 5, 6, 8

c) $E_{\max}(b)/E_{\max}(a)$=11,94/12

d) $\Delta\theta = 25{,}4º$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

5.7 a) $kd = \pi/4,\ \alpha = -\pi/4$; $kd = \pi/2,\ \alpha = -\pi/2$; $kd = 3\pi/4,\ \alpha = -3\pi/4$;
b) $kd = 3\pi/4,\ \alpha = -3\pi/4$; $\theta_{c_1} = 70{,}7^\circ$, $\theta_{c_2} = 109{,}3^\circ$, $\theta_{c_3} = 180^\circ$, $NLPS = 11{,}3$ dB
c) 1: -1,765: 1,765: -1; $NLPS = 0$ dB

5.8 a) 0 : 1 : 2 : 1 : 2 : 1 : 0
b) $\Delta\theta_c = 51{,}4^\circ$, $NLPS = 10{,}9$ dB

5.9 a) $\vec{E} = j60\frac{I_0}{r}e^{-jkr}\frac{\cos(0{,}5\pi\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\cdot 8\cos^3(0{,}5\pi\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\,\hat{\theta}$

b) 1 : 2,67 : 2,67 : 1

5.10 a) $I_2 = I_1 \cdot 0{,}75 e^{j0{,}62}$
b) $Z_e = 300 + j\ 125\ \Omega$
c) $V_{ca} = -0{,}46\ e^{-j\,0{,}3}$ mV

6 Aperturas

Cuestiones

6.1 d	**6.2** c	**6.3** c	**6.4** c	**6.5** a	**6.6** b	**6.7** b
6.8 a	**6.9** a	**6.10** d	**6.11** b	**6.12** a	**6.13** c	**6.14** c
6.15 a	**6.16** b	**6.17** c	**6.18** d	**6.19** b	**6.20** a	

Problemas

6.1 a) $t_E(\theta) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\left[\frac{\operatorname{sen}u}{u}\right]^2$, $u = k\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta$

b) $t_H(\theta) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\left[\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}u}{u} + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}u/2}{u/2}\right]^2$

c) η_{il}=0,9
d) $\theta_{c_1}^E = \operatorname{arcsen}(\lambda/\ell)$

$\theta_{c_1}^H = \operatorname{arcsen}(1{,}16\lambda/\ell)$

6.2 a) $E = 1\ \mu$V/m
b) $\Delta\theta_{ceros}^H = 8{,}6^\circ$
c) $\eta_{il} = 0{,}61$
d) $D = 31{,}8$ dB; $A_{ef} = 2{,}7$ m^2

6.3 a) $\vec{M}_{ST} = 2E_0\cos(\pi x/a)\,\hat{x}$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

b) $E_\theta = j\dfrac{e^{-jkr}}{2\lambda r}E_0\,\pi ab\,\mathrm{sen}\,\phi\,\dfrac{\cos(k_x a/2)}{(\pi/2)^2-(k_x a/2)^2}\,\dfrac{\mathrm{sen}(k_y b/2)}{k_y b/2}$

$E_\phi = j\dfrac{e^{-jkr}}{2\lambda r}E_0\,\pi ab\,\cos\theta\,\cos\phi\,\dfrac{\cos(k_x a/2)}{(\pi/2)^2-(k_x a/2)^2}\,\dfrac{\mathrm{sen}(k_y b/2)}{k_y b/2}$

c) plano E: $|E_\theta| = \dfrac{E_0\lambda}{\pi r}\left|\dfrac{\mathrm{sen}\,(0{,}5\pi\,\mathrm{sen}\,\theta)}{0{,}5\pi\,\mathrm{sen}\,\theta}\right|$

plano H: $|E_\phi| = \dfrac{E_0\lambda}{\pi r}\left|\dfrac{\cos(\pi\,\mathrm{sen}\,\theta)}{1-(2\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\cdot\cos\theta\right|$

d) $D = \dfrac{32ab}{\pi\lambda^2}$; $a=\lambda$, $b=\lambda/2$: $D = 7{,}1$ dB

6.4 a) $s = 1/4$; $t = 3/8$

b) $\mathrm{NLPS_E} = 10{,}7$ dB

c) $\wedge\theta^{H}_{-3dB}$ 32^{r}

d) $\eta_{il} = 0{,}81$

e) $D = 17$ dB

450

6.5 a) $\Delta\theta^{E}_{-3dB} = 21{,}1^\circ$; $\Delta\theta^{H}_{-3dB} = 23{,}2^\circ$

b) $FA(\psi) = \dfrac{\mathrm{sen}(5\psi/2)}{\mathrm{sen}(\psi/2)}$; $\psi = 4\pi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$

6.6 a) $\vec{M} = \begin{cases} 2E_0(\hat{x}+\hat{y}), & \text{pares} \\ 2E_0(-\hat{x}+\hat{y}), & \text{impares} \end{cases}$

b) $\hat{y}$: $1:1:1:1:1:1$ $(\{1\}, \alpha = 0)$

$\hat{x}$: $1:-1:1:-1:1:-1$ $(\{1\}, \alpha = \pi)$

c) $FA(\psi) = \dfrac{\mathrm{sen}\,(3\psi)}{\mathrm{sen}\,(\psi/2)}$ $\begin{cases} \hat{y}: & \psi = 1{,}32\pi\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi \\ \hat{x}: & \psi = 1{,}32\pi\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi - \pi \end{cases}$

d) $E_y(\theta) \propto \dfrac{\mathrm{sen}\,(3{,}96\pi\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\pi)}{\mathrm{sen}\,(0{,}66\pi\,\mathrm{sen}\,\theta - 0{,}5\pi)}\cdot\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$

6.7 a) $\vec{M}_{sy} = -2E_0\hat{y}$, $|y| \le \ell/2$

$\vec{M}_{sx} = -2jE_0\hat{x}$, $|x| \le \ell/2$

b) $E_\theta = jk\ell\dfrac{E_0 h}{\pi}\dfrac{e^{-jkr}}{r}\left[-j\dfrac{\mathrm{sen}(k_x\ell/2)}{k_x\ell/2}\cos\left(k_y\dfrac{\ell}{2}\right)\mathrm{sen}\,\phi + \dfrac{\mathrm{sen}\,(k_y\ell/2)}{k_y\ell/2}\cos\left(k_x\dfrac{\ell}{2}\right)\cos\phi\right]$

$E_\phi = -jk\ell\dfrac{E_0 h}{\pi}\dfrac{e^{-jkr}}{r}\left[j\dfrac{\mathrm{sen}(k_x\ell/2)}{k_x\ell/2}\cos\left(k_y\dfrac{\ell}{2}\right)\cos\theta\cos\phi + \dfrac{\mathrm{sen}(k_y\ell/2)}{k_y\ell/2}\cos\left(k_x\dfrac{\ell}{2}\right)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\right]$

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

c) $\vec{E} = jk\ell \frac{E_0 h}{\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\hat{x} - j\hat{y}\right]$

6.8 a) D = 14,4 dB

b) $E(d) = \frac{0{,}12}{\lambda} |1 - \cos kd| \ V/m$

6.9 a) $\tau(\rho=0) = 0$ dB, $\tau(\rho=D_a/4) = -3{,}5$ dB, $\tau(\rho=D_a/2) = -11$ dB
b) $\eta_{il} = 0{,}91$
c) D = 35,3 dB, $\Delta\theta_{-3\,dB} = 3{,}5^\circ$, $\Delta\theta_{-10\,dB} = 6{,}3^\circ$, NLPS = 27 dB

6.10 a) $|E| = \frac{E_0}{2\lambda r} \cdot 4\pi a^2 (1+\cos\theta) \frac{|J_2(ka \operatorname{sen}\theta)|}{(ka \operatorname{sen}\theta)^2}$;
primer cero: $u_{c_1} = 5{,}1$, $\Delta\theta_c = 5{,}2^\circ$;
primer màximo secundario: $J_2(6{,}7) = -0{,}31$, $NLPS = 25$ dB
b) $\eta_{il} = 0{,}75$, D = 39,8 dB, $\Delta\theta_{-3dB} \approx 2{,}1^\circ$

6.11 a) $P(z) = \sum_{n=0}^{9} [\operatorname{sen} 0{,}1\pi(n+0{,}5)] z^n$

451

b) $\psi_{c_1} = \pm 54^\circ$, $\psi_{c_2} = \pm 90^\circ$
c) $\tau(\beta) = -8$ dB

d) $\Delta\theta_{-3\,dB} \approx \lambda/D_a$: $\Delta\theta_{-3\,dB} \approx 0{,}012$, $\Delta\theta_{-10\,dB} \approx 0{,}022$;
cobertura a -3 dB: elipse de 430 x 570 km
cobertura a -10 dB: elipse de 790 x 1.040 km
e) $\Delta\theta = 0{,}11^\circ$
f) Situando fuera del foco otro alimentador para producir un segundo haz.

6.12 a) $\vec{E}_a = \sqrt{\frac{3\eta P_T}{4Lf}} \left(1 - \frac{|y'|}{2f}\right) e^{-jk(f+z_a)} \hat{x}, \quad |y'| \le D_a/2, \quad |x'| \le L/2$
b) $f/D_a = 0{,}31$
c) $\eta_{il} = 0{,}88$, $D = 39{,}5$ dB
d) $\Delta\theta^E_{-3dB} = 1^\circ$; $\Delta\theta^H_{-3dB} = 4{,}6^\circ$; $NLPS_E \approx 13{,}2$ dB; $NLPS_H \approx 25$ dB

6.13 a) $D_a = 0{,}76$ m; $y'_0 = 0{,}55$ m
b) $\tau = -1{,}54$ dB
c) $\Delta\theta_{-3\,dB} = 21^\circ$
d) $\eta_{il} = 0{,}66$; $D = 36{,}2$ dB

6.14 a) $\tau \approx -10$ dB
b) $s = 3/8$; $d_m = 3{,}7\lambda$; $\ell_c = 4{,}6\lambda$; $D = 18{,}5$ dB

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

c) $\eta_{il} = 0{,}75$
d) $D = 50{,}8$ dB

6.15 a) $\beta = 36{,}9^{\circ}$; $d = 8{,}3$ cm; $r_0 = 41{,}7$ cm
b) $D_0 = 5$
c) $\eta_b = 1$; $\eta_s = 0{,}41$
d) $\tau = -6{,}2$ dB : $E_a(\theta = \beta) \approx \frac{1}{2} E_a(\theta = 0)$
e) $E_a = E_0(1 - \rho / D_a)$, $0 \le \rho \le D_a / 2$; $\eta_{il} = 0{,}97$
f) $D = 30{,}4$ dB

7 Antenas de banda ancha

Cuestiones

7.1 c **7.2** c **7.3** d **7.4** a **7.5** a **7.6** c **7.7** d **7.8** b **7.9** d **7.10** d
7.11 c **7.12** b **7.13** b **7.14** a **7.15** a **7.16** a **7.17** c **7.18** a

Problemas

452

7.1 a) $\vec{E} = j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I_0 \ell e^{j(k_z - \beta)\ell/2} \cdot \text{sinc}[(k_z - \beta)\ell/2] \cdot \text{sen}\theta \cdot \hat{\theta}$

b) $|E_\theta| = 60 I_0 |\text{sen}\,[7\pi(1-\cos\theta)] \cdot \text{cotg}\,\theta/2|$; $\theta_m = 18{,}7^{\circ}$
$\theta_c = \arccos\,[1 - n/7]$; $n = 1, 2, ..., 14$; NLPS = 5,6 dB
c) $h = 0{,}25\lambda / \text{sen}\,\theta_m$
d) $|E_\theta| = 120 I_0 |\text{sen}\,[7\pi(1-\cos\theta)] \cdot \text{cotg}\,\theta/2 \cdot \text{sen}\,[1{,}56\pi \,\text{sen}\,\theta\cos\phi]|$

7.2 a) $|E_\theta| = 600\pi \frac{I_0}{r} |\text{sinc}\,[10\pi(\cos\theta - 0{,}5)]\,\text{sen}\,\theta|$

b) $\Delta\theta_{-3\,\text{dB}} = 5{,}9^{\circ}$, D = 13 dB

7.3 a) $\alpha = -k\cos\theta_0$; $\vec{E} = j\frac{60\pi I_0 \ell}{\lambda r} e^{-jkr} \cdot \text{sinc}\left[k\frac{\ell}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0)\right] \cdot \text{sen}\theta \cdot \hat{\theta}$

b) $\ell = 10\lambda$

c) $\Delta\theta_{-3\,\text{dB}} = \frac{0{,}88\lambda}{\ell\,\text{sen}\theta_0}$

d) $D \approx \frac{2}{0{,}88}\frac{\ell}{\lambda}$

7.4 a) $\tau = 0{,}82$, $\sigma = 0{,}15$
b) $\alpha = 16{,}7^{\circ}$
c) $L_1 = 1{,}57$ m
d) $L_N = 0{,}07$ m
e) N = 17

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

8 Métodos numéricos

Cuestiones

8.1 b **8.2** d **8.3** a **8.4** c **8.5** a **8.6** c **8.7** c **8.8** d **8.9** a **8.10** c

Problemas

8.1 a) $\hat{x}\, e^{-jkz}$ en $z > 0$ y 0 en $z < 0$
b) $\hat{x}\, e^{-jkz}$ en $z < 0$ y 0 en $z > 0$

8.2 Colocación: error = 0,025
Galerkin: error = 0,0125

8.3 Aparentemente no funciona porque la solución es $\delta(z) - \text{sen}(z)$ y el conjunto de funciones base pulso no es capaz de representarla. Sin embargo, en este sentido el conjunto de funciones base $x_j(z)$ no necesita ser completo porque un pulso puede aproximar bien una delta si es suficientemente estrecho y su área es igual al peso de la delta.
La causa real es que el operador sobre el conjunto de funciones base, $\{Lx_j(z)\}$, no es un conjunto completo en el rango del operador L (pues siempre vale 0 en $z = 0$), por lo cual no es capaz de representar la función $\cos(z)$.
La solución consiste en añadir al conjunto de funciones base un pulso que exista en $z < 0$, de forma que su integral (el operador) es distinto de cero para todo $z > 0$ y el conjunto $\{Lx_j\}$ ya no vale siempre 0 en $z = 0$.

8.4 El método de Galerkin no funciona bien porque las funciones peso no pertenecen al dominio del operador adjunto, ya que no cumplen la condición de contorno $y(1) = 0$. Ello provoca que no sean una base completa del rango del operador L y, por tanto, que la convergencia sea muy difícil.
El método de mínimos cuadrados sí cumple esta condición y converge perfectamente. Nótese que en este caso el método de mínimos cuadrados obtiene los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la solución.

9 Medida de antenas

Cuestiones

9.1 c **9.2** c **9.3** d **9.4** c **9.5** b **9.6** b **9.7** c **9.8** d **9.9** a

Problemas

9.1 a) L = 20 m b) σ = -44 dB
c) $\Delta E = \pm 0{,}11$ dB

9.2 a) R > 8,7 m b) -1,4 dB < ε < 1,7 dB
c) P_T = -66 dBm d) C_p = -0,03 dB

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

9.3 a) $V_{ca} = 60 I_m \ell \dfrac{H \cos kz' + jz' \operatorname{sen} kz'}{H^2 - z'^2}$ $\quad (H = \lambda / 4)$

b) $V_{ca} = -j\omega\mu\pi \left(\dfrac{\ell}{2\pi} \right)^2 \dfrac{60 I_m}{\eta\rho} \cos kz'$

c) sonda magnética

9.4 a) $| E_x / E_y | = \left[\left(1 + \left(\dfrac{b}{a} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \Big/ \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\dfrac{b}{a} \right)^2 \right) \right]^{1/2}$

b) $| E_{c_p} / E_{x_p} | = [(a+b)/(a-b)]$

9.5 a) referencia: 0 dB, 0º; corrección canal A: +28 dB, -10º; canal B: +28 dB, -15º
b) B/A = 0 dB, 85º
c) A: -24,6 dB, 52,5º; B: -23,4 dB, -32,5º
d) $|E_{CD}/E_{CI}|$ = 27,2 dB

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Bibliografía

Textos básicos de antenas

C.A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.
L.V. Blake, *Antennas*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1966; Artech House, Boston, 1984.
R.E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985.
R.S. Elliot, *Antenna Theory and Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.
J. Griffiths, *Radio Wave Propagation and Antennas. An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985.
E.C. Jordan, K.G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
E.C. Jordan, K.G. Balmain, *Ondas electromagnéticas y sistemas radiantes*, Paraninfo, Madrid, 1978.
J.D. Kraus, R.J. Marhefka, *Antennas for all Applications*, 3.ª ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 2002.
K.F. Lee, *Principles of Antenna Theory*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1984.
T.A. Milligan, *Modern Antenna Design*, McGraw-Hill, Nueva York, 1985.
W.L. Stutzman, G.A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1981.
J.R. Wait, *Introduction to Antennas and Propagation*, Peter Peregrinus, Londres, 1986.
W.L Weeks, *Antenna Engineering*, McGraw-Hill, Nueva York, 1968.
E.A. Wolff, *Antenna Analysis*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1966; Artech House, Boston, 1988.

Textos especializados de antenas

American Radio Relay League, *The ARRL Handbook*, ARRL, Newington.
American Radio Relay League, *The Antenna Book*, ARRL, Newington.
N. Amitay, V. Galindo-Israel, C.P. Wu, *Theory and Analysis of Phased Array Antennas*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1972.
H. Bach, *Modern Topics in Electromagnetics and Antennas*, Peter Peregrinus, Londres, 1977.
I.J. Bahl, P. Bhartia, *Microstrip Antennas*, Artech House, Boston, 1980.
C.E. Baum, A.P. Stone, *Transient Lens Synthesis: Differential Geometry in Electromagnetic Theory*, Hemisphere Press, 1991.
Belotserkovski, *Fundamentos de antenas*, Marcombo, Barcelona, 1977.
P. Bhartia, K.V.S. Rao, R.S. Tomar, *Milimeter-wave Microstrip and Printed Circuit Antennas*, Artech House, Boston, 1991.
E. Brookner, editor, *Practical Phased Array Antenna Systems*, Artech House, Boston, 1991.
J. Brown, *Microwave Lenses*, Methuen & Co., Londres, 1978.
N. Bui-Hai, *Antennes de micro-ondes: Applications aux Faisceaux Hertziens*, Masson, París, 1978.
M.L. Burrows, *ELF Communications Antennas*, Peter Peregrinus, Londres, 1978.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

W.M. Cady, M.B. Karelitz, L.A. Turner, editores, *Radar Scanners and Radomes*, MIT Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill, Nueva York, 1949.
R. Chatterjee, *Antenna Theory and Practice*, Wiley Eastern, Nueva Delhi, 1988.
S.K. Cho, *Electromagnetic Scattering*, Springer Verlag, Nueva York, 1990.
R.H. Clarke, J. Brown, *Diffraction Theory and Antennas*, Ellis Horwood, Chichester, 1980.
P.J.B. Clarricoats, D.A. Olver, *Corrugated Horns for Microwave Antennas*, Peter Peregrinus, Londres, 1984.
R.E. Collin, F.J. Zucker, editores, *Antenna Theory*, vols. I y II, McGraw-Hill, New York, 1969.
R.G. Corzine, J.A. Mosko, *Four-Arm Spiral Antennas*, Artech House, Boston, 1990.
N.C. Currie, editor, *Radar Reflectivity Measurement: Techniques and Applications*, Artech House, Boston, 1989.
G. Dubost, *Flat Radiating Dipoles and Applications to Arrays*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1981.
G. Dubost, S. Zisler, *Antennes à large bande: Théorie et applications*, Masson, París, 1976.
A. Djordjevic, M. Bazdar, G. Vitosevic, T. Sarkar, R. Harrington, *Analysis of Wire Antennas and Scatterers: Software and User's Manual*, Artech House, Boston, 1992.
G.E. Evans, *Antenna Measurement Techniques*, Artech House, Boston, 1990.
A. Farina, *Antenna-Based Signal Processing Techniques for Radar Systems*, Artech House, Boston, 1992.
L.B. Felsen, N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
E.R. Freeman, *Interference Supression Techniques for Microwave Antennas and Transmitters*, Artech House, Boston, 1982.
K. Fujimoto, A. Henderson, K. Hirasawa, J.R. James, *Small Antennas*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1987.
K. Fujimoto, J.R. James, *Mobile Antenna Systems Handbook*, Artech House, Boston, 1994.
J. Galejs, *Antennas in Inhomogeneous Media*, Pergamon Press, Nueva York, 1969.
R. Garg, P. Bhartia, I. Bahl, A. Ittipiboon, *Microstrip Antenna Design Handbook*, Artech House, Boston, 2001.
L. C. Godara, *Handbook of Antennas in Wireless Communications*, CRC Press, 2001.
J.E. Hansen, editor, *Spherical Near-Field Antenna Measurements*, Peter Peregrinus, Londres, 1988.
R.C. Hansen, editor, *Microwave Scanning Antennas*, Academic Press, Nueva York; vol. I, 1964; vols. II y III, 1966.
R.C. Hansen, *Moment Methods in Antennas and Scattering*, Artech House, Boston, 1990.
V.W. Hansen, *Numerical Solutions of Antennas in Layered Media*, John Wiley & Sons, 1989.
A.E. Harper, *Rhombic Antenna Desing*, Van Nostrand Company, Nueva York, 1941.
S. Haykin, *Array Processing Applications to Radar*, Dowden, Hutchinson & Ross, Stroudsburg, 1980.
S. Haykin, *Array Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985.
H. Hertz, *Las ondas electromagnéticas*, UAB y UPC, 1990.
H. Hertz, *Electric Waves*, Mac Millan, Londres, 1893, Dover, Nueva York, 1962.
K. Hirasawa, M. Haneishi, editores, *Analysis, Design and Measurements of Small and Low-Profile Antennas*, Artech House, Boston, 1991.
H.L. Hirsch, *Practical Simulation of Radar Antennas and Radomes*, Artech House, Boston, 1988.
J.S. Hollis, T.J. Lyon, L. Clayton, *Microwave Antenna Measurements*, Scientific Atlanta, Atlanta, 1985.
J.E. Hudson, *Adaptive Array Principles*, Peter Peregrinus, Londres, 1981.
IEEE Std 149-1979, *IEEE standard test procedures for antennas*, IEEE, 1979.
M.F. Iskander, editor, *NSF/IEEE Center for Computer Appplications in Electromagnetics Education (CAEME)*, Software Book, vol. I, 1991.
J.R. James, P.S. Hall, C. Wood, *Microstrip Antenna Theory and Design*, Peter Peregrinus, Londres, 1982.
H. Jasik, editor, *Antenna Engineering Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 1961.
R.C. Johnson, *Designer Notes for Microwave Antennas*, Artech House, 1991.
R.C. Johnson, H. Jasik, *Antenna Enginnering Handbook*, 2.ª edición, McGraw Hill, Nueva York, 1984.
E.C. Jordan, editor, *Electromagnetic Theory and Antennas*, vols. I y II, Pergamon Press, 1963.
E.C. Jordan, *Reference Data for Engineers*, H.W. Sams Co., Indianapolis.
E.V. Jull, *Aperture Antennas and Diffraction Theory*, Peter Peregrinus, Londres, 1981.
D.G. Kiely, *Dielectric Aerials*, Methuen & Co., Londres, 1953.
R.W.P. King, *Theory of Linear Antennas*, Harvard University Press, Cambridge, 1956.
R.W.P. King, R.B. Mack, S.S. Sandler, *Arrays of Cylindrical Dipole Antennas*, Cambridge University Press, Londres, 1968.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

R.W.P. King, G.S. Smith, *Antennas in Matter*, MIT Press, Cambridge, 1981.
T. Kitsuregawa, editor, *Advanced Technology in Satellite Comunication Antennas: Electrical and Mechanical Design*, Artech House, Boston, 1990.
J.D. Kraus, *Big Ear*, Cygnus-Quaser Books, Powell, 1976.
J.D. Kraus, *Antennas*, Second Edition, McGraw-Hill, Nueva York, 1988.
A. Kumer, *Fixed and Mobile Terminal Antennas*, Artech House, Boston, 1991.
A. Kumer, H.D. Hristov, *Microwave Cavity Antennas*, Artech House, Boston, 1989.
F.M. Landstorfer, R.R. Sacher, *Optimization of Wire Antennas*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1985.
E.A. Laport, *Radio Antenna Engineering*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
P.E. Law, *Shipboard Antennas*, Artech House, Londres, 1986.
H.F. Lee, W. Chen, *Advances in Microstrip and Printed Antennas*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.
J.C. Liberti, T.S. Rappaport, *Smart Antennas for Wireless Communications. IS-95 and Third Generation CDMA Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1999.
Y.T. Lo, *Handbook of Antenna Theory and Design*, Van Nostrand Reinhold, Princeton, 1987.
Y.T. Lo, S.W. Lee, *The Antenna Handbook*, Van Nostrand Reinhold, Princeton, 1993.
T. Logsdom, *Mobile Communication Satellites,* McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
A.W. Love, editor, *Electromagnetic Horn Antennas*, IEEE Press, Nueva York, 1976.
A.W. Love, editor, *Reflector Antennas*, IEEE Press, Nueva York, 1978.
M.T. Ma, *Theory and Application of Antenna Arrays*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1974.
R.J. Mailloux, *Phased Array Antenna Handbook*, Artech House, Boston, 1993.
N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 1950.
G. Maral, M. Bousquet, *Satellite Communications Systems*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1996.
G. Markov, D. Sazonov, *Antenas*, Mir, Moscú, 1978.
H.H. Meinke, F.W. Gundlach, *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*, Springer Verlag, Berlín, 1968.
M. Mikavica, A. Nesic, *CAD for Linear and Planar Antenna Arrays of Various Radiating Elements. Software and User's Manual*, Artech House, Boston, 1992.
R.A. Monzingo, T.W. Miller, *Introduction to Adaptive Arrays*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1980.
L.A. Moxon, *HF Antennas for all Locations*, Radio Society of Great Britain, 1982.
H. Nakano, *Helical and Spiral Antennas: A Numerical Approach*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1987.
J.A. Navarro, K. Chang, *Integrated Active Antennas and Spatial Power Combining*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1996.
E. Nicolau, D. Zaharia, *Adaptive Arrays*, Elsevier, Nueva York, 1990.
A. Oliner, G. Unittel, *Phased Array Antennas*, Artech House, Boston, 1972.
A.D. Olver, P.J.B. Clarricoats, *Microwave Horns and Feeds*, IEEE Press, Nueva York, 1994.
W. Orr, S. Cowan, *Cubical Quad*, Radio Pub., 1970.
B.D. Popovic, *Cad of Wire Antennas and Related Radiating Structures*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1991.
B.D. Popovic, M.B. Dragovic, A.R. Djordjevic, *Analysis and Synthesis of Wire Antennas*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1982.
D. Pozar, *Antenna Design Using Personal Computers*, Artech House, Boston, 1986.
D. Pozar, D.H. Schaubert, *Microstrip Antennas,* IEEE Press, Nueva York, 1995.
C. Puente, *Fractal Antennas*, Tesis Doctoral, UPC, Barcelona, 1997.
T.S. Rappaport, *Smart Antennas: Selected Readings*, IEEE Press, Nueva York, 1998.
D.K. Rhodes, *Synthesis of Planar Antenna Sources*, Oxford University Press, Oxford, 1974.
J. Rockway, J. Logan, D. Tam, S. Li, *The MININEC System: Microcomputer Analysis of Wire Antennas*, Artech House, Boston, 1988.
K. Rothammel, *Antennenbuch*, Telekosmos Verlag, Stuttgart, 1978.
E. Roubine, J.Ch. Bolomey, *Antennes*, vols. I y II, Masson, París, 1977.
A.W. Rudge, K. Milne, A.D. Olver, P. Knight, editores, *Handbook of Antenna Design*, Peter Peregrinus, Londres, vol. I, 1982, vol. II, 1983.
B. Rulf, G. Robertshaw, *Understanding Antennas for Radar Communications*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

V.H. Rumsey, *Frequency Independent Antennas*, Academic Press, Nueva York, 1966.
W.V.T. Rusch, P.D. Potter, *Analysis of Reflector Antennas*, Academic Press, Nueva York, 1970.
S.A. Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1952.
S.A. Schelkunoff, H.T. Friis, *Antennas: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1952.
C.R. Scott, *Modern Methods of Reflector Antenna Analysis and Design*, Artech House, Boston, 1990.
S. Silver, editor, *Microwave Antenna Theory and Design*, MIT Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill, Nueva York, 1949; Dover, Nueva York, 1949; Peter Peregrinus, Londres.
M.I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1962.
D. Slater, *Near Field Antenna Measurments*, Artech House, Boston, 1991.
C.J. Sletten, editor, *Reflector and Lens Antennas: Analysis and Design using PCs*, Artech House, Boston, 1988.
C.J. Sletten, editor, *Software and Example Book for Reflector and Lens Antennas*, versión 2.0 software y manual del usuario, Artech House, Boston, 1991.
C.E. Smith, *Log-periodic Antenna Design Handbook*, Smith Electronics, Cleveland, 1966.
B.D. Steinberg, *Principles of Aperture and Array System Design*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1976.
W.L. Stutzman, *Polarization in Electromagnetic Systems*, Artech House, 1992.
F.E. Terman, *Radio Engineer's Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 1943.
G.V. Tsoulos, *Adaptive Antennas for Wireless Communications*, IEEE Press, Nueva York, 2001.
F.T. Ulaby, R.K.Moore, A.K. Fung, *Microwave Remote Sensing, Active and Passive*, Addison-Wesley, Reading, 1981.
C.H. Walter, *Traveling Wave Antennas*, McGraw-Hill, Nueva York, 1965, Dover, Nueva York, 1970.
M.N. Weiner, S.P. Cruze, C.C. Li, W.J. Wilson, *Monopole Elements on Circular Ground Planes*, Artech House, Boston, 1987.
B.J. Westcott, *Shaped Reflector Antenna Design*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1983.
P.J. Wood, *Reflector Antenna Analysis and Design*, Peter Peregrinus, Londres, 1980.
J.F. Zürcher, F. Gardiol, *Broadband Patch Antennas*, Artech House, Boston, 1995.

Textos de electromagnetismo que también tratan sobre antenas y propagación de ondas

A. Baden Fuller, *Engineering Electromagnetism*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1992.
C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1989.
A.K. Bhattacharyya, *High Frequency Electromagnetic Techniques,* John Wiley & Sons, Nueva York, 1995.
C. Christopoulos, *An Introduction to Applied Electromagnetism*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1990.
J.A. Elliot, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1966.
K.C. Gupta, M.D. Abouzahra, *Analysis and Design of Planar Microwave Components*, IEEE Press, Nueva York, 1994.
R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Method*, MacMillan, Nueva York, 1968.
R.F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, Nueva York, 1961.
M.F. Iskander, *Electromagnetic Fields and Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.
G.L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, Peter Peregrinus, Londres, 1976.
J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1993.
C.C. Johnson, *Field and Wave Electromagnetic Waves*, McGraw-Hill, Nueva York, 1965.
E.F. Knott, J.F. Shaeffer, M.T. Tuley, *Radar Cross Section*, 2.ª edición, Artech House, Boston, 1993.
J.D. Kraus, *Electromagnetics*, 4.ª edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1992.
E.K. Miller, L. Medgyesi-Mitschang, E.H. Newman, *Computational Electromagnetics,* IEEE Press, Nueva York, 1992.
R. Mittra, *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, Springer Verlag, Nueva York, 1975.
R. Mittra, editor, *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Nueva York, 1973.
N. Morita, N. Kumagai, J. Mantz, *Integral Equation Methods for Electromagnetics*, Artech House, Boston, 1990.
S. Ramo, J.R. Whinnery, T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 2.ª edición, John Wiley & Sons, 1984.
T.K. Sarkar, *Application of Conjugate Gradient Method to Electromagnetic and Signal Analysis*, Pier 5, Elsevier, Nueva York, 1990.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

P.P. Silvester, G. Pelosi, *Finite Elements for Wave Electromagnetics,* IEEE Press, Nueva York, 1994.
J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1941.
K. Umashankar, A. Taflove, *Computational Electromagnetics*, Artech House, Boston, 1993.
W.L. Weeks, *Electromagnetic Theory for Engineering Applications*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1964.
D. H. Werner, R. Mittra, Ed. *Frontiers in Electromagnetics*, IEEE Press, Nueva York, 2000.

Textos de propagación de ondas

Y. Al'pert, *Radio Wave Propagation and the Ionosphere*, Consultants Bureau, Nueva York, 1963.
Y. Al'pert, D.S. Fligel, *Propagation of ELF and VLF Waves Near the Earth*, Consultants Bureau, Nueva York, 1970.
A. Baños, *Dipole Radiation in the Presence of Conducting Media*, Pergamon Press, Nueva York, 1966.
H.M. Barlow, J. Brown, *Radio Surface Waves*, Oxford University Press, Oxford, 1962.
B.R. Bean, *Atmospheric Bending of Radio Waves, Electromagnetic Wave Propagation*, Academic Press, Londres, 1960.
B.R. Bean, E.J. Dutton, *Radio Meteorology*, Dover, Nueva York, 1968.
T.W. Bennington, *Short Wave Radio and the Ionosphere*, Iliffe and Sons, Londres, 1950.
W.T. Blackband, editor, *Propagation of Radio Waves at Frequencies below 300 kc/s*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
P.V. Bliokh, A.P. Nikolaenko, Y.F. Filippov, *Shumann Resonances in the Earth-Ionosphere Cavity*, Peter Peregrinus, Londres, 1980.
L. Boithias, *Propagation des Ondes Radioeléctriques dans l'environement terrestre*, Dunod, París, 1983.
H. Bremmaer, *Terrestrial Radio Waves*, Elsevier, Nueva York, 1949.
K. Budden, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.
K. Budden, *The Wave-Guide Mode Theory of Wave Propagation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961.
C.R. Burrows, S.S. Attwood, editores, *Radio Wave Propagation*, Academic Press, Nueva York, 1949.
W.G. Burrows, *VHF Radio Wave Propagation in the Troposphere*, International Textbook Co., Glasgow, 1968.
P.C. Clemmov, *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields,* IEEE Press, Nueva York, 1996.
P. David, J. Voge, *Propagation des ondes*, Eyrolles, París, 1966.
K. Davies, *Ionospheric Radio Propagation*, N.B.S. Monograph 80, 1965, Dover, Nueva York, 1966, Peter Peregrinus, Londres, 1990.
P. Delogne, *Leaky Feeders and Subsurface Radio Communications*, Peter Peregrinus, Londres, 1982.
M. Dolukhanov, *Propagation of Radio Waves*, Mir, Moscú, 1965.
K.L. Dumas, L.G. Sands, *Microwave Systems Planning*, Hayden, Nueva York, 1967.
H.E. Farrow, *Long-Wave and Medium-Wave Propagation*, Iliffe & Sons, Londres, 1958.
W.L. Flock, *Electromagnetics and the Environement*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
J. Galejs, *Terrestrial Propagation of Long Electromagnetic Waves*, Pergamon Press, Oxford, 1972.
J.D. Gibson, *The Mobile Communications Handbook*, 2.ª ed., CRC-IEEE Press, 1999.
A.J. Giger, *Low Angle Microwave Propagation: Physics and Modeling*, Artech House, Boston, 1991.
M.P.M. Hall, *Effects of the Troposphere on Radio Communication*, Peter Peregrinus, Londres, 1979.
J.M. Hernando Rábanos, *Transmisión por radio*, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1993.
M.V. Hitney, *IONOPROP: Ionospheric Propagation Assessment Software and Documentation*, Artech House, Boston, 1991.
A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, Nueva York, 1978.
A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
W.C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, IEEE Press, Nueva York, 1974.
D.E. Kerr, *Propagation of Short Radio Waves*, M.I.T. Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill, Nueva York, 1951, Dover, Nueva York, 1965, Peter Peregrinus, Londres, 1987.
J. Lavergnat, M. Sylvain, *Radio Wave Propagation: Principles and Techniques*, John Wiley & Sons, Nueva York, 2000.
W.C.Y. Lee, *Mobile Communications Engineering: Theory and Applications*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1998.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

D.C. Livingston, *The Physics of Microwave Propagation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.
P.A. Mathews, *Radio Wave Propagation, VHF and Above*, Chapman & Hall, Londres, 1965.
L.F. McNamara, *The Ionosphere: Communications, Surveillance and Direction Finding*, Krieger Pub., 1991.
M.L. Meeks, *Radar Propagation at Low Altitudes*, Artech House, Boston, 1982.
V.V. Nikolski, *Electrodinámica y propagación de ondas de radio*, Mir, Moscú, 1976.
K.A. Norton, *Low and Medium Frequency Radio Propagation, Electromagnetic Wave Propagation*, Academic Press, Londres, 1960.
Ch. Papas, *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, McGraw-Hill, Nueva York, 1965.
P.F. Panter, *Communication System Design*, McGraw-Hill, Nueva York, 1972.
J.D. Parsons, *The Mobile Radio Propagation Channel*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1991.
A. Picquenard, *Radio Wave Propagation in the Troposphere*, Elsevier, Nueva York, 1962.
T. Pratt, C.W. Bostian, *Satellite Communications*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1986.
T.S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles & Practice*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
H.R. Reed, C.M. Russell, *Ultra High Frequency Propagation*, Chapman Hall, Londres, 1966.
G. Roda, *Troposcatter Radio Links*, Artech House, Boston, 1988.
P. Rohan, *Introduction to Electromagnetic Radio Propagation*, Artech House, Boston, 1991.
S.R. Sanders, *Antennas & Propagation for Wireless Communication Systems*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1999.
J.Z. Schanker, *Meteor Burst Communications*, Artech House, Boston, 1990.
J. Schiller, "Mobile Communications", Addison-Wesley, Reading, 2000.
D.L. Schilling, *Meteor Burst Communications. Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1993.
K. Siwicik, *Radiowave Propagation and Antennas for Personal Communication*, Artech House, Boston, 1995.
S. Tabbane, *Handbook of Mobile Radio Networks*, Artech House, Boston, 2000.
UIT, *Recomendaciones e Informes*, Ginebra.
J.R. Wait, *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, Pergamon Press, Nueva York, 1962.
J.R. Wait, *Wave Propagation Theory*, Pergamon Press, Nueva York, 1981.
A.D. Watt, *VLF Radio Engineering*, Pergamon Press, Oxford, 1967.
M.L. Weeks, *Radar Propagation at Low Altitudes*, Artech House, Boston, 1984.

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Índice alfabético de materias

A

Absorción molecular, 54
Adaptación: Δ, Γ, Ω, T, 157
Agrupación (5), 171-242
  adaptable (5.8.7), 228
  bidimensional (5.7), 202-206
    barrido electrónico, 203-205
    factor, 202
    plana uniforme, 204
  directividad, 423-431
  elementos parásitos (5.10), 232-235
  lineal (5), 171-242
    alimentación (5.9), 230-232
    barrido electrónico, 176
    binómica (5.4.3), 184-185
    convolución (5.4.5), 186-189
    factor, 175-178
    lóbulo de difracción, 176
    margen visible, 176
    polinomio (5.3.4), 179-180
    suma (5.4.5), 186-189
    triangular (5.4.2), 183-184
    uniforme (5.4.1), 181-182, (5.5), 189-191
      de Hansen-Woodyard, 197-198
      longitudinal, 191
      transversal, 190
  logoperiódica de dipolos, 330-332
  superdirectiva (5.8.6), 226-228
Alcance
  comunicación, 33, 68
  radar, 33
Alimentación
  asimétrica, 157
  de agrupaciones (5.9), 230-232
  de antenas (8.2.3), 356-357
  simétrica, 210
  sistemas de (4.7), 155-157
Análisis
  de agrupaciones, 171-235
  de reflectores
    electromagnético, 279-281
    geométrico, 277-278
Ancho de banda (1.2.6), 25
  hélice, 321
  lente escalonada, 302
Ancho de haz a -3 dB, 21
  agrupación lineal (5.6.2), 199-201
  apertura
    circular, 253-255
    rectangular, 249-253
  bocina
    cónica, 263
    piramidal, 261
    sectorial de plano E, 259
    sectorial de plano H, 260
  distribución unidimensional, 102
  hélice, 323
Ancho de haz entre ceros, 21
  agrupación lineal
    binómica, 184
    triangular, 183
    uniforme, 181, 189
      de Hansen-Woodyard, 197
      longitudinal, 191
      transversal, 190
  distribución unidimensional, 102
Ángulo sólido, 19, 23
Antena, 15
  agrupación (5), 171-242
    análisis, 171-206
    síntesis, 207-242
  alimentación (4.7), 155-164
  apertura (6), 243-304
  autocomplementaria, 326
  autoescalable, 325
  bocina (6.2), 255-265
  cilíndrica (4.2), 139-145
  de Beverage, 316
  de hilo (7.2), 315-318

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de onda progresiva, 315-334
dipolo (4.2), 139-145
discono, 319
elemental (4.1), 127-139
espira circular (4.1.2), 134-136
espiral (7.5.1), 326-328
fractal, 334-335
hélice (7.4), 320-334
impresa (6.3.3), 270-272
independiente de la frecuencia (7.5), 324-328
isótropa, 22
lente (6.5), 299-304
logoperiódica (7.6), 328-3334
medida (9), 391-414
monopolo (4.3), 145-149
omnidireccional, 22
ranura (6.3), 265-272
reflector (6.4), 273-299
Vivaldi, 314
Yagi-Uda, 233-235
Apertura (6), 243-304
circular (6.1.5), 253-255
elemental, 248
fuentes equivalentes (6.1.1), 244-245
rectangular (6.1.4), 249-253
Área efectiva (1.3.2), 27-28, 118, 248
Atenuación
específica, 54-58
ionosférica, 62
troposférica (2.3.1), 54-58
Atmósfera de referencia, 58
Autoimpedancia, 152

B

Balun (4.6.5), 158-163
Bandas de frecuencias, 16
Bandas de radiodifusión, 78-79
Barrido electrónico, 176, 203
Bloqueo en un reflector, 292
Bocina (6.2), 255-265
cónica corrugada, 265, 301
cónica lisa, 263-265
piramidal, 261-263
sectorial de plano E, 256-259
sectorial de plano H, 259-260

C

Cancelador de lóbulos secundarios, 228
Cámaras anecoicas, 397-398
Campos de medida (9.2.2), 395-399
compactos, 398
criterios de diseño, 392-395
elevados, 396
en reflexión, 396
inclinados, 396
lejanos, 391-395
próximos, 399, 409-414
Campos electromagnéticos
en la apertura de un reflector, 281
expresiones generales (3.3), 93-106 (6.1.2), 245-248, 350
incidentes sobre un reflector, 279
inducidos, 94
amplitud, 392
dipolo, 142
elemental,128
lejanos, 94-98
próximos, 94
radiados, 94-95
agrupaciones (5.2), 172-174
apertura (6.1), 244-255
circular, 253, 254
elemental, 248
rectangular, 249
bocina
piramidal, 261
sectorial de plano E, 257, 259
sectorial de plano H, 260
dipolo, 141
de media onda, 142
elemental, 123-130
ortogonales, 133
sobre plano conductor, 146
espira elemental, 134
hélice, 322
hilo largo, 316
panel de dipolos, 154
parche rectangular, 271
ranura
coaxial, 269
elemental, 267
resonante, 268
reflector
diédrico, 274, 275
parabólico, 280, 281, 287
variación de la
amplitud, 392-393
fase, 393
Yagi, 235
Capacidad de esferas, 150
Capas ionosféricas, 62
altura virtual, 66-70
densidad de ionización, 62
Cargas inductivas y capacitivas, 149-152
Cáustica, 382
Coeficiente de
desacoplo de polarización, 29, (3.6.3), 118-120
medida, 30, (9.7), 406-407
difracción, 379-381
pérdidas en el medio, 29
reflexión
lente, 300
polarización horizontal, 45, 46
polarización vertical, 45, 46
Coíndice de refracción, 58
Comparación entre reflectores y lentes, 304
Condición de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

Hansen-Woodyard, 197
Lorentz, 92, 99, 350
radiación, 342, 351
Condiciones de contorno, 90 342, 352
de absorción, 342
de radiación, 342
Conductancia de radiación de ranura
coaxial, 270
de media onda, 268
elemental, 267
Conductividad eléctrica
de plasma, 63
de suelos, 44
Conductividad magnética, 90
Conductores
eléctricos, 89, 108, 146, 347
magnéticos, 90, 108, 146
Conductos atmosféricos, 59-60
Cono de Keller, 379
Constante de fase, 65, 256, 299, 316, 322
Coordenadas cilíndricas, 438
Coordenadas esféricas, 97, 98, 438
Corrección de sonda, 411
Corrientes
cortocircuito, 116
eléctricas y magnéticas, 98
equivalentes, 107
apertura, 246
parche rectangular, 271
ranura, 266
inducidas en reflector parabólico, 280

D

Decaimiento en bordes
lente, 300
reflector, 283-286, 290
Densidad de ionización, 62
Densidad de potencia radiada, 19
dipolo, 141
de media onda, 142
elemental, 128
Diagrama de polarización, 407
Diagrama de radiación (1.2.3), 20-22, 97, 115
corte de plano E, 20
apertura rectangular, 249-250, 251
bocina piramidal, 263
dipolo elemental, 128
dipolos paralelos, 172
monopolo de cuarto de onda
sobre tierra imperfecta, 148
sobre conductor finito, 149
panel de dipolos, 165
parche rectangular, 272
reflector diédrico, 275
Yagi, 235
corte de plano H, 20
apertura rectangular, 250, 251
bocina piramidal, 263
dipolos paralelos, 172
panel de dipolos, 156
parche rectangular, 272
reflector diédrico, 275
medida (9.2), 391-402
normalizado, 23
agrupación
bidimensional, 204
de 2 elementos, 180
de 9 elementos, 186
de 21 elementos, 171
Beverage, 316
dipolo elemental, 128
dipolos ortogonales, 133
espira elemental, 134
hélice, 324
reflector parabólico, 282
rómbica, 318
V, 318
Difracción (2.2.3), 42, 48-51, 350
aristas, 47, 375, 378-381
teoría física, 383
teoría geométrica, 382
teorías uniformes, 383
tierra esférica, 50
Difusión troposférica (2.3.3), 61
Dipolo (4.2), 139-145
acortamiento (4.6.3), 156-157
alimentación asimétrica (4.6.4), 157-158
cargado (4.4), 149-152
corto, 142
de banda ancha, 318
doblado (4.7.3), 157
elemental (4.1.1), 127-134, 137
equilibrado, 159
impedancia de entrada (4.6.1), 156
impedancia mutua (4.6.2), 156
media onda, 142
onda completa, 144
panel, 154
Directividad (1.2.4), 22-24
agrupación, 423-431
lineal (5.6), 191-202
logoperiódica de dipolos, 333
apertura, 247
circular, 253, 255
elemental, 248
rectangular, 249, 250
bocina
cónica, 263-264
corrugada, 301
piramidal, 261, 291
sectorial de plano E, 256-259
sectorial de plano H, 259-261
dipolo, 141, 143
de Hertz, 131, 150
de media onda, 143
elemental, 22, 128
ortogonales, 133

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

sobre plano conductor, 146
distribuciones unidimensionales, 102
espira elemental, 134
hélice, 323
lente, 301
medida (9.4), 403
panel de dipolos, 155
ranura
elemental, 266
resonante, 268
reflector
diédrico, 276
parabólico, 285-289, 290-298
Yagi, 235
Discono, 319
Discriminación de polarización, 24
Dispersión de Rayleigh, 132
Distribuciones de corrientes, 101-103
ancho de haz, 102
directividad, 102
medida (9.6), 405-406
nivel de lóbulos, 102
vector de radiación, 98-99
Diversidad, 74
Dualidad, 89-91, 266-270

E

Ecuación de
invarianza ponderada, 342
onda, 84, 419
Pocklington, 355-356
transmisión (1.4), 28-31
Ecuación del radar (1.4.1), 28-32
Ecuaciones
de Maxwell (3.1), 87-89
de Stratton-Chu, 351
integrales, 344-374
campo eléctrico, 352-354
campo magnético, 352-354
campos combinados, 354
discretización, 357-374
potenciales mixtos, 354
Efecto de la
tierra
en la antena de Beverage, 317
en la propagación (2.2), 43-54
en monopolos (4.3), 145-149
ionosfera en la propagación (2.4), 61-70
Eficiencia
de desbordamiento
reflectores, 286, 288
de iluminación, 248
apertura circular, 253-255
apertura rectangular, 251-253
bocina cónica, 263
bocina piramidal, 261
bocina sectorial de plano E, 256
bocina sectorial de plano H, 259
reflector, 286, 288-289
de polarización
reflectores, 286
óhmica, 17, 23, 135
total
reflectores, 288-289
EFIE, 353-354
Elementos finitos, 372
Equivalencia
aplicación a
antenas, 349-3506, 375
difracción, 350
teorema (3.5), 106, 109, 280-281, 345-350
Error de fase en bocinas, 245-247, 249, 251
Espectro angular, 103
Espira circular (4.1.2), 134-136
Espira cuadrada, 139
Espira elemental, 138-139
Espiral de Cornu, 258

F

Factor de
agrupación (5.3.1), 175-176
binómica, 185
de dos elementos (5.3.3), 179
representación gráfica (5.3.2), 176-178
binómica, 185
triangular, 183
uniforme, 181
triangular, 183
uniforme, 181
calidad, 26
desmagnetización, 136
ruido, 35
Fase estacionaria, 376
Frecuencia
crítica, 64
de colisiones, 63
de resonancia del plasma, 64
máxima utilizable, MUF, 67, 69
Fuentes de ruido externo (2.5), 75-78
Fuentes equivalentes (3.1.1), 89-91
de una apertura, 244-245
de una ranura, 265-270
superficiales, 346
volumétricas, 345
Función de Green, 350, 355, 419-422
Funciones
base, 367-374
de Bessel, 134, 254
de Hankel, 256
peso, 359-360, 367-374

G

Ganancia, 23
medida (9.3), 402
Generadores

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

de corriente, 91
de tensión, 91
equivalentes, 108-109
GTD, 382-383
Guía de ondas
circular, 254
corrugada, 295
rectangular, 243, 252

H

Hélice (7.4), 320-324
modo axial, 321-324
modo normal, 320

I

Iluminación en bordes
(ver decaimiento en bordes)
Imágenes (4.3.1),145-147
Impedancia
característica, 19
bocina sectorial, 256
guía rectangular, 252
de antena (1.2.1), 17-18
espira elemental, 135
ranura doblada, 268
de entrada (3.6.4), 120-121, (4.5), 152-155
panel de dipolos, 154
reflector diédrico, 273, 275
de onda, 19, 96, 245
medida (9.5), 404-405
mutua (3.6.4), 120-121
Índice de refracción, 44, 58, 64, 66, 299, 303
Inductancia de un hilo, 151
Instrumentación de medida (9.2.3), 400-402
Integral de Fresnel, 258
Intensidad de radiación (1.2.2), 18-20, 97, 99
apertura elemental, 248
apertura circular, 253
espira elemental, 135
ranura elemental, 266

L

Lema de Lorentz, 110
Lente (6.5), 299-304
análisis electromagnético (6.5.1), 299-301
comparación con reflectores, 304
escalonada, 301-302
Luneburg, 303-304
Rotman, 303
TEM, 302-303
Ley de Snell, 377
Línea
coaxial, 269
equilibrada, 158
microtira, 270-272, 303
Lóbulo de difracción, 176, 206
Longitud efectiva (1.3.2), 27-28, (3.6.2), 116-118

M

Margen visible, 176
MEC, 378
Medida de antenas (9), 391-414
campos de medida, 395-399
corrientes, 405
diagramas, 391-397
directividad, 403
en campo lejano, 391-397
en campo próximo, 409-414
ganancia, 402
impedancia, 404-405
instrumentación, 400-402
polarización, 406-407
temperatura, 408
MEI, 342
Método de
autovalores y autofunciones, 359
colocación, 360
corrientes equivalentes, 378-381
diferencias finitas, 343
elementos de contorno, 373
elementos finitos, 343, 372-374
Galerkin, 360
gradiente conjugado, 343, 363-367
mínimos cuadrados, 361
momentos, 344, 357-363
procesado gráfico, 386
Rayleigh-Ritz, 344
Métodos de alta frecuencia (8.4), 375-386
Métodos numéricos (8), 341-386
diferenciales, 343
dominio de la frecuencia, 343
dominio del tiempo, 343
integrales (8.2), 334-357
Métodos variacionales, 344
MFIE, 353-354
MM, 343-349
Modelado
de haz, 207
por facetas, 371-372, 385
por hilos, 371
por superficies paramétricas, 385
Modelos a escala (9.9), 409
Modos híbridos, 295-296
Modos TE, TM, 252, 254, 255-257, 295
Momento dipolar
eléctrico, 138
magnético, 138
Monopolo (4.3), 145-149

N

NLPS, 22
Número de

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

condicionamiento, 365
onda, 24

O

Okumura-Hata (2.5.2), 71-72
Onda
de espacio, 42
de superficie (2.2.4), 42, 51-54, 384
directa, 42, 46
reflejada, 42, 46
Óptica física, (8.4.1), 376-378
Óptica geométrica, 381-382

P

Parámetros de antenas
recepción (1.3), 27-28
transmisión (1.2), 17-27
Parámetros de antenas, definición
ancho de
banda (1.2.6), 25-27
haz a -3 dB, 21
haz entre ceros, 21
ángulo sólido equivalente, 23
área efectiva (1.3.2), 27-28, 117
coeficiente de
desacoplo de polarización, 30
desadaptación, 29
reflexión, 29
conductancia de radiación, 267
directividad (1.2.4), 22, 24, 117
eficiencia
de bloqueo, 292
de desbordamiento, 285
de iluminación, 248
de polarización, 286
óhmica, 19, 23
total, 286
ganancia, 23
impedancia
de entrada, 19
en transmisión (1.2.1), 17-18
longitud efectiva, 28, 117
polarización (1.2.5), 24-25
relación
delante-atrás, 22
f/D_a, 279
lóbulo principal a secundario, 22
resistencia de radiación, 18
resistencia de pérdidas, 18
Parche rectangular, 271-272
Pérdida de transmisión, 29
en el espacio libre, 30
Pérdidas óhmicas, 18, 1315, 300
Perfil de una lente, 300
Permeabilidad magnética, 87
Permitividad eléctrica
de plasma, 63
de suelos, 42
efectiva, 89
equivalente, 89
PIRE, 29
Plasma, 63-66
Polarización (1.2.5), 24-25
circular, 24-25
copolar, 25
cruzada, 25 281-282
elíptica, 23
lineal, 23
medida, 392-393
relación axial, 24
Polinomio de agrupación (5.3.4), 179-180
binómica, 874
ceros, 180
círculo unidad, 180
triangular, 183
uniforme, 181
Polinomios de Chebychev, 217-218
Posicionadores, 401-402
Potencia de ruido, 32-34, 68
Potencia isotrópica radiada equivalente, 29
Potencia recibida, 114-115
Potencia total radiada, 19, 97
apertura, 247
apertura elemental, 248
bocina sectorial de plano E, 246
dipolo, 141
dipolo elemental, 129
espira elemental, 135
ranura elemental, 267
Potencial
escalar ϕ, 91, 421
escalar ψ, 99
retardado (3.2), 91-93
vector A, 91, 96, 101, 104, 174, 267, 421
vector F, 96, 266
Precondicionado, 365-366
Principio de Huygens, 245
Propagación (2), 41-85
efecto de la
ionosfera (2.4), 61-70
tierra (2.2), 43-54
troposfera (2.3), 54-61
entorno terrestre (2.1), 41-43
entornos complejos (2.5), 70-75
espacio libre (2.1), 41-43
medio ionizado (2.4.2), 63-65
PTD, 377

R

Radar
biestático, 31
monoestático, 31
Radio de curvatura, 58
Radio equivalente de la tierra, 59
Ranura (6.3), 265-270

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

coaxial, 269-258
doblada, 268
elemental (6.3.1), 266-267
en guía de ondas, 269
resonante (6.3.2), 268-270
Reciprocidad (Teorema) (3.4), 110-111
aplicaciones (3.6), 111-121
Redes de alimentación (4.7.1), 156
Reflector (6.4), 273-299
diédrico (6.4.1), 273-276
parabólico (6.4.2), 276-275
análisis electromagnético (6.4.4), 279-281
análisis geométrico (6.4.3), 277-279
asimétrico, 296
Cassegrain, 297
cilindro parabólico, 299
consideraciones prácticas (6.4.6), 292-294
geometrías (6.4.8), 296-299
parámetros (6.4.5), 269-278
tipos de alimentador (6.4.7), 294-296
Reflexión
ionosférica, 66
tierra plana (2.2.2), 44-48
Refracción (2.3.2), 58-60
Refractividad, 58
Regiones de Fresnel y de Fraunhofer (3.3.3), 104-106
Relación axial, 24, 321, 323
Relación de lóbulo principal a secundario, 22
agrupación
triangular, 184
uniforme, 182
apertura
circular, 253-255
rectangular, 251 252
bocina
cónica, 263
piramidal, 261
sectorial de plano E, 259
sectorial de plano H, 260
distribución unidimensional, 102
lente, 301
reflector parabólico, 285, 290
Relación de onda estacionaria, 26, 293, 405
Relación f/Da, 278, 289-291
Relación señal-ruido, 33-34, 68
Resistencia de
entrada de dipolos, 143
pérdidas de espira, 135
radiación, 18
dipolo, 141, 123
cargado, 151
de media onda, 142
elemental, 129
sobre plano conductor, 147
espira elemental, 135
hélice, 323
ranura
doblada, 268
elemental, 267
resonante, 268
solenoide, 136
Rotación de Faraday, 65-66

S

Sección recta, 31
Señales reflejadas, 394-395
Serie de Fourier, 209-214
Simetrizador (4.7.4), 158-163, 275
Síntesis de agrupaciones (5.8), 207-228
de Chebychev (5.8.4), 217-225
de Fourier (5.8.2), 209-214
de Schelkunoff (5.8.1), 207-208
de Taylor (5.8.5), 225-226
de Woodward-Lawson (5.8.3), 215-217
Sondas de medida, 400

T

Tangente de pérdidas, 89, 301
Temperatura de brillo, 33, 76-78
Temperatura de ruido (1.5), 32-35
antena, 32-33
medida (9.8), 408
equivalente, 34
referencia, 34
Tensión en circuito abierto, 117
Tolerancias en un reflector, 292
Transformación
campo próximo-lejano, 311-313
de coordenadas (Anexo D), 437
de Dolph, 219-221
de Riblet, 222-225
Transformada de Fourier, 88, 90, 95, 247
Transformador (4.7.4), 158-162
Troposfera (2.3), 54-61

U

Unicidad (Teorema) (3.5), 110-111
UTD, 383

V

Varianza, 428
Vector de Poynting, 97
Vector de Radiación N, 97, 100-104
agrupaciones, 173
apertura, 246
dipolo, 141
de media onda, 142
elemental, 128
sobre plano conductor, 147
dipolos ortogonales, 133
distribución unidimensional, 101-103
espira, 98

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.

elemental, 134
expresión general para dipolos eléctricos y magnéticos (4.1.4), 137-139
hilos y tubos, 96
Vector de radiación L, 98-99
apertura, 246
ranura
coaxial, 269
elemental, 267
resonante, 268
Velocidad de fase, 64
Velocidad de grupo, 64

Y

Yagi-Uda, 233-235

Z

Zonas de Fresnel, 48-51

© Los autores, 2002; © Edicions UPC, 2002.